JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GUIDO WEICHOLD

Solution du cas irréductible, c'est-à-dire du problème consistant à exprimer les racines d'une équation complète du troisième degré comme fonctions algébriques, finies et numériquement calculables sous forme finie, des coefficients de cette équation, dans le cas où ces racines sont toutes à la fois réelles et au moins une d'elles commensurable

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 5 (1879), p. 293-318.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1879_3_5__293_0>

Solution du cas irréductible, c'est-à-dire du problème consistant à exprimer les racines d'une équation complète du troisième degré comme fonctions algébriques, finies et numériquement calculables sous forme finie, des coefficients de cette équation, dans le cas où ces racines sont toutes à la fois réelles et au moins une d'elles commensurable [*];

PAR M. GUIDO WEICHOLD,
Professeur à Zittau (Saxe).

En désignant par a, b, c les racines de l'équation générale du troisième degré

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0, \tag{1}$$

---

[*] De cette définition du problème du cas irréductible il résulte évidemment :

1° Que la résolution d'une pareille équation au moyen des fonctions trigonométriques n'est nullement une solution du cas irréductible, pas plus que la division d'un angle en trois parties égales au moyen d'un rapporteur ne serait la solution du problème de la trisection d'un angle, puisque cette résolution revient en dernier lieu à la consultation de tables, où les racines de toutes les équations particulières de ce genre sont calculées d'avance *par approximation* et spécifiées en face de chaque cas particulier. Les racines de l'équation proposée ainsi exprimées au moyen des fonctions trigonométriques ne sont d'ailleurs ni fonctions algébriques, ni fonctions finies des coefficients de cette équation;

2° Que le cas où les trois racines de l'équation proposée sont toutes incommensurables à la fois n'entre pas dans le problème du cas irréductible, puisqu'il serait aussi absurde d'exiger que l'on exprimât ces racines numériquement exactes et sous forme et par θ et θ' les racines cubiques complexes [*] de l'unité, c'est-à-dire

$$\theta = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \quad \theta' = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

on a, en posant

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
a + \theta b + \theta' c &= \frac{(2a-b-c)+(b-c)\sqrt{-3}}{2} = \rho,\\
a + \theta' b + \theta c &= \frac{(2a-b-c)-(b-c)\sqrt{-3}}{2} = \rho',\\
bc + \theta ac + \theta' ab &= \frac{(2bc-ac-ab)-a(b-c)\sqrt{-3}}{2} = \rho_1,\\
bc + \theta' ac + \theta ab &= \frac{(2bc-ac-ab)+a(b-c)\sqrt{-3}}{2} = \rho'_1,
\end{aligned}\right.$$

et en ayant égard aux relations connues, savoir :

$$a+b+c = -\mathrm{A}, \quad ab+ac+bc = \mathrm{B}, \quad abc = -\mathrm{C}.$$

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}
a &= \frac{-\mathrm{A}+\rho+\rho'}{3} = -\frac{\rho_1-\rho'_1}{\rho-\rho'} = -\frac{2\mathrm{B}-(\rho_1+\rho'_1)}{2\mathrm{A}+(\rho+\rho')} = -\frac{3\mathrm{C}}{\mathrm{B}+(\rho_1+\rho'_1)},\\
b &= \frac{-\mathrm{A}+\theta'\rho+\theta\rho'}{3} = -\frac{\theta'\rho_1-\theta\rho'_1}{\theta'\rho-\theta\rho'}\\
&= -\frac{2\mathrm{B}-(\theta'\rho_1+\theta\rho'_1)}{2\mathrm{A}+(\theta'\rho+\theta\rho')} = -\frac{3\mathrm{C}}{\mathrm{B}+(\theta'\rho_1+\theta\rho'_1)},\\
c &= \frac{-\mathrm{A}+\theta\rho+\theta'\rho'}{3} = -\frac{\theta\rho_1-\theta'\rho'_1}{\theta\rho-\theta'\rho'}\\
&= -\frac{2\mathrm{B}-(\theta\rho_1+\theta'\rho'_1)}{2\mathrm{A}+(\theta\rho+\theta'\rho')} = -\frac{3\mathrm{C}}{\mathrm{B}+(\theta\rho_1+\theta'\rho'_1)},
\end{aligned}\right.$$

---

finie que de vouloir exiger que l'on extraie une racine d'un nombre entier positif qui n'est pas une puissance exacte du même degré d'un autre nombre entier exactement et sous forme finie, et puisque la détermination approximative des valeurs de ces racines incommensurables peut être effectuée par la formule de Cardan, en développant les racines cubiques qu'elle renferme en séries convergentes.

[*] Par conséquent, ρ, ρ', ρ_1, ρ'_1 sont des fonctions complexes *conjuguées* de a, b, c, si l'on entend par quantité complexe toute quantité composée de deux parties, dont l'une est réelle et l'autre imaginaire.

ou, collectivement,

$$
(4)\quad
\left\{
\begin{aligned}
\left.\begin{matrix}a\\ b\\ c\end{matrix}\right\}
&= \frac{-A+\left.\begin{matrix}1\\ \theta'\\ \theta\end{matrix}\right\}\rho+\left.\begin{matrix}1\\ \theta\\ \theta'\end{matrix}\right\}\rho'}{3}
= -\frac{\left.\begin{matrix}1\\ \theta'\\ \theta\end{matrix}\right\}\rho_1-\left.\begin{matrix}1\\ \theta\\ \theta'\end{matrix}\right\}\rho'_1}{\left.\begin{matrix}1\\ \theta'\\ \theta\end{matrix}\right\}\rho-\left.\begin{matrix}1\\ \theta\\ \theta'\end{matrix}\right\}\rho'}\\
&= -\frac{2B-\left.\begin{matrix}1\\ \theta'\\ \theta\end{matrix}\right\}\rho_1-\left.\begin{matrix}1\\ \theta\\ \theta'\end{matrix}\right\}\rho'_1}{2A+\left.\begin{matrix}1\\ \theta'\\ \theta\end{matrix}\right\}\rho+\left.\begin{matrix}1\\ \theta\\ \theta'\end{matrix}\right\}\rho'}
= -\frac{3C}{B+\left.\begin{matrix}1\\ \theta'\\ \theta\end{matrix}\right\}\rho'+\left.\begin{matrix}1\\ \theta\\ \theta'\end{matrix}\right\}\rho'_1}.
\end{aligned}
\right.
$$

Entre les quatre quantités auxiliaires ρ, ρ', ρ_1, ρ'_1 et les coefficients A, B, C de l'équation proposée, il existe les sept relations suivantes :

(5) I. $\rho\rho' = A^2 - 3B = N$,

(6) II. $\rho_1\rho'_1 = B^2 - 3AC = N'$,

(7) III. $\rho\rho'_1 + \rho'\rho_1 = AB - 9C = P$,

(8) IV. $\rho^3 + \rho'^3 = 3P - 2AN = -2A^3 + 9AB - 27C$,

(9) V. $\rho_1^3 + \rho_1'^3 = -3CP + 2BN' = 2B^3 - 9ABC + 27C^2$,

(10) VI. $\rho^2\rho_1 + \rho'^2\rho'_1 = 3N' - BN = AP - 2BN = -A^2B + 6B^2 - 9AC$,

(11) VII. $\rho_1^2 + \rho'\rho_1'^2 = AN' + 3CN = 2AN' - BP = AB^2 - 6A^2C + 9BC$,

N, N', P étant des abréviations pour $A^2 - 3B$, $B^2 - 3AC$, $AB - 9C$.

En effet, on a

$$
(12)\quad
\left\{
\begin{aligned}
\rho\rho' &= \theta\rho.\theta'\rho' = \theta'\rho.\theta\rho' = (a+\theta b+\theta' c)(a+\theta' b+\theta c)\\
&= (b+\theta a+\theta' c)(b+\theta' a+\theta c)\\
&= (c+\theta a+\theta' b)(c+\theta' a+\theta b)\\
&= \tfrac{1}{4}\{[(a-b)+(a-c)]^2+3(b-c)]^2\}\\
&= \tfrac{1}{4}\{[(b-c)-(a-b)]^2+3(a-c)^2\}\\
&= \tfrac{1}{4}\{[(a-c)+(b-c)]^2+3(a-b)^2\}\,[*]\\
&= (a-b)^2-(a-b)(a-c)+(a-c)^2\\
&= (b-c)^2+(b-c)(a-b)+(a-b)^2\\
&= (a-c)^2-(a-c)\;b-c)+(b-c)^2\\
&= (a+b^2+c^2)-(ab+ac+bc) = A^2-3B,
\end{aligned}
\right.
$$

