# JOURNAL

DE

# MATHÉMATIQUES

## PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE



L. PAINVIN


**Détermination des éléments de l'arête de rebroussement d'une surface développable définie par ses équations tangentielles**


*Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série*, tome 17 (1872), p. 177-218.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1872_2_17__177_0>

# *Détermination des éléments de l'arête de rebroussement d'une surface développable définie par ses équations tangentielles.*

PAR M. L. PAINVIN.

(Mémoire présenté à l'Académie des Sciences dans la séance du 18 juillet 1870.
*Comptes rendus*, t. LXI, p. 217.)

**1.** Il arrive très-fréquemment que les équations tangentielles d'une surface développable résultent immédiatement des données d'une question, ou s'en déduisent par des calculs généralement simples, et qu'il serait au contraire extrêmement difficile d'obtenir les équations de l'arête de rebroussement de cette surface. Il est donc important d'avoir des formules qui permettent d'étudier sur les équations tangentielles elles-mêmes les propriétés de cette arête de rebroussement; ces formules, qui n'ont jamais été données, sont l'objet de cette Note.

**2.** Notations :

$u$, $v$, $w$ sont les coordonnées tangentielles d'un plan, c'est-à-dire les inverses des coordonnées à l'origine de ce plan (les axes de coordonnées sont supposés rectangulaires). Si ce plan est tangent à la développable, ce sera le plan osculateur en un certain point M de l'arête de rebroussement;

$x$, $y$, $z$ seront les coordonnées du point M.

Je désignerai, en outre, par

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les angles de la tangente en M à l'arête de rebroussement;
$\lambda$, $\mu$, $\nu$ les angles de l'axe du plan osculateur;
$\xi$, $\eta$, $\zeta$ les angles de la normale principale;
$ds$ l'élément de l'arête de rebroussement;
$d\sigma$ l'angle de deux tangentes infiniment voisines;
$d\tau$ l'angle de deux plans osculateurs infiniment voisins;
$\theta$ l'angle au sommet du cône droit osculateur;

$\underset{r}{\mathrm{R}}$ le rayon de courbure;
$\mathrm{T}$ le rayon de torsion.

3. Une surface développable étant définie par deux équations tangentielles telles que

$$f(u, v, w) = 0, \quad \mathrm{F}(u, v, w) = 0,$$

nous pouvons regarder $u$, $v$, $w$ comme des fonctions déterminées d'un certain paramètre arbitraire. Pour simplifier l'écriture des formules, nous poserons

$$(1^\circ) \qquad \begin{cases} u_1 = du, & u_2 = d^2u, \\ v_1 = dv, & v_2 = d^2v, \\ w_1 = dw, & w_2 = d^2w, \end{cases}$$

$$(2^\circ) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} u & v & w \\ du & dv & dw \\ d^2u & d^2v & d^2w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u & v & w \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix};$$

puis nous désignerons par U, V, W,...; $\mathrm{U}_1$,..., les déterminants partiels de $\Delta$, de sorte que

$$(3^\circ) \qquad \begin{cases} \mathrm{U} = \dfrac{d\Delta}{du} = dv\,d^2w - dw\,d^2v, \\ \mathrm{V} = \dfrac{d\Delta}{dv} = dw\,d^2u - du\,d^2w, \\ \mathrm{W} = \dfrac{d\Delta}{dw} = du\,d^2v - dv\,d^2u; \\ \mathrm{U}_1 = \dfrac{d\Delta}{du_1} = w\,d^2v - v\,d^2w, \\ \mathrm{V}_1 = \dfrac{d\Delta}{dv_1} = u\,d^2w - w\,d^2u, \\ \mathrm{W}_1 = \dfrac{d\Delta}{dw_1} = v\,d^2u - u\,d^2v; \\ \mathrm{U}_2 = \dfrac{d\Delta}{du_2} = v\,dw - w\,dv, \\ \mathrm{V}_2 = \dfrac{d\Delta}{dv_2} = w\,du - u\,dw, \\ \mathrm{W}_2 = \dfrac{d\Delta}{dw_2} = u\,dv - v\,du. \end{cases}$$

### § I. — *Détermination des quantités* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$; $\lambda$, $\mu$, $\nu$; $\xi$, $\eta$, $\zeta$; $x$, $y$, $z$; $dx$, $dy$, $dz$.

4. Les coordonnées de trois plans tangents infiniment voisins seront

$$\begin{array}{llll} (P) & u, & v, & w, \\ (P_1) & u + du, & v + dv, & w + dw, \\ (P_2) & u + 2du + d^2u, & v + 2dv + d^2v, & w + 2dw + d^2w; \end{array}$$

on en conclut, pour les équations de ces trois plans

$$(1)\quad \begin{cases} (P) & uX + vY + wZ - 1 = 0, \\ (P_1) & (u + du)X + (v + dv)Y + (w + dw)Z = 1, \\ (P_2) & (u + 2du + d^2u)X + (v + 2dv + d^2v)Y + (w + 2dw + d^2w)Z = 1; \end{cases}$$

X, Y, Z sont les coordonnées rectilignes variables d'un point.

Dans les calculs suivants, nous désignerons fréquemment $\pm 1$ par $\varepsilon$, $\varepsilon'$, $\varepsilon''$,...; les lettres différentes $\varepsilon$, $\varepsilon'$, $\varepsilon''$ indiquant l'indépendance des signes + et −.

Les angles de l'axe du plan tangent P (ou *plan osculateur*) étant désignés par $\lambda$, $\mu$, $\nu$, on a, d'après la première des équations (1)

$$(2)\qquad \frac{\cos\lambda}{u} = \frac{\cos\mu}{v} = \frac{\cos\nu}{w} = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}.$$

La tangente MT en M est l'intersection des deux plans (P) et ($P_1$), c'est-à-dire

$$uX + vY + wZ = 1,$$
$$(u + du)X + (v + dv)Y + (w + dw)Z = 1;$$

ces deux équations peuvent être remplacées par le système suivant

$$(3)\quad (\mathrm{MT})\qquad \begin{cases} uX + vY + wZ = 1, \\ X\,du + Y\,dv + Z\,dw = 0; \end{cases}$$

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$ étant les angles de la droite (3) avec les axes de coordonnées, on a

$$\frac{\cos\alpha}{v\,dw - w\,dv} = \frac{\cos\beta}{w\,du - u\,dw} = \frac{\cos\gamma}{u\,dv - v\,du},$$

c'est-à-dire en ayant égard aux notations du n° 3

$$(4)\qquad \frac{\cos\alpha}{U_2} = \frac{\cos\beta}{V_2} = \frac{\cos\gamma}{W_2} = \frac{1}{\varepsilon'\sqrt{U_2^2 + V_2^2 + W_2^2}}.$$

La normale principale $(\xi, \eta, \zeta)$ est l'axe du *plan rectifiant*, c'est-à-dire du plan passant par la tangente MT, et perpendiculaire au plan osculateur $(u, v, w)$. Or l'équation du plan rectifiant est, d'après cette définition,

$$(5)\quad (vW_2 - wV_2)X + (wU_2 - uW_2)Y + (uV_2 - vU_2)Z = uu_1 + vv_1 + ww_1;$$

par conséquent, les angles $\xi$, $\eta$, $\zeta$ seront donnés par les égalités

$$\frac{\cos\xi}{vW_2 - wV_2} = \frac{\cos\eta}{wU_2 - uW_2} = \frac{\cos\zeta}{uV_2 - vU_2}.$$

Si l'on remarque qu'on a l'identité

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &(vW_2 - wU_2)^2 + (wU_2 - uW_2)^2 + (uV_2 - vU_2)^2 \\ &\quad = (u^2 + v^2 + w^2)(U_2^2 + V_2^2 + W_2^2) - (uU_2 + vV_2 + wW_2)^2 \\ &\quad = (u^2 + v^2 + w^2)(U_2^2 + V_2^2 + W_2^2), \end{aligned}\right.$$

on conclut des relations qui précèdent

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\cos\xi}{vW_2 - wV_2} = \frac{\cos\eta}{wU_2 - uW_2} = \frac{\cos\zeta}{uV_2 - vU_2} \\ &\qquad = \frac{1}{\varepsilon''\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}\sqrt{U_2^2 + V_2^2 + W_2^2}}. \end{aligned}\right.$$

**5.** Calculons maintenant les coordonnées du point M.

Le point M est l'intersection des trois plans tangents infiniment voisins (1), n° 4; les équations de ces trois plans, prises simultanément, donnent un système qu'on peut remplacer par le système suivant :

$$(8)\qquad \begin{cases} xu + yv + zw = 1, \\ x\,du + y\,dv + z\,dw = 0, \\ x\,d^2u + y\,d^2v + z\,d^2w = 0; \end{cases}$$

eu égard aux notations du n° 3, on tire de ces équations

$$(9)\qquad x = \frac{U}{\Delta},\quad y = \frac{V}{\Delta},\quad z = \frac{W}{\Delta}.$$

Il est alors facile d'obtenir $dx$, $dy$, $dz$. On a, en effet

$$dx = \frac{\Delta\,dU - U\,d\Delta}{\Delta^2};$$

or

$$\begin{aligned} \Delta &= uU + vV + wW, \\ d\Delta &= u\,dU + v\,dV + w\,dW + U\,du + V\,dv + W\,dw \\ &= u\,dU + v\,dV + w\,dW, \end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned} dx &= \frac{(uU + vV + wW)dU - (u\,dU - v\,dV + w\,dW)U}{\Delta^2} \\ &= \frac{(vV + wW)dU - (v\,dV - w\,dW)U}{\Delta^2}. \end{aligned}$$

Mais

$$(10)\qquad \begin{cases} dU = dv\,d^3w - dw\,d^3v, \\ dV = dw\,d^3u - du\,d^3w, \\ dW = du\,d^3v - dv\,d^3u. \end{cases}$$

En substituant ces valeurs dans l'expression de $dx$, et en ordonnant par rapport à $d^3u$, $d^3v$, $d^3w$, il vient

$$dx = -\frac{(U\,d^3u + V\,d^3v + W\,d^3w)\,U_2}{\Delta^2}.$$

Si donc on pose

$$(11)\qquad H = -(U\,d^3u + V\,d^3v + W\,d^3w),$$

on a définitivement

$$(12) \qquad \frac{dx}{U_2} = \frac{dy}{V_2} = \frac{dz}{W_2} = \frac{H}{\Delta^2}.$$

On conclut de là

$$(13) \qquad ds = \varepsilon''' \frac{H}{\Delta^2}\sqrt{U_2^2 + V_2^2 + W_2^2}.$$

Nous allons d'abord chercher les relations qui existent entre les signes $\varepsilon$, $\varepsilon'$,..., pour qu'on ait les égalités

$$(14) \qquad dx = ds\cos\alpha, \quad dy = ds\cos\beta, \quad dz = ds\cos\gamma;$$

pour qu'il en soit ainsi, il faut que

$$\varepsilon''' = \varepsilon'.$$

**6.** Ainsi, en résumé, nous avons donc

$$(15) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{x}{U} = \frac{y}{V} = \frac{z}{W} = \frac{1}{\Delta},\\ &\frac{dx}{U_2} = \frac{dy}{V_2} = \frac{dz}{W_2} = \frac{H}{\Delta^2},\\ &ds = \varepsilon' \frac{H}{\Delta^2}\sqrt{U_2^2 + V_2^2 + W_2^2},\\ &H = -(U\,d^3u + V\,d^3v + W\,d^3w);\end{aligned}\right.$$

$$(16) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\cos\lambda}{u} = \frac{\cos\mu}{v} = \frac{\cos\nu}{w} = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{u^2+v^2+w^2}},\\ &\frac{\cos\alpha}{U_2} = \frac{\cos\beta}{V_2} = \frac{\cos\gamma}{W_2} = \frac{1}{\varepsilon'\sqrt{U_2^2+V_2^2+W_2^2}},\\ &\frac{\cos\xi}{vW_2 - wV_2} = \frac{\cos\eta}{wU_2 - uW_2} = \frac{\cos\zeta}{uV_2 - vU_2}\\ &\qquad = \frac{1}{\varepsilon''\sqrt{u^2+v^2+w^2}\sqrt{U_2^2+V_2^2+W_2^2}}.\end{aligned}\right.$$

## § II. — *Détermination des quantités* $d\cos\alpha,\ldots$, $d\cos\lambda,\ldots$, $d\cos\xi,\ldots$; $d\sigma$, $d\tau$.

