JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. RESAL

Sur les propriétés d'une courbe qui roule sur une droite

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 6 (1880), p. 115-128.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1880_3_6__115_0>

Sur les propriétés d'une courbe qui roule sur une droite;

Par M. H. RESAL (¹).

---

1. Déterminer la forme d'une courbe telle que, si elle roule sur une droite, un point relativement fixe de son plan décrive une courbe donnée, tel est le problème que je me propose de résoudre.

J'ai déjà traité cette question, dans un cas particulier, dans une Note insérée aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* du 2 juillet 1877 et ayant pour titre : *Sur la génération de la courbe méridienne d'une surface de révolution dont la courbure moyenne varie suivant une loi donnée.*

Je croyais avoir la priorité dans la manière de poser la question en me plaçant à un point de vue général; mais, après avoir terminé mon travail, j'ai trouvé dans le Tome VI, 1re série, de ce journal (1841, p. 319) une Note de Sturm, où l'auteur dit notamment : « On peut, en général, déterminer la courbe qu'il faut faire rouler sur une droite pour qu'un certain point de cette courbe mobile décrive une autre courbe donnée par son équation différentielle. » Sturm n'est pas allé plus loin, mais il n'en a pas moins la priorité.

Quoi qu'il en soit, je crois que la méthode semi-géométrique et semi-analytique que je vais exposer, et qui me conduit à quelques applications curieuses, dont il serait facile d'augmenter le nombre, n'est pas sans présenter quelque intérêt.

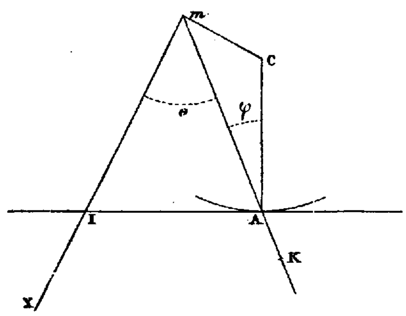
(¹) J'avais complètement perdu de vue cette Note, qui remonte à 1877 et qui est le résumé d'une conférence faite aux élèves de l'École Polytechnique en 1878.

2. Le rayon de courbure d'une courbe dont l'équation est donnée ne dépendant évidemment que d'une seule variable, on peut concevoir, lors même que cette équation serait une équation différentielle d'un ordre plus ou moins élevé, que l'on puisse prendre pour la variable la portion de la normale à la courbe limitée par une droite fixe. C'est cette droite que nous prendrons pour directrice du roulement de la courbe mobile.

3. Soient (*fig.* 1)

A le point de contact de la courbe cherchée avec la droite directrice;
C son centre de courbure;
$\rho =$ AC son rayon de courbure;
m le point de son plan qui doit décrire la courbe donnée;

Fig. 1.



R $= m$K le rayon de courbure de cette dernière courbe;
$r = m$A sa normale;
φ l'angle qu'elle forme avec AC;
$m\,x$ une droite de direction fixe dans le plan de la courbe mobile menée par le point m;
I son intersection avec la directrice du mouvement.

Nous considérerons comme constante la vitesse angulaire instantanée ω de la courbe mobile autour du point A.

Le centre des accélérations du plan de cette courbe coïncide avec le centre de courbure C [1].

L'accélération normale $\frac{\omega^2 r^2}{R}$ du point m, dirigée de m vers K, étant égale à la composante, suivant sa direction, de $\omega^2 Cm$, on a la relation

$$\frac{\omega^2 r^2}{R} = \omega^2(r - \rho\cos\varphi),$$

d'où

$$(1) \qquad \frac{1}{R} = \frac{1}{r} - \frac{\rho\cos\varphi}{r^2};$$

or on a

$$\widehat{Alx} = \theta + 90^\circ - \varphi,$$

d'où, pour l'angle de contingence de la courbe roulante,

$$d(\theta - \varphi)$$

et, en désignant par ds l'élément d'arc de cette courbe,

$$\rho = \frac{ds}{d(\theta - \varphi)}.$$

Si l'on remarque que $ds\cos\varphi = r\,d\theta$, l'équation (1) devient

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} - \frac{d\theta}{r\,d(\theta - \varphi)},$$

d'où

$$(2) \qquad \frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{r}{r - R}.$$

---

[1] En effet, si l'on désigne par u la vitesse du centre instantané A, la distance du centre des accélérations, qui est situé sur la direction de AC, à A est égale, comme on le sait, à $\frac{u}{\omega}$; mais, si $d\alpha$ désigne l'angle de contingence et ds l'élément d'arc de la courbe mobile, on a

$$u = \frac{ds}{dt}, \quad \omega = \frac{d\alpha}{dt},$$

d'où

$$\frac{u}{\omega} = a\frac{ds}{d\alpha} = \rho,$$

ce qu'il fallait établir.