[*] Ces expressions montrent que N et N' peuvent être réduits à la forme

$$\alpha^2+3\beta^2 = \left(\alpha+\beta\sqrt{-3}\right)\left(\alpha-\beta\sqrt{-3}\right)$$

$$(13)\left\{\begin{aligned}
\rho_1\rho'_1 &= \theta\rho_1\,\theta'\rho'_1 = \theta'\rho_1\theta\rho'_1 = (bc+\theta ab+\theta' ac)(bc+\theta' ab+\theta ac)\\
&= (ac+\theta ab+\theta' bc)(ac+\theta' ab+\theta bc)\\
&= (ab+\theta ac+\theta' bc)(ab+\theta' ac+\theta bc)\\
&= \tfrac{1}{4}\{[b(a-c)+c(a-b)]^2+3a^2(b-c)^2\}\\
&= \tfrac{1}{4}\{[c(a-b)-a(b-c)]^2+3b^2(a-c)^2\}\\
&= \tfrac{1}{4}\{[a(b-c)+b(a-c)]^2+3c^2(a-b)^2\}\text{[*]}\\
&= b^2(a-c)^2-bc(a-b)(a-c)+c^2(a-b)^2\\
&= c^2(a-b)^2+ac(a-b)(b-c)+a^2(b-c)^2\\
&= a^2(b-c)^2-ab(b-c)(a-c)+b^2(a-c)^2\\
&= a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2-abc(a+b+c)=B^2-3AC,
\end{aligned}\right.$$

$$(14)\left\{\begin{aligned}
\rho\rho'_1+\rho'\rho_1 &= \theta\rho.\theta'\rho'_1+\theta'\rho'.\theta\rho_1 = \theta'\rho.\theta\rho'_1+\theta\rho'.\theta'\rho_1\\
&= (a+\theta b+\theta' c)(bc+\theta' ac+\theta ab)\\
&\quad +(a+\theta' b+\theta c)(bc+\theta ac+\theta' ab)\\
&= (c+\theta a+\theta' b)(ab+\theta' bc+\theta ac)\\
&\quad +(c+\theta' a+\theta b)(ab+\theta bc+\theta' ac)\\
&= (b+\theta c+\theta' a)(ac+\theta' ab+\theta bc)\\
&\quad +(b+\theta' c+\theta a)(ac+\theta ab+\theta' bc)\\
&= 6abc+(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2)(\theta+\theta')\\
&= 9abc-(ab+ac+bc)(a+b+c)=AB-9C,
\end{aligned}\right.$$

$$(15)\left\{\begin{aligned}
\rho^3+\rho'^3 &= (\rho+\rho')(\theta\rho+\theta'\rho')(\theta'\rho+\theta\rho')\\
&= (2a-b-c)(2b-a-c)(2c-a-b)\\
&= [(a-b)+(a-c)][(a-c)+(b-c)][(a-b)-(b-c)]\\
&= 2(a^3+b^3+c^3)-3(ab+ac+bc)(a+b+c)+27abc\\
&= -2A^3+9AB-27C=3P-2AN,
\end{aligned}\right.$$

---

quand les racines a, b, c sont réelles et entières, à la forme

$$\frac{\alpha^2+3\beta^2}{\gamma^2}=\left(\frac{\alpha+\beta\sqrt{-3}}{\gamma}\right)\left(\frac{\alpha-\beta\sqrt{-3}}{\gamma}\right)$$

quand elles sont réelles et fractionnaires, et enfin à la forme

$$\frac{\alpha^2+3\beta^2\lambda}{\gamma^2}=\frac{\alpha+\beta\sqrt{\lambda}\sqrt{-3}}{\gamma}\times\frac{\alpha-\beta\sqrt{\lambda}\sqrt{-3}}{\gamma}$$

quand elles sont réelles et une d'elles rationnelle et fractionnaire, et les deux autres des nombres irrationnels de la forme $\dfrac{m+n\sqrt{p}}{q}$ et $\dfrac{m-n\sqrt{p}}{q}$, α, β, γ, m et n étant des nombres entiers, et x, p et q des nombres entiers positifs.

[*] *Voir* la note de la page précédente.

$$(16)\left\{\begin{aligned}
\rho_1^3 + \rho_1'^3 &= (\rho_1 + \rho_1')(\theta\rho_1 + \theta'\rho_1')(\theta'\rho_1 + \theta\rho_1')\\
&= (2bc - ab - ac)(2ac - ab - bc)(2ab - ac - bc)\\
&= [b(a-c) + c(a-b)][a(b-c) - c(a-b)]\\
&\quad \times [a(b-c) + b(a-c)]\\
&= 2(a^3b^3 + a^3c^3 + b^3c^3) - 3abc(ab + ac + bc)\\
&\quad \times (a + b + c) + 27a^2b^2c^2\\
&= 2B^3 - 9ABC + 27C^2 = -3CP + 2BN'
\end{aligned}\right.$$

$$(17)\left\{\begin{aligned}
\rho^2\rho_1 + \rho'^2\rho_1' &= (\theta\rho)^2(\theta\rho_1) + (\theta'\rho')^2(\theta'\rho_1') = (\theta'\rho)^2(\theta'\rho_1) + (\theta\rho')^2(\theta\rho_1')\\
&= (a + \theta b + \theta' c)^2(bc + \theta' ab + \theta ac)\\
&\quad + (a + \theta' b + \theta c)^2(bc + \theta ab + \theta' ac)\\
&= (c + \theta a + \theta' b)^2(ab + \theta' ac + \theta bc)\\
&\quad + (c + \theta' a + \theta b)^2(ab + \theta ac + \theta' bc)\\
&= (b + \theta c + \theta' a)^2(ac + \theta' bc + \theta ab)\\
&\quad + (b + \theta' c + \theta a)^2(ac + \theta bc + \theta' ab)\\
&= -abc(a + b + c) + 4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)\\
&\quad - (a^2 + b^2 + c^2)(ab + ac + bc)\\
&= -9AC + 6B^2 - A^2B = 3N' - BN = AP - 2BN,
\end{aligned}\right.$$

$$(18)\left\{\begin{aligned}
\rho\rho_1^2 + \rho'\rho_1'^2 &= (\theta\rho)(\theta\rho_1)^2 + (\theta'\rho')(\theta'\rho_1')^2 = (\theta'\rho)(\theta'\rho_1)^2 + (\theta\rho')(\theta\rho_1')^2\\
&= (a + \theta b + \theta' c)(bc + \theta ac + \theta' ab)^2\\
&\quad + (a + \theta' b + \theta c)(bc + \theta' ac + \theta ab)^2\\
&= (c + \theta a + \theta' b)(ab + \theta bc + \theta' ac)^2\\
&\quad + (c + \theta' a + \theta b)(ab + \theta' bc + \theta ac)^2\\
&= (b + \theta c + \theta' a)(ac + \theta' bc + \theta ab)^2\\
&\quad + (b + \theta' c + \theta a)(ac + \theta bc + \theta' ab)^2\\
&= -abc(ab + ac + bc) + 4abc(a^2 + b^2 + c^2)\\
&\quad - (a + b + c)(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)\\
&= 9BC - 6A^2C + AB^2 = AN' - 3CN = 2AN' - BP.
\end{aligned}\right.$$

De ces relations, on déduit

$$(19)\left\{\begin{aligned}
\rho\rho_1' - \rho'\rho_1 &= (a + \theta b + \theta' c)(bc + \theta' ac + \theta ab)\\
&\quad - (a + \theta' b + \theta c)(bc + \theta ac + \theta' ab)\\
&= (a-b)(a-c)(b-c)\sqrt{-3} = \sqrt{(\rho\rho_1' + \rho'\rho_1)^2 - 4\rho\rho'\rho_1\rho_1'}\\
&= \sqrt{P^2 - 4NN'} = S\sqrt{-3};
\end{aligned}\right.$$

en écrivant, pour abréger,

$$\sqrt{\frac{4NN'-P^2}{3}}=S,$$

$$(20)\left\{\begin{aligned}\rho^3-\rho'^3&=(\rho-\rho')(\theta\rho-\theta'\rho')(\theta'\rho-\theta\rho')\\&=3(a-b)(a-c)(b-c)\sqrt{-3}=\sqrt{(\rho^3+\rho'^3)^2-4\rho^3\rho'^3}\\&=\sqrt{(3P-2AN)^2-4N^3}=\sqrt{9P^2-12APN+4A^2N^2-4N^3}\\&=\sqrt{9P^2-4N(N^2-A^2N+3AP)}=\sqrt{9P^2-4N.9N'}\\&=3\sqrt{P^2-4NN'}=3S\sqrt{-3},\end{aligned}\right.$$

$$(21)\left\{\begin{aligned}\rho_1^3-\rho_1'^3&=(\rho_1-\rho_1')(\theta\rho_1-\theta'\rho_1')(\theta'\rho_1-\theta\rho_1')\\&=-3abc(a-b)(a-c)(b-c)\sqrt{-3}=\sqrt{(\rho_1^3+\rho_1'^3)^2-4\rho_1^3\rho_1'^3}\\&=\sqrt{(-3CP+2BN')^2-4N'^3}\\&=\sqrt{9C^2P^2-12BCN'P+4B^2N'^2-4N'^3}\\&=\sqrt{9C^2P^2-4N'(N'^2-B^2N'+3BCP)}\\&=\sqrt{9C^2P^2-4N.9C^2N}=3C\sqrt{P^2-4NN'}=3CS\sqrt{-3},\end{aligned}\right.$$

$$(22)\left\{\begin{aligned}\rho^2\rho_1-\rho'^2\rho_1'&=(a+\theta b+\theta'c)^2(bc+\theta'ab+\theta ac)\\&\quad-(a+\theta'b+\theta c)^2(bc+\theta ab+\theta'ac)\\&=(a+b+c)(a-b)(a-c)(b-c)\sqrt{-3}\\&=\sqrt{(\rho^2\rho_1+\rho'^2\rho_1')^2-4\rho^2\rho'^2\rho_1\rho_1'}=\sqrt{(AP-2BN)^2-4N^2N'}\\&=\sqrt{A^2P^2-4ABPN+4B^2N^2-4N^2N'}\\&=\sqrt{A^2P^2-4N(NN'-B^2N+ABP)}=\sqrt{A^2P^2-4N.A^2N'}\\&=A\sqrt{P^2-4NN'}=AS\sqrt{-3},\end{aligned}\right.$$

$$(23)\left\{\begin{aligned}\rho\rho_1^2-\rho'\rho_1'^2&=(a+\theta b+\theta'c)(bc+\theta'ab+\theta ac)^2\\&\quad-(a+\theta'b+\theta c)(bc+\theta ab+\theta'ac)^2\\&=(ab+ac+bc)(a-b)(a-c)(b-c)\sqrt{-3}\\&=\sqrt{(\rho\rho_1^2+\rho'\rho_1'^2)^2-4\rho\rho'\rho_1^2\rho_1'^2}=\sqrt{(2AN'-BP)^2-4NN'^2}\\&=\sqrt{4A^2N'^2-4ABPN'+B^2P^2-4NN'^2}\\&=\sqrt{B^2P^2-4N'(NN'-A^2N'+ABP)}=\sqrt{B^2P^2-4N'.B^2N}\\&=B\sqrt{P^2-4NN'}=BS\sqrt{-3},\end{aligned}\right.$$