**7.** Nous avons trouvé

$$\cos\lambda = \frac{u}{\varepsilon\sqrt{u^2+v^2+w^2}};$$

on déduit de cette expression

$$d\cos\lambda = \frac{du(u^2+v^2+w^2)-u(udu+vdv+wdw)}{\varepsilon(u^2+v^2+w^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{wV_2-vW_2}{\varepsilon(u^2+v^2+w^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

On a donc les égalités

$$(17)\qquad \frac{d\cos\lambda}{wV_2-vW_2} = \frac{d\cos\mu}{uW_2-wU_2} = \frac{d\cos\nu}{vU_2-uV_2} = \frac{1}{\varepsilon(u^2+v^2+w^2)^{\frac{3}{2}}};$$

égalités qu'on peut encore écrire, eu égard au dernier groupe des relations (16),

$$(17\ bis)\qquad \frac{d\cos\lambda}{\cos\xi} = \frac{d\cos\mu}{\cos\eta} = \frac{d\cos\nu}{\cos\zeta} = -\varepsilon\varepsilon''\frac{\sqrt{U_2^2+V_2^2+W_2^2}}{u^2+v^2+w^2}.$$

On sait que

$$d\tau = \sqrt{(d\cos\lambda)^2+(d\cos\mu)^2+(d\cos\nu)^2};$$

par conséquent, d'après les valeurs (17 *bis*),

$$(18)\qquad d\tau = \varepsilon'''\frac{\sqrt{U_2^2+V_2^2+W_2^2}}{u^2+v^2+w^2}.$$

**8.** Nous avons trouvé, n° 6,

$$\cos\alpha = \frac{U_2}{\varepsilon'\sqrt{U_2^2+V_2^2+W_2^2}};$$

de là on déduit

$$d\cos\alpha = \frac{(U_2^2+V_2^2+W_2^2)dU_2 - (U_2dU_2+V_2dV_2+W_2dW_2)U_2}{\varepsilon'(U_2^2+V_2^2+W_2^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \frac{V_2(V_2dU_2 - U_2dV_2) - W_2(U_2dW_2 - W_2dU_2)}{\varepsilon'(U_2^2+V_2^2+W_2^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Mais les valeurs (3°) du n° **3** donnent

$$(19)\qquad \begin{cases} dU_2 = vd^2w - wd^2v = -U_1, \\ dV_2 = wd^2u - ud^2w = -V_1, \\ dW_2 = ud^2v - vd^2u = -W_1; \end{cases}$$

l'expression de $d\cos\alpha$ devient alors

$$d\cos\alpha = \frac{V_2(U_2V_1 - V_2U_1) - W_2(W_2U_1 - U_2W_1)}{\varepsilon'(U_2^2+V_2^2+W_2^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Or, si l'on pose

$$(20)\qquad D = \begin{vmatrix} U & V & W \\ U_1 & V_1 & W_1 \\ U_2 & V_2 & W_2 \end{vmatrix},$$

$U, V, \ldots, U_1, V_1, \ldots$ étant les déterminants partiels de $\Delta$, on sait que

$$(21)\qquad D = \Delta^2, \quad \frac{dD}{dU} = \Delta u, \quad \frac{dD}{dV} = \Delta v, \ldots;$$

d'après cela, on a, pour les valeurs de $d\cos\alpha$, $d\cos\beta$, $d\cos\gamma$,

$$(22)\qquad \frac{d\cos\alpha}{vW_2 - wV_2} = \frac{d\cos\beta}{wU_2 - uW_2} = \frac{d\cos\gamma}{uV_2 - vU_2} = \frac{\Delta}{\varepsilon'(U_2^2+V_2^2+W_2^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Eu égard au dernier groupe des relations (16), les égalités (22) peuvent encore s'écrire

$$(22\ bis)\qquad \frac{d\cos\alpha}{\cos\xi} = \frac{d\cos\beta}{\cos\eta} = \frac{d\cos\gamma}{\cos\zeta} = \varepsilon'\varepsilon''\frac{\Delta\sqrt{u^2+v^2+w^2}}{U_2^2+V_2^2+W_2^2}.$$

On sait d'ailleurs que

$$d\sigma = \sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2};$$

il résulte alors des valeurs (22 *bis*)

$$(23)\qquad d\sigma = \varepsilon^{\text{IV}} \frac{\Delta\sqrt{u^2+v^2+w^2}}{U_2^2+V_2^2+W_2^2}.$$

**9.** Calculons enfin $d\cos\xi$, $d\cos\eta$, $d\cos\zeta$.

On a trouvé, n° **6**,

$$\cos\xi = \frac{vW_2 - wV_2}{\varepsilon''\sqrt{u^2+v^2+w^2}\sqrt{U_2^2+V_2^2+W_2^2}};$$

on déduit de là, en différentiant,

$$\begin{aligned}
&\varepsilon''(u^2+v^2+w^2)^{\frac{3}{2}}(U_2^2+V_2^2+W^2)^{\frac{3}{2}}\,d\cos\xi \\
&\quad = (u^2+v^2+w^2)(U_2^2+V_2^2+W_2^2)(v\,dW_2 - w\,dV_2 + W_2\,dv - V_2\,dw) \\
&\qquad - (vW_2 - wV_2)\big[(uu_1+vv_1+ww_1)(U_2^2+V_2^2+W_2^2) \\
&\qquad\qquad + (u^2+v^2+w^2)(U_2\,dU_2 + V_2\,dV_2 + W_2\,dW_2)\big].
\end{aligned}$$

Eu égard aux relations (19), le second membre de l'égalité précédente peut s'écrire

$$\begin{aligned}
&(U_2^2+V_2^2+W_2^2)\big[(u^2+v^2+w^2)(v_1W_2 - w_1V_2) \\
&\qquad - (uu_1+vv_1+ww_1)(vW_2 - wV_2)\big] \\
&+ (u^2+v^2+w^2)\big[(U_2^2+V_2^2+W_2^2)(wV_1 - vW_1) \\
&\qquad + (U_2U_1+V_2V_1+W_2W_1)(vW_2 - wV_2)\big],
\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
&(U_2^2+V_2^2+W_2^2)\big[W_2(u^2v_1 + v^2v_1 + w_2v_1 - uvu_1 - v^2v_1 - vww_1) \\
&\qquad + V_2(uwu_1 + vwv_1 + w^2w_1 - u^2w_1 - v^2w_1 - w^2w_1)\big] \\
&+ (u^2+v^2+w^2)\big[w(U_2^2V_1 + V_2^2V_1 + W_2^2V_1 - U_2V_2U_1 - V_2^2V_1 - V_2W_2W_1) \\
&\qquad + v(U_2W_2U_1 + V_2W_2V_1 + W_2^2W_1 \\
&\qquad\qquad - U_2^2W_1 - V_2^2W_1 - W_2^2W_1)\big];
\end{aligned}$$

puis, en ayant égard aux relations (20), (21), n° **8**, (3°), n° **3**,

$$(U_2^2+V_2^2+W_2^2)[W_2(uW_2-wU_2)+V_2(uV_2-vU_2)]$$
$$+(u^2+v^2+w^2)\left[w\left(W_2\frac{dD}{dU}-U_2\frac{dD}{dW}\right)+v\left(V_2\frac{dD}{dU}-U_2\frac{dD}{dV}\right)\right],$$

ou encore

$$(U_2^2+V_2^2+W_2^2)[u(U_2^2+V_2^2+W_2^2)-U_2(uU_2+vV_2+wW_2)]$$
$$+\Delta(u^2+v^2+w^2)[u(uU_2+vV_2+wW_2)-U_2(u^2+v^2+w^2)],$$

expression qui se réduit définitivement à

$$u(U_2^2+V_2^2+W_2^2)^2-\Delta U_2(u^2+v^2+w^2)^2.$$

On a ainsi les formules

$$(24)\quad\left\{\begin{aligned}
\varepsilon'' d\cos\xi &= u\frac{\sqrt{U_2^2+V_2^2+W_2^2}}{(u^2+v^2+w^2)^{\frac{3}{2}}}-U_2\Delta\frac{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}{(U_2^2+V_2^2+W_2^2)^{\frac{3}{2}}},\\
\varepsilon'' d\cos\eta &= v\frac{\sqrt{U_2^2+V_2^2+W_2^2}}{(u^2+v^2+w^2)^{\frac{3}{2}}}-V_2\Delta\frac{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}{(U_2^2+V_2^2+W_2^2)^{\frac{3}{2}}},\\
\varepsilon'' d\cos\zeta &= w\frac{\sqrt{U_2^2+V_2^2+W_2^2}}{(u^2+v^2+w^2)^{\frac{3}{2}}}-W_2\Delta\frac{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}{(U_2^2+V_2^2+W_2^2)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}\right.$$

**10**. Nous allons maintenant établir la correspondance des quantités $\varepsilon$, $\varepsilon'$, $\varepsilon''$, $\varepsilon'''$, $\varepsilon^{\text{IV}}$, de manière à vérifier en grandeur et en signe les *relations fondamentales* données par M. J. Serret (*Calcul différentiel* de M. Bertrand, p. 622) :

$$(25)\quad\left\{\begin{aligned}
&d\cos\alpha=\cos\xi\, d\sigma, && d\cos\lambda=\cos\xi\, d\tau, && d\cos\xi=-\cos\alpha\, d\sigma-\cos\lambda\, d\tau,\\
&d\cos\beta=\cos\eta\, d\sigma, && d\cos\mu=\cos\eta\, d\tau, && d\cos\eta=-\cos\beta\, d\sigma-\cos\mu\, d\tau,\\
&d\cos\gamma=\cos\zeta\, d\sigma; && d\cos\nu=\cos\zeta\, d\tau; && d\cos\zeta=-\cos\gamma\, d\sigma-\cos\nu\, d\tau.
\end{aligned}\right.$$

Eu égard aux formules (16), (17), (18), (22), (23), (24), les relations (23) donnent

$$(26)\quad\left\{\begin{aligned}
\varepsilon^{\text{IV}} &= \varepsilon'\varepsilon'',\\
\varepsilon''' &= -\varepsilon\varepsilon'';
\end{aligned}\right.$$

ce sont les seules conditions nécessaires pour que les relations (25) soient vérifiées.

Maintenant nous pouvons imposer aux quantités R et T, définies par les égalités

$$(25\ bis)\qquad R = \frac{ds}{d\sigma},\quad T = \frac{ds}{d\tau},$$

la condition d'être positives.

Or, d'après les formules (15), (18) et (23), et les relations (26), on a

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} R &= \varepsilon''\frac{H}{\Delta^3}\frac{(U_2^2+V_2^2+W_2^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}},\\ T &= -\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''\frac{H}{\Delta^2}(u^2+v^2+w^2).\end{aligned}\right.$$

Les quantités R et T devant être positives, on a les conclusions suivantes :

$$\text{si}\quad \frac{H}{\Delta} > 0,\quad \varepsilon'' = +1\quad \text{et}\left\{\begin{aligned} \varepsilon' &= -\varepsilon,\quad \text{si}\quad \Delta > 0,\\ \varepsilon' &= +\varepsilon,\quad \text{si}\quad \Delta < 0;\end{aligned}\right.$$

$$\text{si}\quad \frac{H}{\Delta} < 0,\quad \varepsilon'' = -1\quad \text{et}\left\{\begin{aligned} \varepsilon' &= -\varepsilon,\quad \text{si}\quad \Delta > 0,\\ \varepsilon' &= +\varepsilon,\quad \text{si}\quad \Delta < 0.\end{aligned}\right.$$