4. Avant d'aller plus loin, nous ferons remarquer que l'équation (2) permet de résoudre facilement le problème proposé dans le cas où $r = m\mathrm{R}$ [1], m étant un nombre entier ou fractionnaire, positif ou négatif; on a, en effet,

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = -\frac{1}{m-1},$$

d'où, en choisissant la direction de Ox de manière que φ soit nul avec θ,

$$\varphi = -\frac{\theta}{m-1}. \tag{3}$$

---

[1] Prenons pour axe des x la droite à laquelle est limitée la normale r, et appelons α l'angle que forme la tangente à la courbe avec l'axe des x et ds l'élément d'arc. Nous avons, en admettant, pour fixer les idées, que la courbe tourne sa concavité vers l'axe des x,

$$\frac{1}{\mathrm{R}} = -\frac{d\alpha}{ds}, \quad y = -r\cos\alpha, \quad dy = -ds\sin\alpha,$$

et la relation $\mathrm{R} = mr$ devient

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\cos\alpha}{my}$$

ou

$$\sin\alpha\frac{d\alpha}{dy} = -\frac{\cos\alpha}{my}.$$

On tire de là

$$y = y_0\cos^m\alpha, \tag{a}$$

y_0 étant la valeur de y correspondant à $\alpha = 0$.

Si l'on remarque que

$$dx = -dy\,\mathrm{tang}\,\alpha,$$

l'équation (a) donne

$$x = my_0\int(\cos^{m-2}\alpha - \cos^m\alpha)\,dx. \tag{b}$$

L'intégration ne pourra s'effectuer que dans les conditions connues, en dehors desquelles il pourra être avantageux d'avoir recours au roulement d'une courbe auxiliaire pour tracer celle que l'on veut obtenir.

Il n'est pas besoin de faire remarquer que, en supposant $m = -1$, les équations (a) et (b), par l'élimination de α, conduisent très rapidement à celle de la chaînette.

On déduit de là

$$\frac{dr}{r\,d\theta} = \operatorname{tang}\varphi = -\operatorname{tang}\frac{\theta}{m-1},$$

puis, en désignant par r_0 la valeur de r correspondant à $\theta = 0$,

$$r = r_0 \cos^{m-1}\frac{\theta}{m-1}. \tag{4}$$

L'hypothèse de $m = 1$ est inadmissible d'après l'équation (4), ce qui était visible *a priori*.

Pour $m = 2$, on a

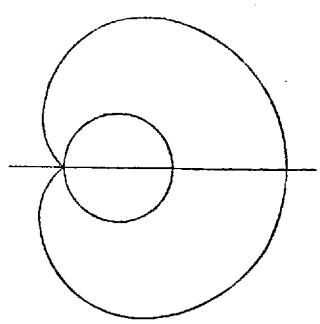
$$r = r_0 \cos\theta,$$

équation d'une circonférence d'un diamètre égal à r_0 rapportée à l'un des points de la courbe, ce qui devait être, puisque la relation $R = 2r$ caractérise la cycloïde.

Si $m = 3$, l'équation (4) donne

$$r = \frac{r_0}{2} + \frac{r_0}{2}\cos\theta,$$

Fig. 2.



ce qui représente une courbe que l'on tracera facilement (*fig.* 2) en décrivant d'abord un cercle d'un diamètre égal à $\frac{r_0}{2}$ et augmentant de cette longueur les rayons vecteurs partant d'un même point de sa circonférence.

Pour $m = -1$, on a

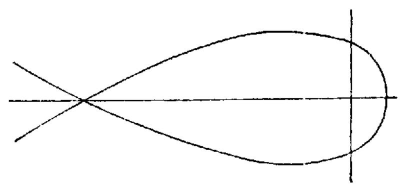
$$r = \frac{2r_0}{1 + \cos\theta},$$

équation d'une parabole rapportée à son axe et à son foyer; la courbe est ainsi une chaînette, comme on devait le prévoir, puisque cette courbe est caractérisée par la relation $r = -R$.

Pour $m = -2$, on a

$$r = \frac{r_0}{\cos^3 \dfrac{\theta}{3}},$$

Fig. 3.



équation qui représente une sorte de folium (*fig.* 3) dont la tangente forme avec le rayon vecteur un angle égal à $90^\circ + \frac{\theta}{3}$.