d'où

$$(24)\left\{\begin{aligned}\rho\rho_1'&=\tfrac{1}{2}[(\rho\rho_1'+\rho'\rho_1)+(\rho\rho_1'-\rho'\rho_1)]\\&=\tfrac{1}{2}(P+\sqrt{P^2-4NN'})=\tfrac{1}{2}(P+S\sqrt{-3}),\end{aligned}\right.$$

$$(25)\left\{\begin{aligned} \rho_1\rho' &= \tfrac{1}{2}[(\rho\rho'_1 + \rho'\rho_1) - (\rho\rho'_1 - \rho'\rho_1) \\ &= \tfrac{1}{2}(\mathrm{P} - \sqrt{\mathrm{P}^2 - 4\mathrm{NN}'}) = \tfrac{1}{2}(\mathrm{P} - \mathrm{S}\sqrt{-3}),\end{aligned}\right.$$

$$(26)\qquad \rho^3 = \tfrac{1}{2}[(\rho^3 + \rho'^3) + (\rho^3 - \rho'^3)] = \tfrac{1}{2}(3\mathrm{P} - 2\mathrm{AN} + 3\mathrm{S}\sqrt{-3}),$$

$$(27)\qquad \rho'^3 = \tfrac{1}{2}[(\rho^3 + \rho'^3) - (\rho^3 - \rho'^3)] = \tfrac{1}{2}(3\mathrm{P} - 2\mathrm{AN} - 3\mathrm{S}\sqrt{-3}),$$

$$(28)\qquad \rho_1^3 = \tfrac{1}{2}[(\rho_1^3 + \rho'^3_1) + (\rho_1^3 - \rho'^3_1)] = \tfrac{1}{2}(-3\mathrm{CP} + 2\mathrm{BN}' + 3\mathrm{CS}\sqrt{-3}),$$

$$(29)\qquad \rho' = \tfrac{1}{2}[(\rho_1^3 + \rho'^3_1) - (\rho_1^3 - \rho'^3_1)] = \tfrac{1}{2}(-3\mathrm{CP} + 2\mathrm{BN}' - 3\mathrm{CS}\sqrt{-3}),$$

$$(30)\left\{\begin{aligned} \rho^2\rho_1 &= \tfrac{1}{2}[(\rho^2\rho_1 + \rho'^2\rho'_1) + (\rho^2\rho_1 - \rho'^2\rho'_1)] \\ &= \tfrac{1}{2}(3\mathrm{N}' - \mathrm{BN} + \mathrm{A}\sqrt{\mathrm{P}^2 - 4\mathrm{NN}'}) = \tfrac{1}{2}(\mathrm{AP} - 2\mathrm{BN} + \mathrm{AS}\sqrt{-3}),\end{aligned}\right.$$

$$(31)\left\{\begin{aligned} \rho'^2\rho'_1 &= \tfrac{1}{2}[(\rho^2\rho_1 + \rho'^2\rho'_1) - (\rho^2\rho_1 - \rho'^2\rho'_1)] \\ &= \tfrac{1}{2}(3\mathrm{N}' - \mathrm{BN} - \mathrm{A}\sqrt{\mathrm{P}^2 - 4\mathrm{NN}'}) = \tfrac{1}{2}(\mathrm{AP} - 2\mathrm{BN} - \mathrm{AS}\sqrt{-3}),\end{aligned}\right.$$

$$(32)\left\{\begin{aligned} \rho\rho_1^2 &= \tfrac{1}{2}[(\rho\rho_1^2 + \rho'\rho'^2_1) + (\rho\rho_1^2 - \rho'\rho'^2_1)] \\ &= \tfrac{1}{2}(\mathrm{AN}' - 3\mathrm{CN} + \mathrm{B}\sqrt{\mathrm{P}^2 - 4\mathrm{NN}'}) = \tfrac{1}{2}(2\mathrm{AN}' - \mathrm{BP} + \mathrm{BS}\sqrt{-3}),\end{aligned}\right.$$

$$(33)\left\{\begin{aligned} \rho'\rho'^2_1 &= \tfrac{1}{2}[(\rho\rho_1^2 + \rho'\rho'^2_1) - (\rho\rho_1^2 - \rho'\rho'^2_1)] \\ &= \tfrac{1}{2}(\mathrm{AN}' - 3\mathrm{CN} - \mathrm{B}\sqrt{\mathrm{P}^2 - 4\mathrm{NN}'}) = \tfrac{1}{2}(2\mathrm{AN}' - \mathrm{BP} - \mathrm{BS}\sqrt{-3}).\end{aligned}\right.$$

Les valeurs de $\rho\rho'_1$, $\rho'\rho_1$, ρ^3, ρ'^3, ρ_1^3, ρ'^3_1, $\rho^2\rho_1$, $\rho'^2\rho'_1$, $\rho\rho_1^2$, $\rho'\rho'^2_1$ sont complexes (*voir* la note de la p. 1), quand a, b, c sont simultanément réelles, comme le montre l'expression

$$\mathrm{S} = (a-b)(a-c)(b-c) = \sqrt{\frac{4\mathrm{NN}' - \mathrm{P}^2}{3}}.$$

Donc, si l'on voulait déterminer les valeurs de ρ, ρ', ρ_1, ρ'_1 par l'extraction de la racine cubique de

$$\begin{aligned} \rho^3 &= \tfrac{1}{2}(3\mathrm{P} - 2\mathrm{AN} + 3\mathrm{S}\sqrt{-3}), \\ \rho'^3 &= \tfrac{1}{2}(3\mathrm{P} - 2\mathrm{AN} - 3\mathrm{S}\sqrt{-3}), \\ \rho_1^3 &= \tfrac{1}{2}(-3\mathrm{CP} + 2\mathrm{BN}' + 3\mathrm{CS}\sqrt{-3}), \\ \rho'^3_1 &= \tfrac{1}{2}(-3\mathrm{CP} + 2\mathrm{BN}' + 3\mathrm{CS}\sqrt{-3}),\end{aligned}$$

respectivement, on tomberait sur le cas irréductible, c'est-à-dire on aurait à extraire la racine cubique de quantités complexes, ce qu'on ne sait pas encore effectuer sous forme finie et par des opérations élémentaires. Mais les valeurs de ces quatre quantités auxiliaires ρ, ρ',

ρ_1, ρ'_1 peuvent être déterminées sous forme finie par une opération élémentaire *autre* que l'extraction de la racine cubique, quand les racines a, b, c sont toutes réelles et une d'elles au moins commensurable, savoir par la détermination d'un facteur complexe commun à deux quantités complexes toutes les deux, ou l'une au moins.

En effet, en observant que

I. $\rho\rho'$ et $\rho\rho'_1$ ont le facteur complexe ρ commun, de même que $\rho_1\rho'_1$ et $\rho'\rho_1$ le facteur ρ_1,
$\rho\rho'$ $\rho'\rho_1$ » » ρ' » » $\rho_1\rho'_1$ ρ'_1 » ρ'_1;

II. $\rho\rho'$ et ρ_1^3 ont le facteur complexe ρ commun, de même que $\rho_1\rho'_1$ et ρ_1^3 le facteur ρ_1,
$\rho\rho'$ ρ'^3 » » ρ' » » $\rho_1\rho'_1$ ρ'^3_1 » ρ'_1;

III. $\rho\rho'$ et $\rho^2\rho_1$ ont le facteur complexe ρ commun, de même que $\rho_1\rho'_1$ et $\rho^2\rho_1$ le facteur ρ_1,
$\rho\rho'$ $\rho'^2\rho'_1$ » » ρ' » » $\rho_1\rho'_1$ $\rho'^2\rho'_1$ » ρ'_1;

IV. $\rho\rho'$ et $\rho\rho_1^2$ ont le facteur complexe ρ commun, de même que $\rho_1\rho'_1$ et $\rho\rho_1^2$ le facteur ρ_1,
$\rho\rho'$ $\rho'\rho'^2_1$ » » ρ' » » $\rho_1\rho'_1$ $\rho'\rho'^2_1$ » ρ'_1;

V. $\rho\rho'_1$ et $\rho^2\rho_1$ ont le facteur complexe ρ commun, de même que $\rho'\rho_1$ et $\rho^2\rho_1$ le facteur ρ_1,
$\rho'\rho_1$ $\rho'^2\rho'_1$ » » ρ' » » $\rho\rho'_1$ $\rho'^2\rho'_1$ » ρ'_1;

VI. $\rho\rho'_1$ et $\rho\rho_1^2$ ont le facteur complexe ρ commun, de même que $\rho'\rho_1$ et $\rho\rho_1^2$ le facteur ρ_1,
$\rho'\rho_1$ $\rho'\rho'^2_1$ » » ρ' » » $\rho\rho'_1$ $\rho'\rho'^2_1$ » ρ'_1;

VII. $\rho\rho'_1$ et ρ^3 ont le facteur complexe ρ commun, de même que $\rho'\rho_1$ et ρ_1^3 le facteur ρ_1,
$\rho'\rho_1$ ρ'^3 » » ρ' » » $\rho\rho'_1$ ρ'^3_1 » ρ'_1;

VIII. $\rho\rho_1^2$ et ^{3} ont le fact. compl. ρ commun, de même que $\rho\rho_1^2$ et ρ_1^3 le fact. ρ_1^2, d'où $\rho_1 = \sqrt{\rho\rho_1^2 \mid \rho_1^3}$ [*]
$\rho'_1\rho'^2_1$ ρ'^3 » » ρ' » » $\rho'\rho'^2_1$ ρ'^3_1 » ρ'^2_1, » $\rho'_1 = \sqrt{\rho'\rho'^2_1 \mid \rho'^3_1}$