**11.** En résumé, nous avons les formules qui suivent.

On a posé :

$$(\mathrm{I})\quad\left\{\begin{aligned} &(1)\left\{\begin{aligned} u_1 &= du, & u_2 &= d^2u,\\ v_1 &= dv, & v_2 &= d^2v,\\ w_1 &= dw, & w_2 &= d^2w;\end{aligned}\right. \qquad (2)\quad \Delta = \begin{vmatrix} u & v & w\\ u_1 & v_1 & w_1\\ u_2 & v_2 & w_2\end{vmatrix};\\ &(3)\left\{\begin{aligned} U &= \frac{d\Delta}{du}, & V &= \frac{d\Delta}{dv}, & W &= \frac{d\Delta}{dw},\\ U_2 &= \frac{d\Delta}{du_2}, & V_2 &= \frac{d\Delta}{dv_2}, & W_2 &= \frac{d\Delta}{dw_2};\end{aligned}\right.\\ &(4)\quad H = -(U d^3u + V d^3v + W d^3w),\end{aligned}\right.$$

et l'on a alors

$$
\text{(II)}\quad\left\{
\begin{array}{ll}
(1) & \dfrac{x}{\mathrm{U}} = \dfrac{y}{\mathrm{V}} = \dfrac{z}{\mathrm{W}} = \dfrac{1}{\Delta}, \\[2ex]
(2) & \dfrac{dx}{\mathrm{U}_2} = \dfrac{dy}{\mathrm{V}_2} = \dfrac{dz}{\mathrm{W}_2} = \dfrac{\mathrm{H}}{\Delta^2}, \\[2ex]
(3) & ds = \varepsilon' \dfrac{\mathrm{H}}{\Delta^2}\sqrt{\mathrm{U}_2^2 + \mathrm{V}_2^2 + \mathrm{W}_2^2};
\end{array}
\right.
$$

$$
\text{(III)}\quad\left\{
\begin{array}{ll}
(1) & \dfrac{\cos\lambda}{u} = \dfrac{\cos\mu}{v} = \dfrac{\cos\nu}{w} = \dfrac{1}{\varepsilon\sqrt{u^2+v^2+w^2}}, \\[2ex]
(2) & \dfrac{\cos\alpha}{\mathrm{U}_2} = \dfrac{\cos\beta}{\mathrm{V}_2} = \dfrac{\cos\gamma}{\mathrm{W}_2} = \dfrac{1}{\varepsilon'\sqrt{\mathrm{U}_2^2+\mathrm{V}_2^2+\mathrm{W}_2^2}}, \\[2ex]
(3) & \dfrac{\cos\xi}{v\mathrm{W}_2 - w\mathrm{V}_2} = \dfrac{\cos\eta}{w\mathrm{U}_2 - u\mathrm{W}_2} = \dfrac{\cos\zeta}{u\mathrm{V}_2 - v\mathrm{U}_2} = \dfrac{1}{\varepsilon''\sqrt{u^2+v^2+w^2}\sqrt{\mathrm{U}_2^2+\mathrm{V}_2^2+\mathrm{W}_2^2}}.
\end{array}
\right.
$$

$$
\text{(IV)}\quad\left\{
\begin{array}{ll}
(1) & \dfrac{d\cos\lambda}{w\mathrm{V}_2 - v\mathrm{W}_2} = \dfrac{d\cos\mu}{u\mathrm{W}_2 - w\mathrm{U}_2} = \dfrac{d\cos\nu}{v\mathrm{U}_2 - u\mathrm{V}_2} = \dfrac{1}{\varepsilon(u^2+v^2+w^2)^{\frac{3}{2}}}, \\[2ex]
(2) & \dfrac{d\cos\alpha}{v\mathrm{W}_2 - w\mathrm{V}_2} = \dfrac{d\cos\beta}{w\mathrm{U}_2 - u\mathrm{W}_2} = \dfrac{d\cos\gamma}{u\mathrm{V}_2 - v\mathrm{U}_2} = \dfrac{\Delta}{\varepsilon'(\mathrm{U}_2^2+\mathrm{V}_2^2+\mathrm{W}_2^2)^{\frac{3}{2}}}. \\[2ex]
(3) & \left\{\begin{array}{l}
\varepsilon'' d\cos\xi = u\dfrac{\sqrt{\mathrm{U}_2^2+\mathrm{V}_2^2+\mathrm{W}_2^2}}{(u^2+v^2+w^2)^{\frac{3}{2}}} - \mathrm{U}_2\,\Delta\dfrac{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}{(\mathrm{U}_2^2+\mathrm{V}_2^2+\mathrm{W}_2^2)^{\frac{3}{2}}}; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.
\end{array}
\right.
$$

$$
\text{(V)}\quad\left\{
\begin{array}{ll}
(1) & d\tau = -\,\varepsilon\varepsilon''\dfrac{\sqrt{\mathrm{U}_2^2+\mathrm{V}_2^2+\mathrm{W}_2^2}}{u^2+v^2+w^2}, \\[2ex]
(2) & d\sigma = \varepsilon'\varepsilon''\dfrac{\Delta\sqrt{u^2+v^2+w^2}}{\mathrm{U}_2^2+\mathrm{V}_2^2+\mathrm{W}_2^2}, \\[2ex]
(3) & \mathrm{R} = \varepsilon''\dfrac{\mathrm{H}}{\Delta^3}\dfrac{(\mathrm{U}_2^2+\mathrm{V}_2^2+\mathrm{W}_2^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}, \\[2ex]
(4) & \mathrm{T} = -\,\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''\dfrac{\mathrm{H}}{\Delta^2}(u^2+v^2+w^2).
\end{array}
\right.
$$

Les lettres $\varepsilon$, $\varepsilon'$, $\varepsilon''$ désignent $\pm 1$; ainsi on a

$$\varepsilon = \pm 1, \quad \varepsilon' = \pm 1, \quad \varepsilon'' \pm 1.$$

J'ai adopté des lettres différentes pour conserver au choix des signes +

et — toute l'indépendance qu'il peut avoir; les radicaux doivent être pris en valeur absolue.

*Remarque I.* — Dans les formules qui précèdent, les combinaisons des quantités $\varepsilon$, $\varepsilon'$, $\varepsilon''$ ont été faites de manière à vérifier constamment, en grandeur et en signe, les relations importantes

$$\begin{aligned} dx &= ds\cos\alpha, & d\cos\lambda &= \cos\xi\, d\tau; \\ d\cos\alpha &= \cos\xi\, d\sigma; & d\cos\xi &= -\cos\alpha\, d\sigma - \cos\lambda\, d\tau; \\ &\ldots\ldots\ldots, & &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

*Remarque II.* — Si l'on assujettit les quantités R et T à être positives, on a les conditions suivantes :

$$\text{(VII)} \quad \begin{cases} \varepsilon' = -\varepsilon, \quad \text{si} \quad \Delta > 0; \quad \varepsilon'' = +1, \quad \text{si} \quad \dfrac{H}{\Delta} > 0, \\ \varepsilon' = +\varepsilon, \quad \text{si} \quad \Delta < 0; \quad \varepsilon'' = -1, \quad \text{si} \quad \dfrac{H}{\Delta} < 0. \end{cases}$$

*Remarque III.* — Les formules précédentes ne sont pas applicables aux développables circonscrites au cercle imaginaire de l'infini (*voir* la note 1).

## § III. — *Cône droit osculateur.*

**12.** Nous appellerons *cône droit osculateur* en M un cône ayant son sommet en M et touchant trois plans tangents infiniment voisins.

Nous pouvons définir ce cône par son sommet, dont l'équation tangentielle est celle du point M, savoir :

$$(1) \qquad \mathfrak{v}x + \mathfrak{P}y + \mathfrak{W}z - 1 = 0,$$

et par une sphère dont l'équation tangentielle sera

$$(2) \qquad (a\mathfrak{v} + b\mathfrak{P} + c\mathfrak{W} - 1)^2 = \mathfrak{R}^2(\mathfrak{v}^2 + \mathfrak{P}^2 + \mathfrak{W}^2);$$

$\mathfrak{v}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{W}$ sont les coordonnées tangentielles variables; $a$, $b$, $c$ sont les coordonnées ponctuelles du centre de la sphère (2); $\mathfrak{R}$ est son rayon.

Exprimons maintenant que la sphère (2) touche les trois plans tangents infiniment voisins :

$$(u,\ v,\ w);\quad (u+du,\ v+dv,\ w+dw);$$
$$(u+2du+d^2u,\ v+2dv+d^2v,\ w+2dw+d^2w);$$

on a, après avoir extrait la racine carrée,

$$(2)\left\{\begin{aligned}
&au+bv+cw = 1+\mathfrak{R}\sqrt{u^2+v^2+w)^2},\\
&a(u+du)+b(v+dv)+c(w+dw)\\
&\quad = 1+\mathfrak{R}\sqrt{(u+du)^2+(v+dv)^2+(w+dw)^2},\\
&a(u+2du+d^2u)+b(v+2dv+d^2v)+c(w+2dw+d^2w)\\
&\quad = 1+\mathfrak{R}\sqrt{(u+2du+d^2u)^2+(v+2dv+d^2v)^2+(w+2dw+d^2w)^2};
\end{aligned}\right.$$

$\mathfrak{R}$ représente *plus* ou *moins* la distance du point $(a, b, c)$ au plan $(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W})$; pour trois plans infiniment voisins et quelconques, cette distance ne change pas de signe : on doit donc attribuer le même signe aux radicaux qui entrent dans les équations (3). Mais ces trois équations simultanées peuvent se remplacer par les suivantes, dont les deux dernières ont été obtenues en différentiant successivement la première :

$$(4)\left\{\begin{aligned}
&au+bv+cw = 1+\frac{\mathfrak{R}}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}(u^2+v^2+w^2),\\
&adu+bdv+cdw = \frac{\mathfrak{R}}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}(udu+vdv+wdw),\\
&ad^2u+bd^2v+cd^2w = \frac{\mathfrak{R}}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\Big(ud^2u+vd^2v+wd^2w\\
&\qquad\qquad +\frac{U_2^2+V_2^2+W_2^2}{u^2+v^2+w^2}\Big).
\end{aligned}\right.$$

Pour résoudre ces équations par rapport à $a$, $b$, $c$, multiplions-les par U, $U_1$, $U_2$, puis par V, $V_1$, $V_2$, enfin par W, $W_1$, $W_2$, et ajoutons;

eu égard aux notations du n° **3**, il vient

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} a\Delta &= \mathrm{U} + \frac{\mathfrak{R}}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\left[u\Delta + \mathrm{U}_2\,\frac{\mathrm{U}_2^2+\mathrm{V}_2^2+\mathrm{W}_2^2}{u^2+v^2+w^2}\right],\\ b\Delta &= \mathrm{V} + \frac{\mathfrak{R}}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\left[v\Delta + \mathrm{V}_2\,\frac{\mathrm{U}_2^2+\mathrm{V}_2^2+\mathrm{W}_2^2}{u^2+v^2+w^2}\right],\\ c\Delta &= \mathrm{W} + \frac{\mathfrak{R}}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\left[w\Delta + \mathrm{W}_2\,\frac{\mathrm{U}_2^2+\mathrm{V}_2^2+\mathrm{W}_2^2}{u^2+v^2+w^2}\right]. \end{aligned}\right.$$

Les formules (II), (III), (V) du n° **11** permettent d'écrire comme il suit les équations qui précèdent :

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} a &= x + \varepsilon\mathfrak{R}\left[\cos\lambda - \cos\alpha\,\frac{d\tau}{d\sigma}\right],\\ b &= y + \varepsilon\mathfrak{R}\left[\cos\mu - \cos\beta\,\frac{d\tau}{d\sigma}\right],\\ c &= z + \varepsilon\mathfrak{R}\left[\cos\nu - \cos\gamma\,\frac{d\tau}{d\sigma}\right]. \end{aligned}\right.$$

Les équations tangentielles du cône droit osculateur sont alors

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{U}x + \mathfrak{V}y + \mathfrak{W}z - 1 = 0,\\ &\left[\mathfrak{U}\left(\cos\lambda - \frac{d\tau}{d\sigma}\cos\alpha\right) + \mathfrak{V}\left(\cos\mu - \frac{d\tau}{d\sigma}\cos\beta\right) + \mathfrak{W}\left(\cos\nu - \frac{d\tau}{d\sigma}\cos\gamma\right)\right]^2\\ &\quad = \mathfrak{U}^2 + \mathfrak{V}^2 + \mathfrak{W}^2; \end{aligned}\right.$$

la seconde des équations (7) représente un cercle à l'infini inscrit dans le cône osculateur.

Ce cône doit évidemment toucher le plan ($u$, $v$, $w$) suivant la génératrice (ou tangente) $\alpha$, $\beta$, $\gamma$; l'axe de ce cône est donc situé dans le *plan rectifiant*. La vérification de ce fait sera d'ailleurs facile à l'aide des formules que nous allons établir.

**13.** Déterminons maintenant l'axe de ce cône et son angle au sommet.

Désignons par $\theta$ le demi-angle au sommet (angle aigu) du cône droit osculateur; par $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ les angles de son axe avec les axes de coordonnées.

Puisque le centre de la sphère inscrite est évidemment sur l'axe du cône, on a

$$(8)\qquad \frac{\cos\alpha'}{a-x} = \frac{\cos\beta'}{b-y} = \frac{\cos\gamma'}{c-z} = \frac{\sin\theta}{\mathfrak{R}}.$$

Il est entendu que $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ désignent les angles que fait, avec les axes positifs de coordonnées, le demi-axe du cône osculateur, prolongé à partir du sommet M de manière à faire, avec la demi-droite définie par les angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, un *angle aigu* $\theta$; d'ailleurs les angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont donnés sans ambiguïté par les formules (III) du n° **11**.

Si l'on substitue les valeurs (6) dans les équations (8), il vient

$$(9)\qquad \begin{cases} \cos\alpha' = \varepsilon_1\varepsilon\sin\theta\left[\dfrac{d\tau}{d\sigma}\cos\alpha - \cos\lambda\right], \\ \cos\beta' = \varepsilon_1\varepsilon\sin\theta\left[\dfrac{d\tau}{d\sigma}\cos\beta - \cos\mu\right], \\ \cos\gamma' = \varepsilon_1\varepsilon\sin\theta\left[\dfrac{d\tau}{d\sigma}\cos\gamma - \cos\nu\right]; \end{cases}$$

$\varepsilon_1$ désigne $\pm 1$, et se trouve introduit à cause de l'indétermination du signe de $\mathfrak{R}$. Nous allons choisir $\varepsilon_1$ par la condition que l'angle $\theta$ est aigu, et que $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ définissent la direction du demi-axe faisant cet angle aigu avec la demi-droite ($\alpha$, $\beta$, $\gamma$).