Nous ne pensons pas qu'il soit intéressant de pousser plus loin les applications de la formule (4).

5. Proposons-nous maintenant d'intégrer l'équation (2) en supposant, conformément à ce que nous avons dit dès le début, que R soit une fonction donnée de r. Nous avons

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = r\frac{d\varphi}{dr}\frac{dr}{r\,d\theta} = r\frac{d\varphi}{dr}\operatorname{tang}\varphi = -r\frac{d\log\cos\varphi}{dr},$$

et l'équation précitée devient

$$\frac{d\log\cos\varphi}{dr} = -\frac{1}{r - R},$$

d'où

$$(5) \qquad \cos\varphi = \sqrt{C}\, e^{-\int \frac{dr}{r-R}},$$

C étant une constante arbitraire positive.

On déduit de là

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{dr}{r\,d\theta} = \sqrt{\frac{e^{2\int \frac{dr}{r-R}}}{C} - 1}$$

d'où

$$(6) \qquad \theta = \int \frac{dr}{r\sqrt{\frac{e^{2\int \frac{dr}{r-R}}}{C} - 1}}.$$

6. Supposons que R soit constante ou que la courbe que l'on veut tracer soit un cercle. Il vient

$$(7) \qquad \theta = \int \frac{dr}{r\sqrt{\frac{(r-R)^2}{C} - 1}}.$$

Posons, en désignant par γ une autre constante substituée à C,

$$\sqrt{C} = \gamma R,$$

puis

$$(8) \qquad \frac{1}{\gamma R}(r - R) = u,$$

d'où

$$(9) \qquad r = R(1 + \gamma u).$$

L'équation (7) devient

$$(10) \qquad \theta = \gamma \int \frac{du}{(1+\gamma u)\sqrt{u^2 - 1}}.$$

Pour effectuer l'intégration, posons encore

$$u^2 - 1 = (u - z)^2,$$

d'où

$$u = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \tag{11}$$

et

$$du = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)dz.$$

L'équation (10) devient

$$\theta = -2\gamma \int \frac{dz}{2z + \gamma(z^2 + 1)}. \tag{12}$$

Nous avons maintenant trois cas à distinguer :

1° $\gamma^2 < 1$. L'équation ci-dessus donne

$$\begin{aligned}\theta &= -2 \int \frac{dz}{\left(z + \frac{1 - \sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma}\right)\left(z + \frac{1 + \sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma}\right)} \\ &= -\frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \int \frac{dz}{z + \frac{1 - \sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma}} - \int \frac{dz}{z + \frac{1 + \sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma}},\end{aligned}$$

d'où, en désignant par A une nouvelle constante arbitraire,

$$\frac{z + \frac{1}{\gamma} + a}{z + \frac{1}{\gamma} - a} = A e^{\frac{\theta}{a}}, \tag{13}$$

en posant, pour abréger,

$$a = \frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma}.$$

De l'équation (13) on tire

$$z = -\frac{1}{\gamma} + \frac{A e^{\frac{\theta}{a}} + 1}{A e^{\frac{\theta}{a}} - 1},$$

ou, en vertu des formules (8) et (11),

$$r = R + \frac{\gamma R}{2}\left\{ -\frac{1}{\gamma} + \frac{A e^{\frac{\theta}{a}} + 1}{A e^{\frac{\theta}{a}} - 1} - \frac{1}{-\frac{1}{\gamma} + \frac{A e^{\frac{\theta}{a}} + 1}{A e^{\frac{\theta}{a}} - 1}} \right\},$$

équation qu'il nous paraît superflu de discuter.

2° $\gamma^2 = 1$. L'équation (12) donne, dans ce cas,

$$z = -\frac{1}{\gamma} + \frac{2}{\theta + \varepsilon},$$

ε étant une constante arbitraire. On déduit de là

$$r = R + \frac{\gamma R}{2}\left(-\frac{1}{\gamma} + \frac{2}{\theta+\varepsilon} + \frac{1}{-\frac{1}{\gamma} + \frac{2}{\theta+\varepsilon}}\right).$$

3° $\gamma^2 > 1$. On a

$$z = -\frac{1}{\gamma} - \operatorname{tang}\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}(\theta + \varepsilon),$$

d'où

$$r = R - \frac{\gamma R}{2}\left[+\frac{1}{\gamma} + \operatorname{tang}\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{1}}(\theta+\varepsilon) + \frac{1}{\frac{\gamma}{1} + \operatorname{tang}\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}(\theta+\varepsilon)}\right].$$

On conviendra qu'il est plus simple d'employer le compas pour tracer une circonférence que de construire les courbes ci-dessus pour les faire rouler ensuite sur une droite.