IX. $\rho^2\rho_1$ et ρ^3 ont le fact. compl. ρ^2, d'où $\rho = \sqrt{\rho^2\rho_1 \mid \rho^3}$, de même que $\rho^2\rho_1$ et ρ_1^3 le facteur ρ_1,
$\rho'^2\rho'_1$ ρ'^3 » » ρ'^2 » $\rho' = \sqrt{\rho'^2\rho'_1 \mid \rho'^3}$, » $\rho'^2\rho'_1$ ρ'^3_1 » ρ'_1;

X. $\rho^2\rho_1$ et $\rho\rho_1^2$ ont le facteur complexe $\rho\rho_1$, d'où $\rho = \dfrac{\rho^2\rho_1}{\rho^2\rho_1 \mid \rho\rho_1^2}$ et $\rho_1 = \dfrac{\rho\rho_1^2}{\rho^2\rho_1 \mid \rho\rho_1^2}$,
$\rho'^2\rho'_1$ $\rho'\rho'^2_1$ » » $\rho'\rho'_1$, » $\rho' = \dfrac{\rho'^2\rho'_1}{\rho'^2\rho' \mid \rho'\rho'^2_1}$ $\rho'_1 = \dfrac{\rho'\rho'^2_1}{\rho'^2\rho'_1 \mid \rho'\rho'^2_1}$,

il est évident qu'on peut déterminer ces quatre quantités ρ, ρ', ρ_1, ρ'_1 par la recherche de ce facteur commun, par quelques-unes des com-

[*] Le signe $\overline{\mid}$ désigne l'opération de la recherche du facteur complexe commun aux deux quantités, qui se trouvent de part et d'autre de ce signe, satisfaisant en même temps aux sept relations ci-dessus entre ρ, ρ', ρ_1, ρ'_1.

binaisons ci-dessus spécifiées, et satisfaisant en même temps aux sept relations entre ρ, ρ', ρ_1, ρ'_1 et A, B, C.

Au moyen du signe $\overline{\mid}$ on a, en remplaçant ρ, ρ', ρ_1, ρ'_1 dans les expressions des racines :

$$(35)\left\{\begin{aligned}
\left.\begin{matrix}a\\ b\\ c\end{matrix}\right\} &= \frac{-A+\left.\begin{matrix}1\\ \theta'\\ \theta\end{matrix}\right\}\overline{\rho'\mid\rho^3}+\left.\begin{matrix}1\\ \theta\\ \theta'\end{matrix}\right\}\overline{\rho\rho'\mid\rho'^3}}{3} = -\frac{\left.\begin{matrix}1\\ \theta'\\ \theta\end{matrix}\right\}\overline{\rho_1\rho'_1\mid\rho_1^3}-\left.\begin{matrix}1\\ \theta\\ \theta'\end{matrix}\right\}\overline{\rho_1\rho'_1\mid\rho_1'^3}}{\left.\begin{matrix}1\\ \theta'\\ \theta\end{matrix}\right\}\overline{\rho\rho'\mid\rho^3}-\left.\begin{matrix}1\\ \theta\\ \theta'\end{matrix}\right\}\overline{\rho\rho'\mid\rho_1^3}}\\
&= -\frac{2B-\left.\begin{matrix}1\\ \theta'\\ \theta\end{matrix}\right\}\overline{\rho_1\rho'_1\mid\rho_1^3}-\left.\begin{matrix}1\\ \theta\\ \theta'\end{matrix}\right\}\overline{\rho_1\rho'_1\mid\rho_1'^3}}{2A+\left.\begin{matrix}1\\ \theta'\\ \theta\end{matrix}\right\}\overline{\rho\rho'\mid\rho^3}+\left.\begin{matrix}1\\ \theta\\ \theta'\end{matrix}\right\}\overline{\rho\rho'\mid\rho'^3}} = -\frac{3C}{B+\left.\begin{matrix}1\\ \theta'\\ \theta\end{matrix}\right\}\overline{\rho_1\rho'_1\mid\rho_1^3}+\left.\begin{matrix}1\\ \theta\\ \theta'\end{matrix}\right\}\overline{\rho_1\rho'_1\mid\rho_1'^3}},
\end{aligned}\right.$$

et ainsi de suite, en employant les autres combinaisons pour la détermination du facteur commun en question.

En remplaçant $\rho\rho'$, ρ^3, $\rho'^3, \ldots$ par leurs valeurs, on a enfin

$$(36)\left\{\begin{aligned}
\left.\begin{matrix}a\\ b\\ c\end{matrix}\right\} = \frac{1}{3}\Bigg[&-A+\left.\begin{matrix}1\\ \theta'\\ \theta\end{matrix}\right\}\overline{A^2-3B\,\Bigg|\,\frac{AB-9C+\sqrt{(AB-9C)^2-4(A^2-3B)(B^2-3AC)}}{2}}\\
&+\left.\begin{matrix}1\\ \theta\\ \theta'\end{matrix}\right\}\overline{A^2-3B\,\Bigg|\,\frac{AB-9C-\sqrt{(AB-9C)^2-4(A^2-3B)(B^2-3AC)}}{2}}\Bigg]\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

Le procédé de la détermination des facteurs communs désignés par $\overline{\rho\rho'\mid\rho^3}$, $\overline{\rho\rho'\mid\rho'^3}, \ldots$ étant essentiellement du ressort de l'Arithmétique proprement dite, où il devrait constituer une opération fondamentale, j'ai montré dans les exemples numériques ci-joints qu'il se réduit à un nombre *limité* d'opérations purement algébriques et que, par conséquent, ce procédé résout complétement le problème proposé. Q. E. F.

Corollaire. — Les expressions

$$a = -\frac{\rho_1 - \rho'_1}{\rho - \rho'},$$

$$b = -\frac{\theta'\rho_1 - \theta\rho'_1}{\theta'\rho - \theta\rho'} = -\frac{(\rho_1 - \rho'_1) + (\rho_1 + \rho'_1)\sqrt{-3}}{(\rho - \rho') + (\rho + \rho')\sqrt{-3}},$$

$$c = -\frac{\theta\rho_1 - \theta'\rho'_1}{\theta\rho - \theta'\rho'} = -\frac{(\rho_1 - \rho'_1) - (\rho_1 + \rho'_1)\sqrt{-3}}{(\rho - \rho') - (\rho + \rho')\sqrt{-3}},$$

$$\rho_1 + \rho'_1 = \frac{P(\rho + \rho') - (\rho - \rho')S\sqrt{-3}}{2N},$$

$$\rho_1 - \rho'_1 = \frac{P(\rho - \rho') - (\rho + \rho')S\sqrt{-3}}{2N'},$$

dont les deux dernières résultent de la combinaison de

$$\rho\rho' = N, \quad \rho\rho'_1 = \frac{P + S\sqrt{-3}}{2}, \quad \rho'\rho_1 = \frac{P - S\sqrt{-3}}{2},$$

fournissent, par l'élimination de a, ρ, ρ'_1, $\rho - \rho'$, $\rho_1 + \rho'_1$, $\rho_1 - \rho'_1$ d'une part, et d'autre part de b, $\rho + \rho'$, $\rho - \rho'$, $\rho_1 + \rho'_1$, $\rho_1 - \rho'_1$, les deux équations

$$b = -\frac{2N' + (P + S)c}{2Nc + (P - S)}, \quad a = -\frac{2N' + (P - S)c}{2Nc + (P + S)}$$

ou, rassemblées,

$$\left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} = -\frac{2N' + (P \pm S)c}{2Nc + (P \mp S)}, \tag{37}$$

au moyen desquelles, une des trois racines a, b, c étant donnée, les deux autres pourraient être trouvées en fonction de la racine donnée et des quantités N, N', P et S déjà calculées pour la détermination de la première racine.

Scolie. — Les considérations suivantes montrent que l'Algèbre même suggère cette solution du cas irréductible :

1° L'élimination de trois des quatre quantités ρ, ρ', ρ_1, ρ'_1 de ρ', ρ_1, ρ'_1

par exemple, entre les quatre équations

$$\frac{A+\rho+\rho'}{3} = -\frac{2B-(\rho_1+\rho'_1)}{2A+\rho+\rho'}, \quad \rho\rho' = N, \quad \rho_1\rho'_1 = N', \quad \rho\rho'_1 + \rho'\rho_1 = P,$$

fournit l'équation finale

$$\begin{aligned} 2N\rho^4 &- (3P - 2AN - 3S\sqrt{-3})\rho^3 \\ &- N(3P - 2AN + 3S\sqrt{-3})\rho + 2N^3 = 0, \end{aligned}$$

ou

$$\left[2\rho^3 - (3P - 2AN + 3S\sqrt{-3})\right]\left(N\rho - \frac{3P - 2AN - 3S\sqrt{-3}}{2}\right) = 0,$$

en observant qu'on peut écrire au lieu du dernier terme $2N^3$ son équivalent

$$\tfrac{1}{2}(3P - 2AN + 3S\sqrt{-3})(3P - 2AN - 3S\sqrt{-3}),$$

qui peut être satisfaite en posant

$$2\rho^3 - (3P - 2AN + 3S\sqrt{-3}) = 0,$$

ou

$$N\rho - \frac{3P - 2AN - 3S\sqrt{-3}}{2} = 0,$$

d'où

$$\rho^3 = \frac{3P - 2AN + 3S\sqrt{-3}}{2} \quad \text{et} \quad \rho = \frac{3P - 2AN - 3S\sqrt{-3}}{2N}.$$

La valeur de ρ^3 coïncide avec celle qui a déjà été trouvée précédemment.