En multipliant les équations (9) par $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ et en ajoutant, on trouve

$$(10)\qquad \cos\theta = \varepsilon_1\varepsilon\sin\theta\frac{d\tau}{d\sigma}.$$

Or, d'après les formules (V) du n° **11**, on a

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\Delta\frac{(u^2+v^2+w^2)^{\frac{3}{2}}}{(U_2^2+V_2^2+W_2^2)^{\frac{3}{2}}};$$

par conséquent,

$$(11)\qquad \tang\theta = -\varepsilon_1\varepsilon'\Delta\frac{(u^2+v^2+w^2)^{\frac{3}{2}}}{(U_2^2+V_2^2+W_2^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

L'angle $\theta$ étant aigu par convention, sa tangente doit être positive; mais nous avons vu, n° **11**, *Remarque II*, qu'on doit prendre $\varepsilon' = -\varepsilon$ ou $\varepsilon' = +\varepsilon$, suivant que $\Delta$ est positif ou négatif; d'après cela, le produit $(-\varepsilon\varepsilon'\Delta)$ est toujours positif; par suite, en supposant $\varepsilon_1 = \varepsilon$, l'expression de $\operatorname{tang}\theta$ sera toujours positive, eu égard aux conventions faites.

Ainsi, *les angles $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, avec les axes positifs de coordonnées, du demi-axe du cône droit osculateur faisant l'*ANGLE AIGU *$\theta$ avec la demi-droite définie par les angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, seront donnés sans ambiguïté par les formules suivantes :*

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos\alpha' &= \sin\theta\left(\frac{d\tau}{d\sigma}\cos\alpha - \cos\lambda\right), \\ \cos\beta' &= \sin\theta\left(\frac{d\tau}{d\sigma}\cos\beta - \cos\mu\right), \\ \cos\gamma' &= \sin\theta\left(\frac{d\tau}{d\sigma}\cos\gamma - \cos\nu\right): \end{aligned}\right.$$

et l'angle aigu $\theta$ est donné par la formule

$$(13)\qquad \operatorname{tang}\theta = \frac{d\sigma}{d\tau} = -\varepsilon\varepsilon'\Delta\frac{(u^2+v^2+w^2)^{\frac{3}{2}}}{(U_2^2+V_2^2+W_2^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

D'ailleurs, si l'on pose

$$d\omega = \varepsilon_2\sqrt{d\sigma^2 + d\tau^2},$$

on a

$$\sin\theta = \frac{d\sigma}{d\omega},\quad \cos\theta = \frac{d\tau}{d\omega}.$$

et, eu égard aux formules (V) du n° **11**,

$$\sin\theta = \frac{\varepsilon'\varepsilon''}{\varepsilon_2}\frac{\Delta\sqrt{u^2+v^2+w^2}}{(U_2^2+V_2^2+W_2^2)\sqrt{d\sigma^2+d\tau^2}},\quad \cos\theta = -\frac{\varepsilon\varepsilon''}{\varepsilon_2}\frac{\sqrt{U_2^2+V_2^2+W_2^2}}{(u^2+v^2+w^2)\sqrt{d\sigma^2+d\tau^2}}.$$

Mais l'angle $\theta$ est aigu par définition; son cosinus et son sinus doivent donc être positifs, c'est-à-dire qu'on doit avoir à la fois

$$\varepsilon_2\varepsilon'\varepsilon''\Delta > 0 \quad\text{et}\quad -\varepsilon\varepsilon''\varepsilon_2 > 0;$$

or, comme $\varepsilon' = -\varepsilon$ ou $\varepsilon' = +\varepsilon$, suivant que $\Delta$ est positif ou négatif, on voit que ces inégalités seront toutes deux satisfaites si l'on prend $\varepsilon_2 = -\varepsilon\varepsilon''$. Par conséquent, on aura sans ambiguïté

$$\sin\theta = \frac{d\sigma}{d\omega}, \quad \cos\theta = \frac{d\tau}{d\omega}, \tag{14}$$

après avoir posé

$$d\omega = -\varepsilon\varepsilon''\sqrt{d\sigma^2 + d\tau^2}. \tag{15}$$

**14.** Ainsi, en résumé,

*Les équations tangentielles du cône osculateur en* $M(x, y, z)$ *sont*

$$\text{(VII)}\left\{\begin{aligned} &\mathfrak{V}x + \mathfrak{P}y + \mathfrak{W}z - 1 = 0,\\ &\left[\mathfrak{V}\left(\cos\lambda - \frac{d\tau}{d\sigma}\cos\alpha\right) + \mathfrak{P}\left(\cos\mu - \frac{d\tau}{d\sigma}\cos\beta\right) + \mathfrak{W}\left(\cos\nu - \frac{d\tau}{d\sigma}\cos\gamma\right)\right]^2\\ &\quad = \mathfrak{V}^2 + \mathfrak{P}^2 + \mathfrak{W}^2; \end{aligned}\right.$$

$\mathfrak{V}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{W}$ sont les coordonnées tangentielles variables.

Désignons par $\theta$ l'*angle aigu* que fait le demi-axe du cône osculateur avec la demi-droite définie par les angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$; représentons par $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ les angles que fait, avec les axes positifs des coordonnées, le demi-axe que nous venons de définir. Si l'on pose

$$\text{(VIII)}\left\{\begin{aligned} &(1)\quad d\omega = -\varepsilon\varepsilon''\sqrt{d\sigma^2 + d\tau^2},\\ &\text{on aura sans ambiguïté}\\ &(2)\quad \sin\theta = \frac{d\sigma}{d\omega}, \quad \cos\theta = \frac{d\tau}{d\omega}, \quad \operatorname{tang}\theta = \frac{d\sigma}{d\tau};\\ &(3)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\alpha' &= \cos\alpha\cos\theta - \cos\lambda\sin\theta,\\ \cos\beta' &= \cos\beta\cos\theta - \cos\mu\sin\theta,\\ \cos\gamma' &= \cos\gamma\cos\theta - \cos\nu\sin\theta; \end{aligned}\right. \end{aligned}\right.$$

les quantités $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $d\sigma$, $d\tau$ sont définies par les formules du n° **11**, et les $\varepsilon$, $\varepsilon'$, $\varepsilon''$ ont toujours la signification précisée dans la *Remarque II* du même numéro.

**15.** Je rappellerai les propriétés suivantes bien connues :

1° *La quantité $d\omega$ est l'angle de deux normales infiniment voisines;*

2° *L'axe du cône droit osculateur est l'intersection de deux plans rectifiants infiniment voisins.*

J'ai déjà dit qu'on nomme *plan rectifiant* le plan mené par la tangente $(\alpha, \beta, \gamma)$ à l'arête de rebroussement perpendiculairement au plan osculateur correspondant; ce plan osculateur n'est autre que le plan tangent $(u, v, w)$ à la développable.

Ces plans enveloppent une surface développable qui a été nommée *développable rectifiante,* d'après cette propriété évidente que la courbe primitive est une ligne géodésique de cette développable.

3° *L'axe du cône osculateur est donc une génératrice de la développable rectifiante.*

4° Si l'on considère un point quelconque I de la génératrice $MG(\alpha, \beta, \gamma)$ appartenant à la surface développable considérée, le rayon de courbure $R_1$ de la section principale, faite en ce point dans la surface développable, a pour valeur $d\tang\theta$; $d$ est la distance du point considéré I au point correspondant M de l'arête de rebroussement; $\theta$ est le demi-angle au sommet du cône osculateur.

On voit, en outre, que le centre de courbure se trouve sur l'axe du cône osculateur; de sorte que :

*La développable rectifiante est le lieu des centres de courbure principale pour la surface développable primitive.*

Quoique le sujet ait déjà été abordé plusieurs fois, il y a donc quelque intérêt à revenir un peu sur la développable rectifiante; ce sera l'objet du paragraphe suivant.

### § IV. — *Développable rectifiante.*

**16.** Je rappellerai d'abord les relations suivantes, qui existent entre trois directions rectangulaires $(\alpha, \beta, \gamma)$, $(\lambda, \mu, \nu)$, $(\xi, \eta, \zeta)$ :

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \\ \cos^2\xi + \cos^2\eta + \cos^2\zeta = 1, \\ \cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1; \\ \cos\alpha\cos\xi + \cos\beta\cos\eta + \cos\gamma\cos\zeta = 0, \\ \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = 0, \\ \cos\lambda\cos\xi + \cos\mu\cos\eta + \cos\nu\cos\zeta = 0; \end{array}\right.$$

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} \cos^2\alpha + \cos^2\xi + \cos^2\lambda = 1, \\ \cos^2\beta + \cos^2\eta + \cos^2\mu = 1, \\ \cos^2\gamma + \cos^2\zeta + \cos^2\nu = 1; \\ \cos\alpha\cos\beta + \cos\xi\cos\eta + \cos\lambda\cos\mu = 0, \\ \cos\alpha\cos\gamma + \cos\xi\cos\zeta + \cos\lambda\cos\nu = 0, \\ \cos\beta\cos\gamma + \cos\eta\cos\zeta + \cos\mu\cos\nu = 0. \end{array}\right.$$

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} \cos\lambda & \cos\mu & \cos\nu \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\xi & \cos\eta & \cos\zeta \end{vmatrix} = \varepsilon_0, \qquad \varepsilon_0 = \pm 1.$$

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} \cos\lambda = \varepsilon_0(\cos\beta\cos\zeta - \cos\gamma\cos\eta), \\ \cos\mu = \varepsilon_0(\cos\gamma\cos\xi - \cos\alpha\cos\zeta), \\ \cos\nu = \varepsilon_0(\cos\alpha\cos\eta - \cos\beta\cos\xi); \\ \cos\xi = \varepsilon_0(\cos\mu\cos\gamma - \cos\nu\cos\beta), \\ \cos\eta = \varepsilon_0(\cos\nu\cos\alpha - \cos\lambda\cos\gamma), \\ \cos\zeta = \varepsilon_0(\cos\lambda\cos\beta - \cos\mu\cos\alpha); \\ \cos\alpha = \varepsilon_0(\cos\eta\cos\nu - \cos\eta\cos\mu), \\ \cos\beta = \varepsilon_0(\cos\zeta\cos\lambda - \cos\xi\cos\nu), \\ \cos\gamma = \varepsilon_0(\cos\xi\cos\mu - \cos\zeta\cos\lambda). \end{array}\right.$$

On a, en outre, les relations déjà citées plusieurs fois :

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{ll} dx = ds\cos\alpha, & d.\cos\alpha = \cos\xi\, d\sigma, \\ dy = ds\cos\beta, & d.\cos\beta = \cos\eta\, d\sigma, \\ dz = ds\cos\gamma; & d.\cos\gamma = \cos\zeta\, d\sigma; \\ d.\cos\lambda = \cos\xi\, d\tau, & d.\cos\xi = -\cos\alpha\, d\sigma - \cos\lambda\, d\tau, \\ d.\cos\mu = \cos\eta\, d\tau, & d.\cos\eta = -\cos\beta\, d\sigma - \cos\mu\, d\tau, \\ d.\cos\nu = \cos\zeta\, d\tau; & d.\cos\zeta = -\cos\gamma\, d\sigma - \cos\nu\, d\tau. \end{array}\right.$$

**17.** En désignant par $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ les angles de l'axe du cône osculateur faisant l'*angle aigu* $\theta$ avec la droite $(\alpha, \beta, \gamma)$, on a trouvé, n° **14**,

$$(\mathrm{VIII})\quad \left\{\begin{array}{ll} (1) & \left\{\begin{array}{l} \cos\alpha' = \cos\alpha\cos\theta - \cos\lambda\sin\theta, \\ \cos\beta' = \cos\beta\cos\theta - \cos\mu\sin\theta, \\ \cos\gamma' = \cos\gamma\cos\theta - \cos\nu\sin\theta; \end{array}\right. \\ (2) & \sin\theta = \frac{d\sigma}{d\omega}, \quad \cos\theta = \frac{d\tau}{d\omega}, \quad \operatorname{tang}\theta = \frac{d\sigma}{d\tau}; \\ (3) & d\omega = -\varepsilon\varepsilon''\sqrt{d\sigma^2 + d\tau^2}. \end{array}\right.$$

Constatons d'abord que *l'axe du cône osculateur est l'intersection de deux plans rectifiants infiniment voisins.*