7. Supposons maintenant que l'on veuille tracer la courbe méridienne de la surface de révolution dont la moyenne courbure est constante et égale à $\frac{1}{K}$. Nous aurons, en prenant pour droite directrice l'axe de la surface,

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{r} = \frac{1}{K},$$

d'où

$$\frac{1}{r - R} = \frac{r - K}{r(r - 2K)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r - 2K}\right).$$

La formule (6) nous donne alors

$$\theta = \int \frac{dr}{r\sqrt{\frac{r(r-2K)}{C} - 1}} = \sqrt{C}\int \frac{dr}{r\sqrt{r(r-2K) - C}}.$$

Si l'on pose

$$z = \frac{1}{r},$$

on trouve

$$\theta = -\sqrt{C}\int \frac{dz}{\sqrt{1 + \frac{K^2}{C} - \left(z\sqrt{C} + \frac{K}{\sqrt{C}}\right)^2}},$$

d'où, en désignant par ε une constante arbitraire,

$$\theta + \varepsilon = \arc\cos \frac{z\sqrt{C} + \frac{K}{\sqrt{C}}}{\sqrt{1 + \frac{K^2}{C}}}$$

et

$$r = \frac{-\frac{C}{K}}{1 - \sqrt{1 + \frac{C}{K^2}}\cos(\theta + \varepsilon)}.$$

En choisissant convenablement la direction de l'axe mx, on peut faire en sorte que $\varepsilon = 180°$, et alors il vient

$$r = \frac{-\frac{C}{K}}{1 + \sqrt{1 + \frac{C}{K^2}}\cos\theta}.$$

On voit ainsi que la courbe donnée peut être décrite par le foyer d'une conique qui roule sur une droite, théorème auquel Delaunay est arrivé synthétiquement (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. VI, 1re série, p. 309).

Pour que r soit positif, ce qu'exige la nature de la question, il faut que C et K soient de signes contraires. Si K est positif et C négatif, la courbe roulante est une hyperbole. Si K est négatif, la courbe roulante est une ellipse.

Enfin, si K est infini, $\frac{C}{K}$ restant fini, la courbe roulante est une parabole dont le foyer, comme on devait le prévoir, décrit une chaînette.

8. La courbe élastique rapportée à deux axes rectangulaires est représentée en général par l'équation

$$\frac{1}{R} = ay + bx + c,$$

a, b, c étant des constantes.

En choisissant convenablement la direction des axes et la position de l'origine, cette équation se ramène à la suivante :

$$\frac{1}{R} = ay. \tag{14}$$

Soient α l'angle que forme la tangente au point (x, y) avec l'axe des x pris pour droite directrice, ds l'élément d'arc de la courbe donnée; nous avons

$$\frac{1}{R} = -\frac{d\alpha}{ds}, \quad \frac{dy}{ds} = -\sin\alpha, \quad y = -r\cos\alpha,$$

par suite

$$\frac{d\alpha}{ds} = -ay, \tag{15}$$

d'où

$$\frac{d^2\alpha}{ds^2} = a\sin\alpha.$$

En multipliant par $d\alpha$, intégrant et désignant par m une constante, on trouve

$$\frac{d\alpha^2}{ds^2} = 2a(m - \cos\alpha). \tag{16}$$

La constante m se déterminera par la condition que cette équation et l'équation (15), mise sous la forme

$$\frac{d\alpha}{ds} = ar\cos\alpha, \tag{15'}$$

donneront les mêmes valeurs de $\frac{d\alpha}{ds}$ pour une valeur déterminée α_0 de α correspondant à $r = r_0$, d'où

$$m = \cos\alpha_0 + \frac{ar_0^2}{2}\cos^2\alpha_0. \tag{17}$$

Les équations (16) et (15'), qui reviennent aux suivantes,

$$\frac{1}{R^2} = 2a(m - \cos\alpha),$$
$$\frac{1}{R} = -ar\cos\alpha,$$

donnent, par l'élimination de $\cos\alpha$,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} - \sqrt{\frac{1}{r^2} + 2am},$$

le signe $+$ du radical n'étant pas admissible, puisque $\frac{1}{R}$ doit s'annuler avec a.