La valeur de $\rho = \frac{3P - 2AN - 3S\sqrt{-3}}{2N}$, fournie par la seconde de ces deux équations, ne satisfait pas l'équation proposée, tant qu'on prend les opérations qui y sont indiquées dans le sens ordinaire, ce dont on peut se convaincre en observant que la valeur conjuguée de ρ, savoir ρ', serait dans ce cas $\rho' = \frac{3P - 2AN + 3S\sqrt{-3}}{2N}$, et par conséquent

$$\rho + \rho' = \frac{3P - 2AN}{2N} \quad \text{et} \quad a = + \frac{-A + \rho + \rho'}{3} = \frac{3P - 4AN}{6N} = x,$$

et que $x = \frac{3P - 4AN}{6N}$ ne rend pas les deux membres de l'équation $x^3 + A_x^2 + Bx + C = 0$ identiques. Comment donc interpréter cette valeur pour qu'elle satisfasse l'équation proposée? Car on ne peut admettre qu'elle soit contradictoire avec l'équation proposée, puisqu'elle a été obtenue par une suite de déductions complétement compatibles avec elle. En observant que le numérateur de cette expression est égal à $2\rho'^3$ et le dénominateur à $2\rho\rho'$, on a

$$\rho = \frac{\rho'^3}{\rho\rho'}.$$

Si l'on attachait à la division de ρ'^3 par $\rho\rho'$, qui y est indiquée, un sens plus étendu que celui de la division ordinaire, c'est-à-dire au lieu de la recherche du quotient, la recherche d'une quantité qui divise ces deux quantités sans reste, ce résultat signifierait la valeur conjuguée ρ' de ρ, car on voit sans peine que ρ'^3 et $\rho\rho'$ ont ρ' pour facteur commun. Cette interprétation est d'ailleurs justifiée par le fait que l'opération de la recherche d'un facteur commun à deux quantités ne peut se manifester comme résultante d'autres opérations tant qu'il n'existe aucun signe pour l'indiquer, de même que l'opération de l'extraction d'une racine ne pourrait se manifester comme résultante d'autres opérations si l'on n'avait pas adopté un signe pour l'indiquer. Il est donc à présumer que l'adoption générale d'un pareil signe pourrait conduire à de nouveaux résultats importants. L'Algèbre fournit, outre la valeur cherchée de ρ, sa valeur conjuguée ρ', ce qui est conforme à l'esprit de l'Algèbre et analogue au cas où l'on cherche la racine réelle d'un nombre positif, où l'Algèbre ne fournit pas seulement cette racine, mais en même temps toutes les autres, soit réelles, soit complexes qui existent.

2° Le fait que les valeurs de ρ^3, ρ'^3, ρ_1^3, $\rho_1'^3$, savoir :

$$\frac{3P - 2AN + 3S\sqrt{-3}}{2}, \quad \frac{3P - 2AN - 3S\sqrt{-3}}{2},$$
$$\frac{-3CP + 2BN' + 3CS\sqrt{-3}}{2}, \quad \frac{-3CP + 2BN' - 3CS\sqrt{-3}}{2},$$

ne sont pas des cubes parfaits sous cette forme générale et que les produits

$$\rho^3 \times \rho'^3, \quad \rho_1^3 \times \rho_1'^3, \quad \rho^3 \times \rho_1'^3, \quad \rho'^3 \times \rho_1^3,$$

de même que

$$\rho^6 \times \rho_1^3, \quad \rho'^6 \times {}'\rho_1^3, \quad \rho^3 \times \rho_1^6, \quad \rho'^3 \times \rho_1'^6,$$

sont des cubes parfaits dont les racines sont respectivement

$$\rho\rho' = N, \quad \rho_1\rho_1' = N', \quad \rho\rho_1' = \frac{P + S\sqrt{-3}}{2}, \quad \rho'\rho_1 = \frac{P - S\sqrt{-3}}{2},$$
$$\rho^2\rho_1 = \frac{3N' - BN + AS\sqrt{-3}}{2}, \quad \rho'^2\rho_1' = \frac{3N' - BN - AS\sqrt{-3}}{2},$$
$$\rho\rho_1^2 = \frac{AN' - 3CN + BS\sqrt{-3}}{2},$$

est une autre suggestion de l'Algèbre qu'il ne faut pas s'obstiner à vouloir déterminer les quantités ρ, ρ', ρ_1, ρ_1' par l'extraction de la racine cubique des valeurs de ρ^3, ρ'^3, ρ_1^3, $\rho_1'^3$; qu'au contraire, quand cette opération devient impossible, il convient, pour obtenir les valeurs de ρ, ρ', ρ_1, ρ_1', d'opérer la décomposition en facteurs des racines cubiques des produits $\rho^3\rho'^3$, $\rho_1^3\rho_1'^3$, $\rho^3{}'\rho_1^3$, ..., savoir de

$$\begin{array}{llllll}
\rho\rho' = N & \text{dans les facteurs} & & \rho & \text{et} & \rho', \\
\rho_1\rho_1' = N' & \text{»} & \text{»} & \rho_1 & \text{»} & \rho_1', \\
\rho\rho_1' = \dfrac{P + S\sqrt{-3}}{2} & & \text{»} & \rho & \text{»} & \rho_1', \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & &
\end{array}$$

APPLICATIONS DE LA SOLUTION PRÉCÉDENTE DU CAS IRRÉDUCTIBLE A DES EXEMPLES NUMÉRIQUES.

I.

$$x^3 - 16x^2 + 73x - 90 = 0.$$

$$A = -16, \quad B = 73, \quad C = -90.$$

$$\rho\rho' = A^2 - 3B = N = 37;$$

$$\rho_1\rho'_1 = N' = 1009;$$

$$\rho\rho'_1 + \rho'\rho_1 = AB - 9C = P = -358;$$

$$\frac{\rho\rho'_1 - \rho'\rho_1}{\sqrt{-3}} = (a-b)(a-c)(b-c) = \sqrt{\frac{4NN' - P^2}{3}} = S = 84;$$

$$\rho^3 + \rho'^3 = 3P - 2AN = 110;$$

$$\rho_1^3 + \rho'^3_1 = 2BN' - 3CP = 50654;$$

$$\rho^2\rho_1 + \rho'^2\rho'_1 = 3N' - BN = 326;$$

$$\rho\rho_1^2 + \rho'\rho'^2_1 = AN' - 3CN = -6154;$$

$$\rho\rho'_1 = \frac{P + S\sqrt{-3}}{2} = -179 + 42\sqrt{-3};$$

$$\rho'\rho_1 = \frac{P + S\sqrt{-3}}{2} = -179 - 42\sqrt{-3};$$

$$\rho^3 = 55 + 126\sqrt{-3};$$

$$\rho'^3 = 55 - 126\sqrt{-3};$$

$$\rho_1^3 = 25327 - 11340\sqrt{-3};$$

$$\rho'^3_1 = 25327 + 11340\sqrt{-3};$$

$$\rho^2\rho_1 = \frac{3N' - BN + AS\sqrt{-3}}{2} = 163 - 672\sqrt{-3};$$

$$\rho'^2\rho'_1 = \frac{3N' - BN - AS\sqrt{-3}}{2} = 163 + 672\sqrt{-3};$$

$$\rho\rho_1^2 = -3077 + 3066\sqrt{-3};$$

$$\rho'\rho'^2_1 = -3077 + 3066\sqrt{-3}.$$

De ce que S est réel et rationnel, on conclut que les trois racines a, b, c sont de même espèce et que, par conséquent, le cas irréductible se présente ici. $\rho, \rho', \rho_1, \rho'_1$ ne peuvent donc être déterminés autrement que par la décomposition des produits $\rho\rho'$, $\rho_1\rho'_1$, $\rho\rho'_1$, ... dans leurs facteurs, ce que l'on peut effectuer de tant de manières, qu'il serait très-long d'épuiser toutes les combinaisons possibles; en voici quelques-unes :

1° *Détermination de* ρ *par l'opération désignée par* $\overline{\rho\rho' | \rho\rho'_1}$.

A cet effet on divise : $\rho\rho'_1 = -179 + 42\sqrt{-3}$ par $\rho\rho' = 37$, ce qui donne $-5 + \sqrt{-3}$ pour quotient et $6 + 5\sqrt{-3} = \sqrt{-3}(5 - 2\sqrt{-3})$ pour reste.

En supprimant dans ce reste le facteur monôme $\sqrt{-3}$, qui n'est pas commun à 37 et à $-179 + 42\sqrt{-3}$ et en divisant le diviseur précédent par ce reste après la suppression du facteur $\sqrt{-3}$, on trouve pour quotient exact, c'est-à-dire sans reste : $5 + 2\sqrt{-3}$, par conséquent $\overline{-179 + 42\sqrt{-3} | 37} = 5 - 2\sqrt{-3}$; donc :

$$37 = (5 + 2\sqrt{-3})(5 - 2\sqrt{-3}) = (-5 + 2\sqrt{-3})(-5 - 2\sqrt{-3}).$$

et

$$\begin{aligned} -179 + 42\sqrt{-3} &= (5 - 2\sqrt{-3})(-31 - 4\sqrt{-3}) \\ &= (-5 + 2\sqrt{-3})(+31 + 4\sqrt{-3}). \end{aligned}$$

Pour faire disparaître l'indétermination des signes, on n'a qu'à comparer les cubes de $5 - 2\sqrt{-3}$ et de $-5 + 2\sqrt{-3}$, $5 + 2\sqrt{-3}$, $-5 - 2\sqrt{-3}$ avec les valeurs de ρ^3 et de ρ'^3, savoir :

$$\rho^3 = 55 + 126\sqrt{-3} \quad \text{et} \quad \rho'^3 = 55 - 126\sqrt{-3}.$$

Cette vérification donne

$$\begin{aligned} \rho &= -5 + 2\sqrt{-3}, & \rho' &= -5 - 2\sqrt{-3}, \\ \rho_1 &= 31 - 4\sqrt{-3}, & \rho'_1 &= 31 + 4\sqrt{-3}. \end{aligned}$$

2° Détermination de ρ'_1 par l'opération indiquée par $\overline{\rho\rho'_1 \mid \rho_1\rho'_1}$ [*].