Le plan rectifiant passe par le point $(x, y, z)$ et a pour axe la normale principale $(\xi, \eta, \zeta)$; son équation est donc

$$(1^\circ)\qquad (\mathrm{X} - x)\cos\xi + (\mathrm{Y} - y)\cos\eta + (\mathrm{Z} - z)\cos\zeta = 0;$$

en différentiant cette équation et en ayant égard aux relations (5) et (1) du n° **16**, il vient

$$(2^\circ)\qquad (\mathrm{X} - x)d.\cos\xi + (\mathrm{Y} - y)d.\cos\eta + (\mathrm{Z} - z)d.\cos\zeta = 0.$$

Ces deux équations déterminent l'intersection de deux plans rectifiants infiniment voisins; or cette intersection est parallèle à la droite $(\alpha', \beta', \gamma')$, car on constate immédiatement que cette dernière droite est perpendiculaire aux axes des deux plans (1°) et (2°), c'est-à-dire qu'on a

$$(3^\circ)\qquad \left\{\begin{array}{l} \cos\alpha' \cos\xi \;+\; \cos\beta' \cos\eta \;+\; \cos\gamma' \cos\zeta \;= o, \\ \cos\alpha' d.\cos\xi + \cos\beta' d.\cos\eta + \cos\gamma' d.\cos\eta = o. \end{array}\right.$$

**18.** Nous désignerons les éléments de l'arête de rebroussement de la *développable rectifiante* par les mêmes lettres que précédemment, en les accentuant. Ainsi nous représenterons par :

$x', y', z'$ les coordonnées du point M' intersection de deux génératrices infiniment voisines de la développable rectifiante; M' sera le *point correspondant* au point M;

$\alpha', \beta', \gamma'$ les angles de la tangente en M' à l'arête de rebroussement de la développable rectifiante;

$\lambda', \mu', \nu'$ les angles de l'axe du plan osculateur;

$\xi', \eta', \zeta'$ ceux de la normale principale;

$ds'$ l'élément, en M', de l'arête de rebroussement de la développable rectifiante;

$d\sigma'$ l'angle de deux tangentes infiniment voisines;

$d\tau'$ l'angle de deux plans osculateurs infiniment voisins;

$\theta'$ l'angle au sommet du cône droit osculateur à la rectifiante.

**19.** Le plan rectifiant de la développable primitive est précisément le plan qui enveloppe la développable rectifiante : il est donc son plan osculateur; par conséquent,

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} \varepsilon_2 \cos\lambda' = \cos\xi, \\ \varepsilon_2 \cos\mu' = \cos\eta, \\ \varepsilon_2 \cos\nu' = \cos\zeta. \end{array}\right.$$

Les valeurs de $\cos\xi'$, $\cos\eta'$, $\cos\zeta'$ seront données par le second groupe des formules (4), n° **16**, en ayant égard aux formules (1), n° **17**, et (6), n° **19**; on trouve ainsi

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{l} \varepsilon_3 \cos\xi' = -(\cos\lambda \cos\theta + \cos\alpha \sin\theta) = \dfrac{d.\cos\xi}{d\omega}, \\ \varepsilon_3 \cos\eta' = -(\cos\mu \cos\theta + \cos\beta \sin\theta) = \dfrac{d.\cos\eta}{d\omega}, \\ \varepsilon_3 \cos\zeta' = -(\cos\nu \cos\theta + \cos\gamma \sin\theta) = \dfrac{d.\cos\zeta}{d\omega}; \end{array}\right.$$

car l'emploi des formules du n° **16**, pour des systèmes différents $\alpha,\ldots,\ \lambda,\ldots,\ \xi,\ldots;\ \alpha',\ldots,\ \lambda',\ldots,\ \xi',\ldots$ de directions rectangulaires, donne lieu à l'introduction de plusieurs facteurs $\varepsilon_0$, $\varepsilon'_0$ dont nous désignons le groupement par $\varepsilon_3$.

**20.** Calculons maintenant $d.\cos\alpha',\ldots;\ d.\cos\lambda',\ldots;\ d.\cos\mu',\ldots$.

La première des relations (1), n° **17**, donne

$$d.\cos\alpha' = d.\cos\alpha\cos\theta - \sin\theta\, d.\cos\lambda - (\cos\alpha\sin\theta + \cos\lambda\cos\theta)\,d\theta;$$

eu égard aux relations (5), n° **16**, et aux relations (2), n° **17**, on trouve la première des égalités suivantes :

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} d.\cos\alpha' &= -(\cos\alpha\sin\theta+\cos\lambda\cos\theta)\,d\theta = \frac{d\theta}{d\omega}d.\cos\xi = \cos\xi'.d\theta.\varepsilon_3,\\ d.\cos\beta' &= -(\cos\beta\sin\theta+\cos\mu\cos\theta)\,d\theta = \frac{d\theta}{d\omega}d.\cos\eta = \cos\eta'.d\theta.\varepsilon_3,\\ d.\cos\gamma' &= -(\cos\gamma\sin\theta+\cos\nu\cos\theta)\,d\theta = \frac{d\theta}{d\omega}d.\cos\zeta = \cos\zeta'.d\theta.\varepsilon_3.\end{aligned}\right.$$

Des relations (6), n° **19**, et (5), n° **16**, on conclut

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \varepsilon_2 d.\cos\lambda' &= d.\cos\xi = -\cos\alpha\,d\sigma - \cos\lambda\,d\tau = \varepsilon_3\cos\xi'.d\omega,\\ \varepsilon_2 d.\cos\mu' &= d.\cos\eta = -\cos\beta\,d\sigma - \cos\mu\,d\tau = \varepsilon_3\cos\eta'.d\omega,\\ \varepsilon_2 d.\cos\nu' &= d.\cos\zeta = -\cos\gamma\,d\sigma - \cos\nu\,d\tau = \varepsilon_3\cos\zeta'.d\omega.\end{aligned}\right.$$

Enfin des relations (7), n° **19**, nous tirons

$$\varepsilon_3\, d.\cos\xi' = -\cos\theta\, d.\cos\lambda - \sin\theta\, d.\cos\alpha + (\cos\lambda\sin\theta - \cos\alpha\cos\theta)\,d\theta;$$

puis, en ayant égard aux relations (5), n° **16**, (1) et (2), n° **17**, on a la première des égalités qui suivent :

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \varepsilon_3 d.\cos\xi' &= -\cos\alpha'\,d\theta - \cos\xi\,d\omega = -\cos\alpha'\,d\theta - \varepsilon_2\cos\lambda'\,d\omega,\\ \varepsilon_3 d.\cos\eta' &= -\cos\beta\,d\theta - \cos\eta\,d\omega = -\cos\beta'\,d\theta - \varepsilon_2\cos\mu'\,d\omega,\\ \varepsilon_3 d.\cos\zeta' &= -\cos\gamma\,d\theta - \cos\zeta\,d\omega = -\cos\gamma'\,d\theta - \varepsilon_2\cos\nu'\,d\omega.\end{aligned}\right.$$

**21.** Des valeurs (8) et (9) on déduit

$$d\sigma' = \sqrt{(d.\cos\alpha')^2 + (d.\cos\beta')^2 + (d.\cos\gamma')^2} = \pm\, d\theta,$$
$$d\tau' = \sqrt{(d.\cos\lambda')^2 + (d.\cos\mu')^2 + (d.\cos\nu')^2} = \pm\sqrt{d\sigma^2 + d\tau^2} = \pm\, d\omega.$$

Comme il importe de vérifier toujours les relations types

$$(11)\qquad \left\{\begin{array}{l} d.\cos\alpha' = \cos\xi' d\sigma'; \ldots\ldots\ldots\ldots; \\ d.\cos\lambda' = \cos\xi' d\tau'; \ldots\ldots\ldots\ldots; \\ d.\cos\xi' = -\cos\alpha' d\sigma' - \cos\lambda' d\tau'; \ldots; \end{array}\right.$$

on voit, d'après les valeurs qui précèdent (7), (8), (9), (10), qu'on devra prendre en grandeur et signe

$$(12)\qquad \left\{\begin{array}{l} d\sigma' = \varepsilon_3 d\theta, \\ d\tau' = \varepsilon_2 \varepsilon_3 d\omega. \end{array}\right.$$

Si l'on assujettit $\tang\theta' = \frac{d\sigma'}{d\tau'}$ à être positif, on voit qu'il faudra prendre

$$(12\ bis)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \varepsilon_2 = -\varepsilon\varepsilon'', & \text{si } d\theta > 0; \\ \varepsilon_2 = \varepsilon\varepsilon'', & \text{si } d\theta < 0. \end{array}\right.$$

On pourra encore disposer de $\varepsilon_3$ pour rendre R' et T' positifs.

**22.** Désignons par $x', y', z'$ les coordonnées du point M' que nous dirons *correspondant* au point M', n° **18**; on aura

$$(13)\qquad \left\{\begin{array}{l} x' = x + l\cos\alpha', \\ y' = y + l\cos\beta', \\ z' = z + l\cos\gamma'; \end{array}\right.$$

$\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ désignent toujours le demi-axe du cône osculateur tel qu'il a été précisé ci-dessus, n° **14**; $x, y, z$ sont les coordonnées du point M; $l$ est la distance du point M' au point M, cette distance, comptée à partir du point M', étant regardée comme positive ou négative, suivant que le point M' est sur la demi-droite définie par $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, ou sur le prolongement de cette demi-droite.

Pour obtenir la longueur $l$, nous différentierons les égalités (13) en regardant $x', y', z'$ comme invariables; on trouve ainsi

$$\begin{array}{l} 0 = dx + l\,d.\cos\alpha' + \cos\alpha' dl, \\ 0 = dy + l\,d.\cos\beta' + \cos\beta' dl, \\ 0 = dz + l\,d.\cos\gamma' + \cos\gamma' dl; \end{array}$$

d'où l'on conclut, par l'élimination de $dl$,

$$\frac{ds\cos\alpha + l d.\cos\alpha'}{\cos\alpha'} = \frac{ds\cos\beta + l d.\cos\beta'}{\cos\beta'} = \frac{ds\cos\gamma + l d.\cos\gamma'}{\cos\gamma'}.$$

La comparaison des deux derniers rapports donne

$$ds(\cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta') = l(\cos\beta' d.\cos\gamma' - \cos\gamma' d.\cos\beta').$$

Si l'on a égard aux relations (1), n° **17**, (8), n° **20**, il vient

$$ds\sin\theta = l\,d\theta,$$

d'où l'on conclut

$$(14) \qquad l = \frac{ds\sin\theta}{d\theta} = \frac{ds\,d\sigma}{d\omega}.$$

Pour obtenir l'arc $ds'$, nous différentierons maintenant les égalités (13) en faisant varier toutes les quantités, ce qui donne

$$dx' = dx + l d.\cos\alpha' + \cos\alpha' dl,$$

ou, d'après les relations (5), n° **16**, (8), n° **20**, (14), n° **22**, (1), n° **17**,

$$\begin{aligned} dx' &= ds\cos\alpha - ds\sin\theta(\cos\alpha\sin\theta + \cos\lambda\cos\theta) + \cos\alpha' dl,\\ dx' &= ds\cos\theta(\cos\alpha\cos\theta - \cos\lambda\sin\theta) + \cos\alpha' dl\\ &= \cos\alpha'\cos\theta\,ds + \cos\alpha' dl; \end{aligned}$$

on a donc, en définitive,

$$(15) \qquad \begin{cases} dx' = \cos\alpha'(\cos\theta\,ds + dl),\\ dy' = \cos\beta'(\cos\theta\,ds + dl),\\ dz' = \cos\gamma'(\cos\theta\,ds + dl). \end{cases}$$

On conclut de là

$$ds' = \varepsilon_1(\cos\theta\,ds + dl);$$

comme il nous faut vérifier les relations

$$(16) \qquad dx' = ds'\cos\alpha', \quad dy' = ds'\cos\beta', \quad dz' = ds'\cos\gamma'.$$

il en résulte $\varepsilon_1 = +1$, et, par suite,

$$(17) \qquad ds' = \cos\theta\, ds + dl = \frac{d.l\sin\theta}{\sin\theta}.$$

Enfin si l'on pose

$$(18) \qquad d\omega' = -\varepsilon\varepsilon''\varepsilon_2\varepsilon_3\sqrt{d\sigma'^2 + d\tau'^2} = -\varepsilon\varepsilon''\varepsilon_2\varepsilon_3\sqrt{d\theta^2 + d\omega^2},$$

on aura, d'après les formules (VIII) du n° **17**, en désignant par $\theta'$ un angle aigu positif,

$$\tang\theta' = \frac{d\sigma'}{d\tau'}, \quad \sin\theta' = \frac{d\sigma'}{d\omega'}, \quad \cos\theta' = \frac{d\tau'}{d\omega'},$$

c'est-à-dire

$$(19) \qquad \tang\theta' = \varepsilon_2\frac{d\theta}{d\omega}, \quad \sin\theta' = \varepsilon_3\frac{d\theta}{d\omega'}, \quad \cos\theta' = \varepsilon_2\varepsilon_3\frac{d\omega}{d\omega'}.$$