On déduit de là

$$\frac{1}{r-R} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+2amr^2}}\right).$$

On peut toujours supposer que a est positif, car autrement il suffirait de changer le sens des y positifs. On peut d'ailleurs choisir α_0 de manière que m soit positif. Soit donc

$$2am = \frac{1}{K^2};$$

nous aurons

$$\int \frac{dr}{r-R} = \log r - \int \frac{r\,dr}{r^2\sqrt{1+\frac{r^2}{K^2}}}.$$

Si l'on pose

$$1 + \frac{r^2}{K^2} = u^2,$$

il vient

$$\int \frac{r\,dr}{r^2\sqrt{1+\frac{r^2}{K^2}}} = \int \frac{du}{u^2-1} = \frac{1}{2}\log\frac{u-1}{u+1} = \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{1+\frac{r^2}{K^2}}-1}{\sqrt{1+\frac{r^2}{K^2}}+1},$$

par suite

$$e^{2\int \frac{dr}{r-R}} = r^2\frac{\sqrt{1+\frac{r^2}{K^2}}-1}{\sqrt{1+\frac{r^2}{K^2}}+1} = K\left(\sqrt{1+\frac{r^2}{K^2}}-1\right)^2.$$

L'équation (6) nous donne alors

$$\theta = \int \frac{dr}{r\sqrt{\frac{K^2}{C}\left(\sqrt{1+\frac{r^2}{K^2}}-1\right)^2-1}},$$

expression que l'on peut mettre sous cette forme plus simple,

$$(16)\qquad \theta = \frac{1}{2}\int \frac{dr^2}{r^2\sqrt{h^2\left(\sqrt{1+\frac{r^2}{K^2}}-1\right)^2-1}},$$

en remplaçant par h^2 le coefficient arbitraire $\frac{K^2}{C}$, qui doit être essentiellement positif.

Si, en désignant par v une nouvelle variable auxiliaire, nous posons

$$\sqrt{1+\frac{r^2}{K^2}}-1 = v,$$

d'où

$$r^2 = (v^2+2v)K^2,$$

la formule (16) devient

$$\theta = \int \frac{(v+1)\,dv}{v(v+2)\sqrt{h^2v^2-1}} = \int \frac{v\,dv}{v^2\sqrt{h^2v^2-1}} - \int \frac{dv}{v(v+2)\sqrt{h^2v^2-1}},$$

expression que l'on sait intégrer, mais qui conduit à un résultat trop compliqué pour qu'il nous paraisse utile de l'écrire.

9. Supposons maintenant que la courbe donnée soit la méridienne de la surface capillaire de révolution. Nous prendrons pour droite directrice la perpendiculaire en un point quelconque de l'axe comprise dans le plan de la section considérée.

L'équation de la courbe dont il s'agit peut se mettre sous la forme suivante,

$$(17)\qquad \frac{1}{R}+\frac{1}{r} = 3ay+2b,$$

a et b étant des constantes.

Nous avons, en conservant les notations du numéro précédent,

$$dy = -\,ds\sin\alpha,\quad \frac{1}{R} = -\frac{d\alpha}{ds} = \sin\alpha\,\frac{d\alpha}{dy},$$

par suite

$$y \sin\alpha\, d\alpha - \cos\alpha\, dy = (3ay^2 + 2by)dy,$$

d'où, en désignant par m une constante arbitraire,

$$-y\cos\alpha = ay^3 + by^2 + m$$

ou encore

$$r\cos^2\alpha = -ar^3\cos^3\alpha + br^2\cos^2\alpha + m. \tag{18}$$

L'équation (17), mise sous la forme

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{r} = -3ar\cos\alpha + 2b, \tag{19}$$

et l'équation (18), par l'élimination de $\cos\alpha$, conduiront à une équation du troisième degré en $\frac{1}{R}$. On voit ainsi que, en général, θ dépendra d'une transcendante très complexe.

Nous nous bornerons à considérer la branche de la famille des courbes en question, pour laquelle m est nul.

L'équation (18) donne alors

$$-ar\cos\alpha = \frac{1}{r} + b,$$

et l'équation (19)

$$\frac{1}{R} = \frac{2}{r} - b.$$

On a, par suite,

$$\frac{1}{r-R} = \frac{2-br}{(1-br)r} = \frac{2}{r} + \frac{b}{1-br},$$

$$e^{2\int\frac{dr}{r-R}} = \frac{r^4}{(1-br)^2},$$

et l'équation (6) devient

$$\theta = \int \frac{dr}{r\sqrt{\frac{r^4}{C(1-br)^2} - 1}}.$$

L'intégration ne pourra s'effectuer que dans certains cas particuliers, notamment lorsque l'on aura $b = 0$, ce qui n'est pas étonnant puisque alors on aura $R = \frac{r}{2}$, cas qui a été étudié plus haut.