Première opération.

$$\frac{\rho_1\rho'_1}{\rho\rho'_1} = \frac{1009}{-179+42\sqrt{-3}} = -\frac{179}{37} - \frac{42}{37}\sqrt{-3},$$

ou approximativement en nombres entiers $-5-\sqrt{-3}$. Ce quotient approximatif conduit au reste

$$-12+31\sqrt{-3} = \sqrt{-3}(31+4\sqrt{-3}).$$

Deuxième opération.

$$\frac{-179+42\sqrt{-3}}{31+4\sqrt{-3}} = -5+2\sqrt{-3}$$

$$\therefore \overline{1009 \mid -179+42\sqrt{-3}} = 31+4\sqrt{-3}.$$

Après une vérification semblable à celle du cas précédent, on trouve donc $\rho'_1 = 31+4\sqrt{-3}$, et par suite, puisque ρ est la conjuguée de ρ'_1, $\rho_1 = 31-4\sqrt{-3}$.

---

[*] $$\frac{m+n\sqrt{-3}}{p+q\sqrt{-3}} = \frac{(m+n\sqrt{-3})(p-q\sqrt{-3})}{(p+q\sqrt{-3})(p-q\sqrt{-3})}$$
$$= \frac{(mp+3qn)+(np-mq)\sqrt{-3}}{p^2+3q^2} = \frac{mp+3nq}{p^2+3q^2} + \frac{np-mq}{p^2+3q^2}\sqrt{-3}$$

montre que le quotient de la division d'une quantité complexe par une autre quantité complexe est en général une quantité de même espèce; en désignant la partie réelle de ce quotient par α et le facteur réel de la partie imaginaire par β, de sorte que $\frac{m+n\sqrt{-3}}{p+q\sqrt{-3}} = \alpha+\beta\sqrt{-3}$, on a

$$\alpha = \frac{mp+3nq}{p^2+3q^2}, \quad \beta = \frac{np-mq}{p^2+3q^2};$$

c'est au moyen de ces formules qu'on a calculé, dans ces exemples, les termes des quotients de pareilles divisions.

3° *Détermination de ρ_1 par l'équation indiquée par $\overline{\rho_1\rho'_1|\rho^2\rho_1}$.*

Première opération.

$$\frac{\rho_1\rho'_1}{\rho^2\rho_1} = \frac{1009}{163-672\sqrt{-3}} = \frac{163}{1369} + \frac{672}{1369}\sqrt{-3},$$

ou approximativement, en nombres entiers, $\sqrt{-3}$; ce quotient approximatif donne le reste $-1007 - 163\sqrt{-3}$.

Deuxième opération.

$$\frac{163-672\sqrt{-3}}{-1007-163\sqrt{-3}} = \frac{163}{1084} + \frac{697}{1084}\sqrt{-3},$$

ou approximativement, en nombres entiers, $\sqrt{-3}$, ce qui conduit au nouveau reste $-326+335\sqrt{-3}$.

Troisième opération.

$$\frac{-1007-163\sqrt{-3}}{-326+335\sqrt{-3}} = \frac{163}{439} + \frac{397}{439}\sqrt{-3},$$

ou approximativement, en nombres entiers, $1+\sqrt{-3}$, ce qui donne le reste $324-172\sqrt{-3} = -4\sqrt{-3}(43+27\sqrt{-3})$.

Quatrième opération.

$$\frac{-326+335\sqrt{-3}}{43+27\sqrt{-3}} = \frac{13}{4} + \frac{23}{4}\sqrt{-3},$$

ou approximativement, en nombres entiers, $3+6\sqrt{-3}$, ce qui donne le reste $31-4\sqrt{-3}$.

Cinquième opération.

$$\frac{43+27\sqrt{-3}}{31-4\sqrt{-3}} = 1+\sqrt{-3};$$

par conséquent,

$$\overline{1009\,|\,163 - 672\sqrt{-3}} = 31 - 4\sqrt{-3};$$

partant,

$$\begin{aligned} 1009 &= (\ \ 31 - 4\sqrt{-3})(\ \ 31 + 4\sqrt{-3}) \\ &= (-31 + 4\sqrt{-3})(-31 - 4\sqrt{-3}), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 163 - 672\sqrt{-3} &= \ \ (\ \ 31 - 4\sqrt{-3})(\ \ 13 - 20\sqrt{-3}) \\ &= \ \ (-31 + 4\sqrt{-3})(-13 + 20\sqrt{-3}) \\ &= \ \ (\ \ 31 - 4\sqrt{-3})(-\ 5 + \ 2\sqrt{-3})^2 \\ &= -(-31 + 4\sqrt{-3})(+\ 5 - \ 2\sqrt{-3})^2. \end{aligned}$$

Une vérification analogue à celle du n° **1** prouve donc que

$$\rho' = 31 - 4\sqrt{-4},$$

d'où la valeur conjuguée

$$\rho'_1 = 31 + 4\sqrt{-3}$$

de ρ_1; partant,

$$\rho = -5 + 2\sqrt{-3}, \quad \rho' = -5 - 2\sqrt{-3}$$

et

$$\begin{aligned} \rho + \rho' &= -10, & \rho_1 + \rho'_1 &= 62, \\ \rho - \rho' &= 4\sqrt{-3}, & \rho_1 - \rho'_1 &= -8\sqrt{-3}, \end{aligned}$$

d'où, en substituant ces valeurs dans les expressions des racines a, b, c,

$$a = 2, \quad b = 9, \quad c = 5.$$

II.

$$x^3 + \frac{41}{140}x^2 - \frac{79}{14}x + \frac{429}{140} = 0,$$

$$\mathrm{A} = \frac{41}{140}, \quad \mathrm{B} = -\frac{79}{14}, \quad \mathrm{C} = \frac{429}{140},$$

$$\rho\rho' = \mathrm{A}^2 - 3\mathrm{B} = \mathrm{N} = \frac{333481}{19600}, \quad \rho_1\rho'_1 = \mathrm{B}^2 - 3\mathrm{AC} = \mathrm{N}' = \frac{571333}{19600},$$

$$\rho\rho'_1 + \rho'\rho_1 = \mathrm{AB} - 9\mathrm{C} = \mathrm{P} = -\frac{572930}{19600},$$

$$\frac{\rho\rho'_1 - \rho'\rho_1}{\sqrt{-3}} = \sqrt{\frac{4\mathrm{NN}' - \mathrm{P}^2}{3}} = \mathrm{S} = \frac{380292}{19600},$$

$$\rho\rho'_1 = \frac{\mathrm{P} + \mathrm{S}\sqrt{-3}}{2} = \frac{-286465 + 190146\sqrt{-3}}{19600},$$

$$\rho\rho_1 = \frac{\mathrm{P} - \mathrm{S}\sqrt{-3}}{2} = \frac{-286465 - 190146\sqrt{-3}}{19600},$$

$$\rho^3 = \frac{3\mathrm{P} - 2\mathrm{AN} + 3\mathrm{S}\sqrt{-3}}{2} = \frac{-13398021 + 79861320\sqrt{-3}}{2744000},$$

$$\rho'^3 = \frac{3\mathrm{P} - 2\mathrm{AN} - 3\mathrm{S}\sqrt{-3}}{2} = \frac{-13398021 - 79861320\sqrt{-3}}{2744000},$$

$$\rho_1^3 = \frac{-82672615 + 244717902\sqrt{-3}}{2744000}, \quad \rho'^3_1 = \frac{-82672615 - 244717902\sqrt{-3}}{2744000}.$$

De ce que S est réel, rationnel et fractionnaire, on conclut que les racines a, b, c sont de même réelles, rationnelles et fractionnaires. Donc le cas irréductible se présente encore ici.

$\rho_1, \rho', \rho_1, \rho'_1$ sont ici des quantités complexes et fractionnaires. D'après la composition de $\rho, \rho', \rho_1, \rho'_1$ en fonction de a, b, c et le fait que ρ et ρ', de même que ρ_1 et ρ'_1, sont conjugués, il est évident que ρ et ρ' ont des dénominateurs égaux, de même ρ_1 et ρ'_1, et que, par suite, le dénominateur de $\mathrm{N} = \rho\rho'$ est égal au carré du dénominateur commun de ρ et ρ', le dénominateur de $\mathrm{N}' = \rho_1\rho'_1$ égal au carré du dénominateur commun de ρ_1 et ρ'_1, celui de $\rho\rho'_1$ et $\rho'\rho_1$ égal au produit de ceux de ρ et ρ_1, celui de ρ^3 et ρ'^3 au cube du dénominateur commun de ρ et ρ', celui de ρ_1^3 et ρ'^3_1 au cube des dénominateurs communs de ρ_1 et ρ'_1, celui de $\rho^2\rho_1$ et $\rho'^2\rho'_1$ au produit du carré du dénominateur commun de

ρ et ρ' par le dénominateur commun de ρ_1 et ρ'_1, et enfin celui de $\rho\rho_1^2$ et $\rho'\rho_1'^2$ égal au produit du dénominateur commun de ρ et ρ' par le carré du dénominateur commun de ρ_1, ρ'_1. Réciproquement, les dénominateurs communs de ρ et ρ' et de ρ_1 et ρ'_1 seront donc respectivement égaux aux racines carrées des dénominateurs de N et de N', ou aux racines cubiques des dénominateurs communs de

$$\rho^3 = \frac{3P - 2AN + 3S\sqrt{-3}}{2} \quad \text{et} \quad \rho'^3 = \frac{3P - 2AN - 3S\sqrt{-3}}{2},$$

et de

$$\rho_1^3 = \frac{-3CP + 2BN' + 3CS\sqrt{-3}}{2} \quad \text{et} \quad \rho_1'^3 = \frac{-3CP + 2BN' - 3CS\sqrt{-3}}{2}.$$

Ces dénominateurs étant ainsi déterminés, on peut en faire abstraction dans la recherche du facteur commun, ce qui réduit la détermination de ρ, ρ', ρ_1, ρ'_1, dans le cas où les racines a, b, c sont réelles, rationnelles et fractionnaires, à celui où elles sont réelles, rationnelles et entières. Dans le cas actuel, le dénominateur commun de ρ et ρ' est égal à $\sqrt{19600} = 140$, et celui de ρ_1 et ρ'_1 de même égal à $\sqrt{19600} = 140$.