**23.** En résumé, nous aurons, pour la *développable rectifiante*, les formules suivantes :

$$(\text{VIII}) \left\{ \begin{array}{ll} (1) & \left\{ \begin{array}{l} \cos\alpha' = \cos\alpha\cos\theta - \cos\lambda\sin\theta, \\ \cos\beta' = \cos\beta\cos\theta - \cos\mu\sin\theta, \\ \cos\gamma' = \cos\gamma\cos\theta - \cos\nu\sin\theta; \end{array} \right. \\ (2) & \sin\theta = \dfrac{d\sigma}{d\omega}, \quad \cos\theta = \dfrac{d\tau}{d\omega}, \quad \tang\theta = \dfrac{d\sigma}{d\tau}; \\ (3) & d\omega = -\varepsilon\varepsilon''\sqrt{d\sigma^2 + d\tau^2}. \end{array} \right.$$

$$(\text{IX}) \left\{ \begin{array}{ll} (1) & \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_2\cos\lambda' = \cos\xi, \\ \varepsilon_2\cos\mu' = \cos\eta, \\ \varepsilon_2\cos\nu' = \cos\zeta; \end{array} \right. \\ (2) & \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_3\cos\xi' = -(\cos\alpha\sin\theta + \cos\lambda\cos\theta) = \dfrac{d.\cos\xi}{d\omega}, \\ \varepsilon_3\cos\eta' = -(\cos\beta\sin\theta + \cos\mu\cos\theta) = \dfrac{d.\cos\eta}{d\omega}, \\ \varepsilon_3\cos\zeta' = -(\cos\gamma\sin\theta + \cos\nu\cos\theta) = \dfrac{d.\cos\zeta}{d\omega}. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$
(\mathrm{X})\left\{
\begin{array}{ll}
(1) & \left\{\begin{aligned}
d.\cos\alpha' &= -\,(\cos\alpha\sin\theta + \cos\lambda\cos\theta)d\theta \\
&= \frac{d\theta}{d\omega}d.\cos\xi = \cos\xi' d\theta\,.\,\varepsilon_3, \\
d.\cos\beta' &= -\,(\cos\beta\sin\theta + \cos\mu\cos\theta)d\theta \\
&= \frac{d\theta}{d\omega}d.\cos\eta = \cos\eta' d\theta\,.\,\varepsilon_3, \\
d.\cos\gamma' &= -\,(\cos\gamma\sin\theta + \cos\nu\cos\theta)d\theta \\
&= \frac{d\theta}{d\omega}d.\cos\zeta = \cos\zeta' d\theta\,.\,\varepsilon_3;
\end{aligned}\right. \\[2ex]
(2) & \left\{\begin{aligned}
\varepsilon_2 d.\cos\lambda' &= d.\cos\xi = -\cos\alpha\, d\sigma - \cos\lambda\, d\tau = \varepsilon_3 \cos\xi' d\omega, \\
\varepsilon_2 d.\cos\mu' &= d.\cos\eta = -\cos\beta\, d\sigma - \cos\mu\, d\tau = \varepsilon_3 \cos\eta' d\omega, \\
\varepsilon_2 d.\cos\nu' &= d.\cos\zeta = -\cos\gamma\, d\sigma - \cos\nu\, d\tau = \varepsilon_3 \cos\zeta' d\omega;
\end{aligned}\right. \\[2ex]
(3) & \left\{\begin{aligned}
\varepsilon_3 d.\cos\xi' &= -\cos\alpha' d\theta - \cos\xi\, d\omega = -\cos\alpha' d\theta - \varepsilon_2\cos\lambda' d\omega, \\
\varepsilon_3 d.\cos\eta' &= -\cos\beta' d\theta - \cos\eta\, d\omega = -\cos\beta' d\theta - \varepsilon_2\cos\mu' d\omega, \\
\varepsilon_3 d.\cos\zeta' &= -\cos\gamma' d\theta - \cos\zeta\, d\omega = -\cos\gamma' d\theta - \varepsilon_2\cos\nu' d\omega.
\end{aligned}\right.
\end{array}\right.
$$

$$
(\mathrm{XI})\left\{
\begin{array}{ll}
(1) & \left\{\begin{aligned}
x' &= x + l\cos\alpha', \\
y' &= y + l\cos\beta', \\
z' &= z + l\cos\gamma';
\end{aligned}\right. \\[2ex]
(2) & l = \dfrac{ds\sin\theta}{d\theta}; \\[2ex]
(3) & ds' = \cos\theta\, ds + dl; \\[2ex]
(4) & d\sigma' = \varepsilon_3 d\theta, \quad d\tau' = \varepsilon_2\varepsilon_3 d\omega; \quad \left\{\begin{array}{ll} \varepsilon_2 = -\,\varepsilon\varepsilon'', & \text{si } d\theta > 0, \\ \varepsilon_2 = \varepsilon\varepsilon'' & \text{si } d\theta < 0, \end{array}\right. \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{alors } \operatorname{tang}\theta' \text{ est positif}; \\[2ex]
(5) & d\omega' = -\,\varepsilon\varepsilon''\varepsilon_2\varepsilon_3\sqrt{d\theta^2 + d\omega^2}; \\[2ex]
(6) & \operatorname{tang}\theta' = \varepsilon_2\dfrac{d\theta}{d\omega}, \quad \sin\theta' = \varepsilon_3\dfrac{d\theta}{d\omega'}, \quad \cos\theta' = \dfrac{d\omega}{d\omega'}\varepsilon_2\varepsilon_3.
\end{array}\right.
$$

*Nota.* — Les signes ont toujours été déterminés de manière à vérifier les relations fondamentales

$$
\begin{array}{ll}
dx' = ds'\cos\alpha', & d.\cos\alpha' = \cos\xi' d\sigma, \\
\dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, \\
d.\cos\lambda' = \cos\xi' d\tau', & d.\cos\xi' = -\cos\alpha' d\sigma' - \cos\lambda' d\tau'; \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}
$$

Si l'on désigne par

T la tangente, N la normale, B la binormale } relatives au point M situé sur l'arête de rebroussement de la *développable donnée;*

T′ la tangente, N′ la normale, B′ la binormale } relatives au point M′ (correspondant de M) situé sur l'arête de rebroussement de la *développable rectifiante,*

on a les relations suivantes, eu égard aux formules du n° **23** :

$$
\text{(XII)}\quad \left\{
\begin{array}{lll}
\cos(T',T) = \cos\theta, & \cos(N',T) = -\varepsilon_3 \sin\theta, & \cos(B',T) = 0,\\
\cos(T',N) = 0, & \cos(N',N) = 0, & \cos(B',N) = \varepsilon_2,\\
\cos(T',B) = -\sin\theta; & \cos(N',B) = -\varepsilon_3\cos\theta; & \cos(B',B) = 0.
\end{array}\right.
$$

La *binormale* en un point d'une courbe gauche est l'axe du plan osculateur en ce point; par *normale*, nous entendons la normale principale.

**24**. Les formules relatives à la développable rectifiante, que je viens d'établir, ne sont pas nouvelles; presque toutes ont été déjà données par M. de Saint-Venant (31e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, 1845); elles ont été reprises ensuite, en partie, par M. Voizot (*Journal de Mathématiques pures*, t. XV; 1850; p. 483; t. XVII; 1852, p. 253), puis par M. Frenet (*Journal de Mathématiques pures*, t. XVII; 1852; p. 445), etc.

Les démonstrations que j'ai données sont peut-être un peu plus simples que celles qui se rencontrent dans les Mémoires cités; mais, si j'ai repris la recherche des formules relatives à la développable rectifiante, c'est moins pour simplifier que pour établir très-nettement la correspondance des signes et leur signification précise, de manière à vérifier les *relations fondamentales* que j'ai rappelées plusieurs fois; de sorte que l'emploi de ces formules ne laisse subsister aucun embarras pour le choix des signes et leur interprétation, ce qui a une extrême importance dans beaucoup de questions.

---

## NOTE I.

**25.** Les formules démontrées au commencement de ce Mémoire, et résumées au n° **11**, se présentent sous une forme indéterminée lorsqu'on veut les appliquer au cas où la développable est *circonscrite au cercle imaginaire de l'infini.*

Cette importante variété de surfaces développables, sur lesquelles je me propose de revenir plus tard, présente des propriétés particulières qui méritent d'être étudiées. Je me contenterai d'indiquer ici les formules initiales qui permettent d'aborder cette étude dans le système des équations tangentielles et d'y joindre quelques remarques.

1° Les génératrices de cette développable (c'est-à-dire les tangentes à l'arête de rebroussement) sont parallèles aux génératrices du cône asymptote de la sphère.

2° Si l'on considère une génératrice quelconque, mais déterminée, le carré de la distance d'un point quelconque de cette génératrice au point où elle touche la deuxième surface à laquelle la développable est circonscrite est constamment nul.

Je n'ai pas besoin de faire observer que cette propriété est purement algébrique.

Pour démontrer ces propositions, je remarque que, d'après l'hypothèse, la surface développable en question est définie par deux équations de la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} u^2 + v^2 + w^2 = 0, \\ f(u, v, w) = 0. \end{cases}$$

Soit $(u_0, v_0, w_0)$ un plan tangent commun aux deux surfaces (1), ses points de contact respectifs avec chacune de ces surfaces seront

$$(2)\qquad \begin{cases} uu_0 + vv_0 + ww_0 = 0, \\ u\dfrac{df}{du_0} + v\dfrac{df}{dv_0} + w\dfrac{df}{dw_0} + \dfrac{df}{dr_0} = 0; \end{cases}$$

on a, en outre, les équations de condition

$$(2\ bis)\qquad \begin{cases} u_0^2 + v_0^2 + w_0^2 = 0, \\ f(u_0, v_0, w_0) = 0. \end{cases}$$

Les deux points (2) déterminent la génératrice correspondante de la surface développable; un point quelconque de cette génératrice aura pour équation

$$(3)\qquad \left(\frac{df}{du_0} + \lambda u_0\right) u + \left(\frac{df}{dv_0} + \lambda v_0\right) v + \left(\frac{df}{dw_0} + \lambda w_0\right) w + \frac{df}{dr_0} = 0,$$

$\lambda$ étant une indéterminée.

Or, si l'on désigne par $x_0, y_0, z_0$ les coordonnées du point de contact du plan tangent $(u_0, v_0, w_0)$ avec la surface $f(u, v, w) = 0$, on a, d'après la seconde des équations (2),

$$(4)\qquad \frac{x_0}{\frac{df}{du_0}} = \frac{y_0}{\frac{df}{dv_0}} = \frac{z_0}{\frac{df}{dw_0}} = -\frac{1}{\frac{df}{dr_0}};$$

l'équation (3) pourra alors s'écrire

$$(5)\qquad (\mu u_0 - x_0) u + (\mu v_0 - y_0) v + (\mu w_0 - z_0) w + 1 = 0,$$

en représentant par $\mu$ l'indéterminée $\dfrac{\lambda}{\frac{df}{dr_0}}$.

Par conséquent, on aura, en désignant par $x, y, z$ les coordonnées du point (5),

$$(6)\qquad x = x_0 - \mu u_0, \quad y = y_0 - \mu v_0, \quad z = z_0 - \mu w_0;$$

ce qu'on peut écrire

$$(6\ bis)\ (G)\qquad \frac{x - x_0}{u_0} = \frac{y - y_0}{v_0} = \frac{z - z_0}{w_0}.$$

Les équations (6) définissent les coordonnées d'un point quelconque de la génératrice correspondant au plan tangent fixe $(u_0, v_0, w_0)$, pour lequel on a toujours

$$(7)\qquad u_0^2 + v_0^2 + w_0^2 = 0, \quad f(u_0, v_0, w_0) = 0;$$

les équations (6 *bis*) sont les équations de cette génératrice.

*Remarque.* — Eu égard aux équations (7) et (4), les quantités $u_0$, $v_0$, $w_0$, et, par suite, les quantités $x_0, y_0, z_0$ peuvent être considérées comme des fonctions d'un paramètre arbitraire, $t$ par exemple; d'après cela, les coordonnées $x, y, z$, définies par les équations (6), seront des fonctions des deux variables *indépendantes* $t$ et $\mu$, et détermineront un point quelconque de la surface développable représentée par les équations (1). Lorsque $t$ reste constant, le point se déplace sur la génératrice correspondant au plan tangent $(u_0, v_0, w_0)$; si $\mu$ reste constant, le point se déplace sur une certaine courbe dont on obtiendrait les équations en éliminant $t$ entre les trois équations (6).

1° Si l'on mène par l'origine une parallèle à la génératrice G, on aura

$$\frac{x}{u_0} = \frac{y}{v_0} = \frac{z}{w_0}, \quad \text{d'où} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 0;$$

ainsi les génératrices sont parallèles aux génératrices du cône asymptote de la sphère.