Détermination du numérateur de ρ par la recherche du facteur complexe commun aux numérateurs des valeurs de $\rho\rho'$ et $\rho\rho'_1$, savoir par l'exécution de l'opération indiquée par

$$\overline{333481 \,|\, 286465 + 190146\sqrt{-3}}.$$

Première opération.

$$\frac{-286465 + 190146\sqrt{-3}}{333481} = -\frac{286465}{333481} + \frac{190146}{333481}\sqrt{-3},$$

ou approximativement, en nombres entiers, $-1 + \sqrt{-3}$, ce qui donne le reste $47076 - 140335\sqrt{-3} = -\sqrt{-3}(140335 + 15692\sqrt{-3})$, où l'on peut supprimer le facteur $-\sqrt{-3}$.

Deuxième opération.

$$\frac{333481}{143335 + 15672\sqrt{-3}} = \frac{143335}{63817} - \frac{15672}{63817}\sqrt{-3},$$

ou approximativement en nombres entiers 2, ce qui donne le reste $46811 - 31344\sqrt{-3}$.

Troisième opération.

$$\frac{146335 + 15672\sqrt{-3}}{46811 - 31344\sqrt{-3}} = \frac{15701}{15409} + \frac{15672}{15409}\sqrt{-3},$$

ou approximativement, en nombres entiers, $1 + \sqrt{-3}$, ce qui donne le reste $2492 + 205\sqrt{-3}$.

Quatrième opération.

$$\frac{46811 - 31344\sqrt{-3}}{2492 + 205\sqrt{-3}} = \frac{292}{19} - \frac{263}{19}\sqrt{-3},$$

ou approximativement, en nombres entiers, $15 - 14\sqrt{-3}$, ce qui donne le reste $821 + 469\sqrt{-3}$.

Cinquième opération.

$$\frac{2492 + 205\sqrt{-3}}{821 + 469\sqrt{-3}} = \frac{7}{4} - \frac{3}{4}\sqrt{-3},$$

ou approximativement, en nombres entiers, $2 - \sqrt{-3}$, ce qui donne le reste $557 + 557\sqrt{-3} = 557(1 + \sqrt{-3})$, où l'on peut supprimer le facteur 557.

Sixième opération.

$$\frac{821 + 469\sqrt{-3}}{1 + \sqrt{-3}} = 557 - 88\sqrt{-3},$$

par conséquent

$$\sqrt[3]{333481 \mid -286465 + 190146} = 557 - 88\sqrt{-3}.$$

En élevant $557 - 88\sqrt{-3}$ et $-557 + 88\sqrt{-3}$ au cube et en comparant ces cubes au numérateur de la valeur de ρ^3, c'est-à-dire à celui de $\rho^3 = \frac{-133988021 + 79861320\sqrt{-3}}{2744000}$, on conclut que

$$\rho = \frac{-557 + 88\sqrt{-3}}{140};$$

partant, ρ' la valeur conjuguée de ρ,

$$\rho' = \frac{-557 - 88\sqrt{-3}}{140},$$

et la division de $\rho\rho'_1 = \dfrac{-286465 + 190146\sqrt{-3}}{1960}$ par

$$\rho = \frac{-557 + 88\sqrt{-3}}{140}$$

fournit la valeur de $\rho'_1 = \dfrac{629 - 242\sqrt{-3}}{140}$, partant, la valeur conjuguée de ρ'_1, savoir

$$\rho_1 = \frac{629 + 242\sqrt{-3}}{140},$$

par suite

$$\rho + \rho' = -\frac{557}{70}, \quad \rho - \rho' = -\frac{88}{70}\sqrt{-3} = -\frac{44}{35}\sqrt{-3},$$

et

$$\rho_1 + \rho'_1 = \frac{629}{90}, \quad \rho_1 - \rho'_1 = \frac{242}{70}\sqrt{-3} = \frac{121}{35}\sqrt{-3}.$$

Substituant ces valeurs dans les expressions des racines a, b, c, on trouve

$$a = -\frac{11}{4}, \quad b = \frac{13}{7}, \quad c = \frac{3}{5}.$$

Remarque. — Le cas où ρ et ρ', de même que ρ_1 et ρ'_1, auraient respectivement les facteurs d et d' communs (qui ne sauraient être complexes, puisque ρ et ρ', de même que ρ_1 et ρ'_1 sont des quantités complexes *conjuguées*), peut être traité d'une manière analogue à celui où ils ont des diviseurs communs réels, c'est-à-dire en supprimant d'abord dans $\rho\rho' = \mathrm{N}$, $\rho_1\rho'_1 = \mathrm{N}_r$, $\rho\rho'_1 = \dfrac{\mathrm{P} + \mathrm{S}\sqrt{-3}}{2}$, $\rho'\rho_1 = \dfrac{\mathrm{P} - \mathrm{S}\sqrt{-3}}{2}$, respectivement $d^2, d'^2, dd', \ldots$, et en appliquant ensuite la méthode exposée ci-dessus à la recherche de $\frac{\rho}{d}, \frac{\rho'}{d}$ et $\frac{\rho_1}{d'}, \frac{\rho'_1}{d'}$, que l'on multiplierait ensuite par d et d' respectivement pour avoir les valeurs de $\rho, \rho', \rho_1, \rho'_1$.

III.

$$x^3+\frac{81}{55}x^2+\frac{181}{385}x+\frac{3}{77}=0,$$

$$A=\frac{81}{55},\quad B=\frac{181}{385},\quad C=\frac{3}{77},$$

$$N=\frac{16062}{21175}=\frac{112434}{148225},\quad N'=\frac{7246}{148225},\quad P=\frac{50652}{148225},\quad S=\frac{932\sqrt{266}}{148225},$$

$$\rho\rho'_1=\frac{25326+466\sqrt{266}\sqrt{-3}}{148225},\quad \rho'\rho_1=\frac{25326-466\sqrt{266}\sqrt{-3}}{148225},$$

$$\rho^3=\frac{-344998548+538230\sqrt{266}\sqrt{-3}}{57066625},$$

$$\rho'^3=\frac{-344998548-538230\sqrt{266}\sqrt{-3}}{57066625},$$

$$\rho_1^3=\frac{171856+20970\sqrt{266}\sqrt{-3}}{57066625},\quad \rho_1'^3=\frac{171856-20970\sqrt{266}\sqrt{-3}}{57066625}.$$

De ce que S est réel, mais irrationnel et fractionnaire, on conclut que les racines a, b, c sont réelles, mais ou toutes les trois irrationnelles ou l'une d'elles rationnelle et fractionnaire et les deux autres irrationnelles. Comme ce dernier cas n'entre pas dans le cas irréductible, il convient d'examiner si le premier cas a lieu ici. La composition de $N=\rho\rho'$, $N'=\rho\rho'_1$, $\rho\rho'_1=\frac{P+S\sqrt{-3}}{2}$, en fonction de a, b, c, montre que dans ce cas N et N' sont susceptibles d'être ramenés à la forme $\frac{\alpha^2+3\lambda\beta^2}{\gamma^2}=\frac{\alpha+\beta\sqrt{\lambda}\sqrt{-3}}{\gamma}+\frac{\alpha-\beta\sqrt{\lambda}\sqrt{-3}}{\gamma}$ (λ étant le nombre positif qui se trouve sous le radical du facteur irrationnel de S et α, β et γ des nombres entiers), et, en effet, on trouve aisément que dans le cas actuel

$$N=\rho\rho'=\frac{\overline{126}^2+3.266.\overline{11}^2}{\overline{385}^2}=\frac{126+11\sqrt{266}\sqrt{-3}}{385}\times\frac{126-11\sqrt{266}\sqrt{-3}}{385}$$

$$=\frac{-126-11\sqrt{266}\sqrt{-3}}{385}\times\frac{-126+11\sqrt{266}\sqrt{-3}}{385},$$

$$N'=\rho_1\rho'_1=\frac{8^2+3.266.3^2}{\overline{385}^2}=\frac{8+3\sqrt{266}.\sqrt{-3}}{385}\times\frac{8-3\sqrt{266}.\sqrt{-3}}{385}$$

$$=\frac{-8-3\sqrt{266}\sqrt{-3}}{385}\times\frac{-8+3\sqrt{266}.\sqrt{-3}}{385}.$$

Comme les cubes de $\frac{126-11\sqrt{266}.\sqrt{-3}}{385}$, $\frac{126+11\sqrt{266}.\sqrt{-3}}{385}$ ainsi que de $\frac{-8-3\sqrt{266}.\sqrt{-3}}{385}$, $\frac{-8+3\sqrt{266}.\sqrt{-3}}{385}$ sont respectivement égaux aux valeurs ci-dessus de ρ^3, ρ'^3, ρ_1^3, $\rho_1'^3$, on a évidemment

$$\rho = \frac{126-11\sqrt{266}.\sqrt{-3}}{385}, \quad \rho' = \frac{126+11\sqrt{266}.\sqrt{-3}}{385},$$
$$\rho_1 = \frac{-8-3\sqrt{266}.\sqrt{-3}}{385}, \quad \rho'_1 = \frac{-8+3\sqrt{266}.\sqrt{-3}}{385},$$

et, par conséquent,

$$\rho+\rho' = \frac{4.63}{385} = \frac{9.4}{55}, \quad \rho-\rho' = -\frac{2.11\sqrt{266}\sqrt{-3}}{385},$$
$$\rho_1+\rho'_1 = -\frac{16}{385}, \quad \rho_1-\rho'_1 = -\frac{6\sqrt{266}.\sqrt{-3}}{385}.$$