2° On déduit encore des équations (6)

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \mu^2(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2);$$

or $\mu$ n'est pas infini, car $\lambda$ est arbitraire, et $\frac{df}{dr_0}$ n'est pas nul, puisque $f(u, v, w) = 0$ représente une surface quelconque; d'ailleurs

$$u_0^2 + v_0^2 + w_0^2 = 0,$$

par suite

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = 0;$$

c'est la seconde des propriétés énoncées.

## NOTE II.

*Application des formules qui précèdent à la surface développable définie par les deux équations tangentielles*

$$u^2 + v^2 + w^2 = \frac{1}{r^2}, \quad a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 = 1.$$

**26.** Les surfaces représentées par les équations tangentielles

$$(1) \qquad u^2 + v^2 + w^2 = \frac{1}{r^2}, \quad a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 = 1$$

sont un ellipsoïde rapporté à ses plans principaux et une sphère concentrique.

Nous poserons

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &A = b^2 - c^2, \quad A_1 = 1 - \frac{a^2}{r^2},\\ &B = c^2 - a^2, \quad B_1 = 1 - \frac{b^2}{r^2},\\ &C = a^2 - b^2, \quad C_1 = 1 - \frac{c^2}{r^2};\end{aligned}\right.$$

d'où il résulte

$$(2\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned} &A + B + C = 0,\\ &a^2A + b^2B + c^2C = 0,\\ &AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0,\\ &AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2 = -\frac{ABC}{r^4}.\end{aligned}\right.$$

Les deux équations (1) de la développable donnent lieu aux relations suivantes :

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &Bw^2 - Cv^2 = A_1,\\ &Cu^2 - Aw^2 = B_1,\\ &Av^2 - Bu^2 = C_1;\end{aligned}\right.$$

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &A_1u^2 + B_1v^2 + C_1w^2 = 0,\\ &\frac{A_1}{A}u^4 + \frac{B_1}{B}v^4 + \frac{C_1}{C}w^4 = -\frac{A_1B_1C_1}{ABC},\\ &\frac{A^2A_1}{u^2} + \frac{B^2B_1}{v^2} + \frac{C^2C_1}{w^2} = -\frac{A_1B_1C_1}{u^2v^2w^2},\\ &A_1^2u^2 + B_1^2v^2 + C_1^2w^2 = -\frac{BC}{r^4}u^2 - \frac{B_1C_1}{r^2}.\end{aligned}\right.$$

**27.** Des équations (1) on déduit

$$udu + vdv + wdw = 0, \quad a^2udu + b^2vdv + c^2wdw = 0,$$

d'où il résulte

$$\frac{udu}{A} = \frac{vdv}{B} = \frac{wdw}{C}.$$

En désignant par $dt$ la valeur commune de ces derniers rapports, on aura

$$(5)\qquad u\,du = A\,dt,\quad v\,dv = B\,dt,\quad w\,dw = C\,dt,$$

et l'on pourra regarder $u$, $v$, $w$ comme des fonctions de la variable indépendante $t$.

Des égalités (5) on conclut

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} d^2u &= -\frac{A^2}{u^3}dt^2, & d^3u &= 3\frac{A^3}{u^5}dt^3,\\ d^2v &= -\frac{B^2}{v^3}dt^2, & d^3v &= 3\frac{B^3}{v^5}dt^3,\\ d^2w &= -\frac{C^2}{w^3}dt^2; & d^3w &= 3\frac{C^3}{w^5}dt^3.\end{aligned}\right.$$

Si maintenant nous avons égard aux notations du n° **11**, on a

$$\Delta = \begin{vmatrix} u & v & w \\ \frac{A}{u}dt & \frac{B}{v}dt & \frac{C}{w}dt \\ -\frac{A^2}{u^3}dt^2 & -\frac{B^2}{v^3}dt^2 & -\frac{C^2}{w^3}dt^2 \end{vmatrix};$$

en ayant égard aux relations (3) et (4) du n° **26** et aux valeurs (6) qui précèdent, on trouve

$$(7)\left\{\begin{aligned} U &= \frac{A_1BC}{v^3w^3}dt^3,\\ V &= \frac{AB_1C}{w^3u^3}dt^3,\\ W &= \frac{ABC_1}{u^3v^3}dt^3;\end{aligned}\right.\quad (8)\left\{\begin{aligned} U_2 &= -\frac{A_1}{vw}dt,\\ V_2 &= -\frac{B_1}{wu}dt,\\ W_2 &= -\frac{C_1}{uv}dt;\end{aligned}\right.\quad (9)\ \Delta = -\frac{A_1B_1C_1}{u^3v^3w^3}dt^3,$$

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} &H = 3\frac{ABC.A_1B_1C_1}{u^5v^5w^5}dt^6;\\ &\sqrt{U_2^2+V_2^2+W_2^2} = \frac{\varepsilon_0\,dt}{uvw}\sqrt{A_1^2u^2+B_1^2v^2+C_1^2w^2},\end{aligned}\right.$$

$\varepsilon_0$ désignant $+1$ ou $-1$ suivant que $uvw$ est positif ou négatif, car les radicaux qui entrent dans les formules du n° **11** doivent toujours être pris avec leur valeur absolue.

**28.** La substitution de ces valeurs dans les formules du n° **11** nous conduit immédiatement aux expressions suivantes :

$$\text{(I)}\qquad x = -\frac{BC}{B_1C_1}u^3,\quad y = -\frac{CA}{C_1A_1}v^3,\quad z = -\frac{AB}{A_1B_1}w^3;$$

$$\text{(II)}\qquad \frac{dx}{A_1u} = \frac{dy}{B_1v} = \frac{dz}{C_1w} = -3\frac{ABC}{A_1B_1C_1}dt;$$

$$\text{(III)}\qquad ds = \varepsilon'\varepsilon_0 . 3\frac{ABC}{A_1B_1C_1}\sqrt{A_1^2u^2 + B_1^2v^2 + C_1^2w^2}\,dt;$$

$$\text{(IV)}\qquad \cos\lambda = \varepsilon . ru,\quad \cos\mu = \varepsilon . rv,\quad \cos\nu = \varepsilon . rw;$$

$$\text{(V)}\qquad \frac{\cos\alpha}{A_1u} = \frac{\cos\beta}{B_1v} = \frac{\cos\gamma}{C_1w} = -\frac{\varepsilon'\varepsilon_0}{\sqrt{A_1^2u^2 + B_1^2v^2 + C_1^2w^2}};$$

$$\text{(VI)}\qquad \frac{\cos\xi}{Avw} = \frac{\cos\eta}{Bwu} = \frac{\cos\zeta}{Cuv} = -\frac{\varepsilon''\varepsilon_0}{r\sqrt{A_1^2u^2 + B_1^2v^2 + C_1^2w^2}};$$

$$\text{(VII)}\qquad -\varepsilon\varepsilon'\varepsilon'' . r^2T = 3\frac{ABC}{A_1B_1C_1}uvw;$$

$$\text{(VIII)}\qquad -\varepsilon''\varepsilon_0\frac{R}{r} = 3\frac{ABC}{A_1^2B_1^2C_1^2}uvw(A_1^2u^2 + B_1^2v^2 + C_1^2w^2)^{\frac{3}{2}};$$

$$\text{(IX)}\quad \left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2 = \dfrac{1}{A_1^2B_1^2C_1^2}\left[A_1^2B^2C^2u^6 + A^2B_1^2C^2v^6 + A^2B^2C_1^2w^6\right], \\ \text{ou, en ayant égard aux relations (2) et (3),} \\ x^2+y^2+z^2 = r^2 - \dfrac{r^2}{A_1^2B_1^2C_1^2}\left[\dfrac{BCu^2}{r^2} + B_1C_1\right]^3; \end{array}\right.$$

les lettres $\varepsilon$, $\varepsilon'$, $\varepsilon''$, $\varepsilon_0$,... représentent toujours $\pm 1$.

**29.** Nous allons tirer de ces formules plusieurs conséquences.

1° *L'arête de rebroussement de la développable en question est du douzième ordre* (cas particulier d'une proposition connue).

Cherchons, en effet, combien il y a de points de la courbe dans un plan arbitrairement choisi $mx + ny + pz + q = 0$. D'après les valeurs (I), n° **28**, et les équations (1), n° **26**, on a, entre les inconnues $u$, $v$, $w$, les trois équations

$$m\frac{BC}{B_1C_1}u^3 + n\frac{CA}{C_1A_1}v^3 + p\frac{AB}{A_1B_1}w^3 - q = 0,$$
$$a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - 1 = 0,$$
$$u^2 + v^2 + w^2 = \frac{1}{r^2};$$

or ce système d'équations admet $3.2.2 = 12$ solutions; la courbe est donc du douzième ordre.

**30.** Évaluons l'arc $s$.

On a, après avoir posé $\varepsilon'\varepsilon_0 = \varepsilon_1$,

$$ds = \varepsilon_1.\frac{3ABC}{A_1B_1C_1}\sqrt{A_1^2u^2 + B_1^2v^2 + C_1^2w^2}.dt,$$

ou, en ayant égard à la dernière des relations (4) et à la première des égalités (5),

$$ds = \varepsilon_1.\frac{3ABC}{A_1B_1C_1}\sqrt{-\frac{BC}{r^4}u^2 - \frac{B_1C_1}{r^2}}.\frac{udu}{A}.$$

En intégrant, il vient

(11) $$s = \text{const.} - \varepsilon_1.\frac{r^4}{A_1B_1C_1}\left(-\frac{BC}{r^4}u^2 - \frac{B_1C_1}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}},$$

ou, d'après la dernière des relations (4),

(11 *bis*) $$s = \text{const.} - \varepsilon_1.\frac{r^4}{A_1B_1C_1}(A_1^2u^2 + B_1^2v^2 + C_1^2w^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Pour bien préciser les signes, supposons, par exemple,

(12) $$a > b > c \quad \text{et} \quad a > r > b;$$

il en résultera alors

(12 *bis*) $$\begin{cases} A > 0, & A_1 < 0, \\ B < 0, & B_1 > 0, \\ C > 0; & C_1 > 0. \end{cases}$$

L'arête de rebroussement rencontre le plan des $xy$ en un point réel pour lequel on a

$$(13)\qquad z = 0,\quad w = 0;\quad u^2 = \frac{B_1}{C},\quad v^2 = \frac{-A_1}{C}.$$

Si l'on compte l'arc à partir du point situé dans le plan des $xy$ et défini par les égalités (13), on aura

$$s = \varepsilon_1 . \frac{r}{A_1 B_1 C_1}\left[(-A_1 B_1)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{-BC}{r^2}u^2 - B_1 C_1\right)^{\frac{3}{2}}\right].$$

Si l'on suppose l'extrémité de l'arc $s$ située dans le trièdre des coordonnées positives et qu'on ait égard aux inégalités (12 *bis*) et aux valeurs (I) du n° **28**, on voit que

$$u > 0,\quad v > 0,\quad w < 0\quad \text{et}\quad \Delta < 0;$$

d'après la remarque II du n° **11**, on en conclura $\varepsilon' = +\varepsilon$, puis, d'après la remarque du n° **27**, $\varepsilon_0 = -1$, d'où $\varepsilon_1 = -\varepsilon'$.

Par conséquent, nous aurons

$$(14)\qquad s = \frac{-\varepsilon r}{A_1 B_1 C_1}\left[(-A_1 B_1)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{-BC}{r^2}u^2 - B_1 C_1\right)^{\frac{3}{2}}\right].$$

De l'égalité (14), nous tirons

$$(15)\qquad -\left(\frac{BC}{r^2}u^2 + B_1 C_1\right)^3 = \frac{A_1^2 B_1^2 C_1^2}{r^2}(s+k)^2,$$

après avoir posé

$$(15\ bis)\qquad k = \frac{+\varepsilon r(-A_1 B_1)^{\frac{3}{2}}}{A_1 B_1 C_1},$$

la longueur algébrique de $s$ étant définie sans ambiguïté par la formule (14).

Si l'on désigne par $\rho$ la distance du centre commun aux deux surfaces (1) au point $(x, y, z)$ extrémité de l'arc $s$, on aura, par la comparaison des relations (15) et (IX),

$$(16)\qquad \rho^2 = r^2 + (s+k)^2.$$

Ainsi :

2° *En désignant par s la longueur de l'arc de l'arête de rebroussement, par ρ la distance de l'origine [centre commun des deux surfaces (1)] à l'extrémité de l'arc s, on a la relation suivante, extrêmement simple et remarquable :*

$$(\mathrm{X}) \qquad \rho^2 = r^2 + (s + k)^2;$$

la valeur de la constante $k$ dépend de la position de l'origine de l'arc $s$. Dans les hypothèses où nous nous sommes placé, $k$ a la valeur (15 *bis*).