En substituant ces valeurs de $\rho+\rho'$, $\rho-\rho'$, $\rho_1+\rho'_1$, $\rho_1-\rho'_1$ dans les expressions des racines a, b, c, on obtient pour valeurs de celles-ci

$$a = -\frac{3}{11}, \quad b = -\frac{3\sqrt{7}+\sqrt{38}}{5\sqrt{7}}, \quad c = -\frac{3\sqrt{7}-\sqrt{38}}{5\sqrt{7}}.$$

IV.

$$x^3-(8+\sqrt{5})x^2+(19+6\sqrt{5})x-7(2+\sqrt{5}) = 0,$$
$$A = -(8+\sqrt{5}), \quad B = 19+6\sqrt{5}, \quad C = -7(2+\sqrt{5}),$$
$$N = \rho\rho' = 2(6-\sqrt{5}), \quad N' = \rho_1\rho'_1 = 2(50+9\sqrt{5}),$$
$$P = \rho\rho'_1+\rho'\rho_1 = -4(14+\sqrt{5}),$$
$$S = \sqrt{\frac{4NN'-P^2}{3}} = 4\sqrt{2}(\sqrt{5}-2),$$
$$\rho\rho'_1 = \frac{P+S\sqrt{-3}}{2} = -28-2\sqrt{5}+2\sqrt{2}(\sqrt{5}-2)\sqrt{-3}.$$

S, étant réel, mais irrationnel, montre que les racines de cette équation sont toutes les trois réelles et irrationnelles. On pourrait les déterminer approximativement par la formule de Cardan [*voir* la note (2°), p. 293] en développant les deux racines cubiques en séries convergentes, car dans la somme de ces deux séries les termes imaginaires s'entre-détruisent; mais on obtient ces racines beaucoup plus promptement et sous forme finie, mais implicite, c'est-à-dire sous une forme où il reste à exécuter l'opération qui rend ces racines irrationnelles, qui y est seulement indiquée, d'après la méthode précédente, en observant qu'on peut réduire la quantité $N = \rho\rho'$ à la forme

$$\alpha^2 + 3\beta^2 = (\alpha + \beta\sqrt{-3})(\alpha - \beta\sqrt{-3}).$$

En effet,

$$\begin{aligned} N = 12 - 2\sqrt{5} &= (1 - \sqrt{5})^2 + 6 = (1 - \sqrt{5})^2 + 3(\sqrt{2})^2 \\ &= (1 - \sqrt{5} + \sqrt{2}\sqrt{-3})(1 - \sqrt{5} - \sqrt{2}\sqrt{-3}) \\ &= [-(1 - \sqrt{5}) - \sqrt{2}\sqrt{-3}][-(1 - \sqrt{5}) + \sqrt{2}\sqrt{-3}]; \end{aligned}$$

par la vérification connue on fait disparaître l'indétermination des signes, et l'on trouve

$$\rho = -(1 - \sqrt{5}) - \sqrt{2}\sqrt{-3}, \quad \rho' = -(1 - \sqrt{5}) + \sqrt{2}\sqrt{-3},$$

et, par la division de $\rho\rho'_1 = -28 - 2\sqrt{5} + 2\sqrt{2}(\sqrt{5} - 2)\sqrt{-3}$ par $\rho = -(1 - \sqrt{5}) - \sqrt{2}\sqrt{-3}$,

$$\rho_1 = 1 - 3\sqrt{5} + \sqrt{2}(2 + \sqrt{5})\sqrt{-3}, \quad \rho'_1 = 1 - 3\sqrt{5} - \sqrt{2}(2 + \sqrt{5})\sqrt{-3};$$

par conséquent,

$$\begin{aligned} &\rho + \rho' = -2(1 - \sqrt{5}), \quad \rho - \rho' = -2\sqrt{2}\sqrt{-3}, \\ &\rho_1 + \rho'_1 = 2(1 - 3\sqrt{5}), \quad \rho_1 - \rho'_1 = 2\sqrt{2}(2 + \sqrt{5})\sqrt{-3}, \\ &\rho\,\theta + \rho'\theta' = 1 + 3\sqrt{2} - \sqrt{5}, \\ &\rho\,\theta - \rho'\theta' = -(1 - \sqrt{5} - \sqrt{2})\sqrt{-3}, \\ &\rho_1\theta + \rho'_1\theta' = -1 + 3\sqrt{5} - 6\sqrt{2} - 3\sqrt{2}\sqrt{5}, \\ &\rho_1\theta - \rho'_1\theta' = (1 - 3\sqrt{5} - 2\sqrt{2} - \sqrt{2}\sqrt{5})\sqrt{-3}, \\ &\rho\,\theta' + \rho'\theta = 1 - 3\sqrt{2} - \sqrt{5}, \\ &\rho\,\theta' - \rho'\theta = (1 - \sqrt{5} + \sqrt{2})\sqrt{-3}, \\ &\rho_1\theta' + \rho'_1\theta = -1 + 3\sqrt{5} + 6\sqrt{2} + 3\sqrt{2}\sqrt{5}, \\ &\rho_1\theta' - \rho'_1\theta = -(1 - 3\sqrt{5} + 2\sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{5})\sqrt{-3}; \end{aligned}$$

partant

$$a = 2 + \sqrt{5}, \quad b = 3 + \sqrt{2}, \quad c = 3 - \sqrt{2}.$$

Appendice.

Le Tableau suivant des valeurs de $\alpha^2 + 3\beta^2$ correspondant à toutes les valeurs entières de α et β entre o et 9 pourra être utile dans la détermination de ρ, ρ', ρ_1, ρ'_1 par la décomposition de $N = \rho\rho'$, $N' = \rho_2\rho'_1$ dans leurs facteurs ρ, ρ' et ρ_1, ρ'_1, quand N et N′ sont des nombres calculables.

	$\alpha = 0$.	$\alpha = 1$.	$\alpha = 2$.	$\alpha = 3$.	$\alpha = 4$.	$\alpha = 5$.	$\alpha = 6$.	$\alpha = 7$.	$\alpha = 8$.	$\alpha = 9$.
$\beta = 0$	$0^2+3.0^2=0$	$1^2+3.0^2=1$	$2^2+3.0^2=4$	$3^2+3.0^2=9$	$4^2+3.0^2=16$	$5^2+3.0^2=25$	$6^2+3.0^2=36$	$7^2+3.0^2=49$	$8^2+3.0^2=64$	$9^2+3.0^2=81$
$\beta = 1$	$0^2+3.1^2=3$	$1^2+3.1^2=4$	$2^2+3.1^2=7$	$3^2+3.1^2=12$	$4^2+3.1^2=19$	$5^2+3.1^2=28$	$6^2+3.1^2=39$	$7^2+3.1^2=52$	$8^2+3.1^2=67$	$9^2+3.1^2=84$
$\beta = 2$	$0^2+3.2^2=12$	$1^2+3.2^2=13$	$2^2+3.2^2=16$	$3^2+3.2^2=21$	$4^2+3.2^2=28$	$5^2+3.2^2=37$	$6^2+3.2^2=48$	$7^2+3.2^2=61$	$8^2+3.2^2=76$	$9^2+3.2^2=93$
$\beta = 3$	$0^2+3.3^2=27$	$1^2+3.3^2=28$	$2^2+3.3^2=31$	$3^2+3.3^2=36$	$4^2+3.3^2=43$	$5^2+3.3^2=52$	$6^2+3.3^2=63$	$7^2+3.3^2=76$	$8^2+3.3^2=91$	$9^2+3.3^2=108$
$\beta = 4$	$0^2+3.4^2=48$	$1^2+3.4^2=49$	$2^2+3.4^2=52$	$3^2+3.4^2=57$	$4^2+3.4^2=64$	$5^2+3.4^2=73$	$6^2+3.4^2=84$	$7^2+3.4^2=97$	$8^2+3.4^2=112$	$9^2+3.4^2=129$
$\beta = 5$	$0^2+3.5^2=75$	$1^2+3.5^2=76$	$2^2+3.5^2=79$	$3^2+3.5^2=84$	$4^2+3.5^2=91$	$5^2+3.5^2=100$	$6^2+3.5^2=111$	$7^2+3.5^2=124$	$8^2+3.5^2=139$	$9^2+3.5^2=156$
$\beta = 6$	$0^2+3.6^2=108$	$1^2+3.6^2=109$	$2^2+3.6^2=112$	$3^2+3.6^2=117$	$4^2+3.6^2=124$	$5^2+3.6^2=133$	$6^2+3.6^2=144$	$7^2+3.6^2=157$	$8^2+3.6^2=172$	$9^2+3.6^2=189$
$\beta = 7$	$0^2+3.7^2=147$	$1^2+3.7^2=148$	$2^2+3.7^2=151$	$3^2+3.7^2=156$	$4^2+3.7^2=163$	$5^2+3.7^2=172$	$6^2+3.7^2=183$	$7^2+3.7^2=196$	$8^2+3.7^2=211$	$9^2+3.7^2=228$
$\beta = 8$	$0^2+3.8^2=192$	$1^2+3.8^2=193$	$2^2+3.8^2=196$	$3^2+3.8^2=201$	$4^2+3.8^2=208$	$5^2+3.8^2=217$	$6^2+3.8^2=228$	$7^2+3.8^2=241$	$8^2+3.8^2=256$	$9^2+3.8^2=273$
$\beta = 9$	$0^2+3.9^2=243$	$1^2+3.9^2=244$	$2^2+3.9^2=247$	$3^2+3.9^2=252$	$4^2+3.9^2=259$	$5^2+3.9^2=268$	$6^2+3.9^2=279$	$7^2+3.9^2=292$	$8^2+3.9^2=307$	$9^2+3.9^2=324$