**31.** Nous avons pour le *rayon de torsion* T la valeur simple, en ayant égard aux conventions faites,

$$(\mathrm{XI}) \qquad -\varepsilon''\, r^2\mathrm{T} = 3\frac{\mathrm{ABC}}{\mathrm{A_1B_1C_1}}uvw.$$

Si l'on a égard à la dernière des relations (4), n° **26**, et à la relation (15), n° **30**, l'expression (VIII), n° **28**, du rayon de courbure R prend la forme également simple :

$$(\mathrm{XII}) \qquad +\varepsilon''.\, r^3\mathrm{R} = 3\frac{\mathrm{ABC}}{\mathrm{A_1B_1C_1}}uvw(s+k).$$

Les relations (XI) et (XII) donnent comme conséquence la suivante :

$$(\mathrm{XIII}) \qquad \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{T}} = -\frac{s+k}{r},$$

c'est-à-dire que *le rapport des rayons de courbure est proportionnel à la longueur de l'arc de la courbe.*

**32.** Si l'on a égard à la première des relations (4), n° **26**, savoir :

$$\mathrm{A_1}u^2 + \mathrm{B_1}v^2 + \mathrm{C_1}w^2 = 0,$$

les expressions (IV), (V), (VI) du n° **28** conduisent aux égalités suivantes :

$$
(17)\quad \left\{\begin{aligned}
&A_1\cos^2\lambda+B_1\cos^2\mu+C_1\cos^2\nu=0,\\
&\frac{\cos^2\alpha}{A_1}+\frac{\cos^2\beta}{B_1}+\frac{\cos^2\gamma}{C_1}=0,\\
&\frac{A^2A_1}{\cos^2\xi}+\frac{B^2B_1}{\cos^2\eta}+\frac{C^2C_1}{\cos^2\zeta}=0.
\end{aligned}\right.
$$

De là résultent les propositions suivantes :

4° *Les axes des plans osculateurs sont parallèles aux génératrices du cône*

$$
(\mathrm{XIV})\qquad A_1x^2+B_1y^2+C_1z^2=0.
$$

5° *Les tangentes de l'arête de rebroussement (ou génératrices de la développable circonscrite) sont parallèles aux génératrices du cône*

$$
(\mathrm{XV})\qquad \frac{x^2}{A_1}+\frac{y^2}{B_1}+\frac{z^2}{C_1}=0.
$$

Ces deux propositions sont conséquences l'une de l'autre; les deux cônes (XIV) et (XV) sont réciproques.

6° *Les normales principales sont parallèles aux génératrices du cône*

$$
(\mathrm{XVI})\qquad \frac{A^2A_1}{x^2}+\frac{B^2B_1}{y^2}+\frac{C^2C_1}{z^2}=0.
$$

**33.** Les cosinus des angles de l'axe du cône osculateur ont aussi une expression simple et remarquable; nous allons les calculer.

D'après les formules (VIII), n° **14**, les angles $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ de l'axe du cône osculateur sont définis par les égalités

$$
(18)\quad \left\{\begin{aligned}
&d\omega\cos\alpha'=\cos\alpha\, d\tau-\cos\lambda\, d\sigma,\\
&d\omega\cos\beta'=\cos\beta\, d\tau-\cos\mu\, d\sigma,\\
&d\omega\cos\gamma'=\cos\gamma\, d\tau-\cos\nu\, d\sigma
\end{aligned}\right.
$$

$$
d\omega=-\varepsilon\varepsilon''\sqrt{d\sigma^2+d\tau^2}.
$$

On a, d'après les formules (V), n° **11**,

$$d\tau = -\varepsilon\varepsilon''.\frac{\sqrt{U_2^2+V_2^2+W_2^2}}{u^2+v^2+w^2},\quad d\sigma = \varepsilon'\varepsilon''.\frac{\Delta\sqrt{u^2+v^2+w^2}}{U_2^2+V_2^2+W_2^2};$$

puis, en ayant égard aux relations (1), n° **26**, (9) et (10), n° **27**, (IV) et (V), n° **28**,

$$(19)\quad \begin{cases} d\tau = -\varepsilon\varepsilon''\varepsilon_0.\dfrac{r^2dt}{uvw}\sqrt{A_1^2u^2+B_1^2v^2+C_1^2w^2}, \\ d\sigma = -\varepsilon'\varepsilon''.\dfrac{A_1B_1C_1dt}{ruvw}.\dfrac{1}{A_1^2u^2+B_1^2v^2+C_1^2w^2}; \end{cases}$$

$$\cos\lambda = \varepsilon.ru,\quad \cos\alpha = -\varepsilon'\varepsilon_0\frac{A_1u}{\sqrt{A_1^2u^2+B_1^2v^2+C_1^2w^2}}.$$

Il résulte de là

$$\frac{d\omega}{dt}.\cos\alpha' = +\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''\frac{r^2.A_1u}{uvw} + \varepsilon\varepsilon'\varepsilon''.\frac{A_1B_1C_1}{uvw}\frac{u}{A_1^2u^2+B_1^2v^2+C_1^2w^2},$$

ou encore

$$uvw\frac{d\omega}{dt}(A_1^2u^2+B_1^2v^2+C_1^2w^2)\cos\alpha'$$
$$=\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''.A_1u[r^2(A_1^2u^2+B_1^2v^2+C_1^2w^2)+B_1C_1].$$

En remplaçant $d\omega$ par sa valeur $-\varepsilon\varepsilon''\sqrt{d\sigma^2+d\tau^2}$, il vient

$$uvw(A_1^2u^2+B_1^2v^2+C_1^2w^2)\frac{\sqrt{d\sigma^2+d\tau^2}}{dt}\cos\alpha'$$
$$=-\varepsilon'.A_1u[r^2(A_1^2u^2+B_1^2v^2+C_1^2w^2)+B_1C_1];$$

en ayant égard à la dernière des relations (4), n° **26**, le second membre de cette égalité se simplifie, et l'on a

$$(1^{\circ})\quad uvw(A_1^2u^2+B_1^2v^2+C_1^2w^2)\frac{\sqrt{d\sigma^2+d\tau^2}}{dt}\cos\alpha' = \varepsilon'\frac{A_1BC}{r^2}u^3.$$

Je remarque maintenant que les relations (19) donnent

$$\frac{d\sigma^2+d\tau^2}{dt^2} = \frac{1}{u^2v^2w^2}\left[r^4(A_1^2u^2+B_1^2v^2+C_1^2w^2)+\frac{A_1^2B_1^2C_1^2}{r^2(A_1^2u^2+B_1^2v^2+C_1^2w^2)^2}\right];$$

ce qui peut s'écrire

$$(2^\circ)\quad \left\{\begin{aligned} & uvw(A_1^2u^2 + B_1^2v^2 + C_1^2w^2)\frac{\sqrt{d\sigma^2 + d\tau^2}}{dt} \\ & = \frac{1}{r}\sqrt{r^6(A_1^2u^2 + B_1^2v^2 + C_1^2w^2)^3 + A_1^2B_1^2C_1^2}; \end{aligned}\right.$$

puis, en ayant égard à la dernière des relations (4), n° **26**, et à la seconde des valeurs (IX), n° **28**, on trouve

$$(3^\circ)\quad \sqrt{r^6(A_1^2u^2 + B_1^2v^2 + C_1^2w^2)^3 + A_1^2B_1^2C_1^2} = \frac{\rho}{r}A_1B_1C_1,$$

où

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

D'après les égalités (1°), (2°) et (3°), on trouve, pour la valeur de $\cos\alpha'$,

$$\rho\cos\alpha' = \varepsilon'\frac{B_1C_1}{BC}u^3.$$

On est donc ainsi conduit aux valeurs très-simples

$$(\text{XVII})\quad \left\{\begin{aligned} \rho\cos\alpha' &= \varepsilon'\frac{BC}{B_1C_1}u^3, \\ \rho\cos\beta' &= \varepsilon'\frac{CA}{C_1A_1}v^3, \\ \rho\cos\gamma' &= \varepsilon'\frac{AB}{A_1B_1}w^3, \end{aligned}\right\}\quad \text{où}\quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

*lesquelles déterminent la direction de l'axe du cône droit osculateur ou la génératrice de la développable rectifiante.*

Eu égard aux valeurs (I), n° **28**, les relations (XVII) peuvent encore s'écrire

$$(\text{XVII } bis)\quad \rho\cos\alpha' = -\varepsilon'.x,\quad \rho\cos\beta' = -\varepsilon'.y,\quad \rho\cos\gamma' = -\varepsilon'.z.$$

En tenant compte de la première des relations (4), n° **26**, on trouvera encore

$$A_1^{\frac{1}{3}}A^{\frac{2}{3}}(\cos\alpha')^{\frac{2}{3}} + B_1^{\frac{1}{3}}B^{\frac{2}{3}}(\cos\beta')^{\frac{2}{3}} + C_1^{\frac{1}{3}}C_1^{\frac{2}{3}}(\cos\gamma')^{\frac{2}{3}} = 0.$$

De là nous tirons les conséquences qui suivent :

7° *Les axes des cônes droits osculateurs passent constamment par le centre commun à la sphère et à l'ellipsoïde et décrivent le cône*

$$\text{(XVIII)} \qquad (A_1 A^2 x^2)^{\frac{1}{3}} + (B_1 B^2 y^2)^{\frac{1}{3}} + (C_1 C^2 z^2)^{\frac{1}{3}} = 0;$$

c'est-à-dire que *la développable rectifiante se réduit ici à un cône ayant pour sommet le centre de la sphère; et l'équation* (XVIII) *est précisément l'équation de ce cône.*

*Ce cône est du sixième ordre et de la quatrième classe; ses équations tangentielles sont*

$$\text{(XVIII } bis) \qquad r = 0, \quad \frac{A_1 A^2}{u^2} + \frac{B_1 B^2}{v^2} + \frac{C_1 C^2}{w^2} = 0;$$

*il possède :*

6 *arêtes de rebroussement;* 4 *arêtes doubles;* 0 *plan d'inflexion;* 3 *plans tangents doubles.*

Les six arêtes de rebroussement sont :

$$B_1 B^2 y^2 + C_1 C^2 z^2 = 0, \quad x = 0:$$

$x = 0$ est le plan tangent de rebroussement pour ces deux arêtes;

$$A_1 A^2 x^2 + C_1 C^2 z^2 = 0, \quad y = 0:$$

$y = 0$ est le plan tangent de rebroussement pour ces deux arêtes;

$$A_1 A^2 x^2 + B_1 B^2 y^2 = 0, \quad z = 0:$$

$z = 0$ est le plan tangent de rebroussement pour ces deux arêtes.

Ainsi *les plans principaux de l'ellipsoïde touchent respectivement le cône* (XVIII) *suivant deux arêtes qui sont des arêtes de rebroussement; les trois plans de rebroussement sont précisément les trois plans tangents doubles.*

Les quatre arêtes doubles sont :

$$(1^\circ) \qquad A\sqrt{A_1}\, x = B\sqrt{B_1}\, y = C\sqrt{C_1}\, z,$$

$$(2^\circ) \qquad -A\sqrt{A_1}\, x = B\sqrt{B_1}\, y = C\sqrt{C_1}\, z,$$

$$(3^\circ) \qquad A\sqrt{A_1}\, x = -B\sqrt{B_1}\, y = C\sqrt{C_1}\, z,$$

$$(4^\circ) \qquad A\sqrt{A_1}\, x = B\sqrt{B_1}\, y = -C\sqrt{C_1}\, z;$$

et les systèmes respectifs de plans tangents en chacune de ces arêtes ont pour équation :

$$(\mathrm{I}^\circ)\quad A_1A^2x^2 + B_1B^2y^2 + C_1C^2z^2 - BC\sqrt{B_1C_1}\,yz - CA\sqrt{C_1A_1}\,xz - AB\sqrt{A_1B_1}\,xy = 0,$$

$$(\mathrm{II}^\circ)\quad A_1A^2x^2 + B_1B^2y^2 + C_1C^2z^2 - BC\sqrt{B_1C_1}\,yz + CA\sqrt{C_1A_1}\,xz + AB\sqrt{A_1B_1}\,xy = 0,$$

$$(\mathrm{III}^\circ)\quad A_1A^2x^2 + B_1B^2y^2 + C_1C^2z^2 + BC\sqrt{B_1C_1}\,yz - CA\sqrt{C_1A_1}\,xz + AB\sqrt{A_1B_1}\,xy = 0,$$

$$(\mathrm{IV}^\circ)\quad A_1A^2x^2 + B_1B^2y^2 + C_1C^2z^2 + BC\sqrt{B_1C_1}\,yz + CA\sqrt{C_1A_1}\,xz - AB\sqrt{A_1B_1}\,xy = 0.$$