JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DE SAINT-VENANT

Formules des augmentations que de petites déformations d'un solide apportent aux pressions ou forces élastiques, supposées considérables, qui déjà étaient en jeu dans son intérieur. - Complément et modification du préambule du Mémoire: Distribution des élasticités autour de chaque point, etc., qui a été inséré en 1863 au Journal de Mathématiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 16 (1871), p. 275-307.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1871_2_16__275_0>

Formules des augmentations que de petites déformations d'un solide apportent aux pressions ou forces élastiques, supposées considérables, qui déjà étaient en jeu dans son intérieur. — Complément et modification du préambule du Mémoire : Distribution des élasticités autour de chaque point, etc., *qui a été inséré en* 1863 *au* Journal de Mathématiques [*];

PAR M. DE SAINT-VENANT.

PREMIÈRE PARTIE.

1. Au commencement du Mémoire de 1863 cité, j'ai essayé de donner, des formules les plus générales des pressions dans un corps élastique déjà sollicité intérieurement avant les déformations subies, une démonstration nouvelle, susceptible d'être acceptée par ceux même qui, depuis quelques années, rejettent *à priori* tout calcul d'actions moléculaires dans la théorie de l'élasticité.

Mais des observations que je trouve fondées, et dont je remercie leurs auteurs, m'ont été faites sur quelques points de ce préambule, par M. Brill, *privat-docent* à l'université de Giessen, et surtout par M. Boussinesq, professeur à Gap, déjà bien connu des lecteurs du *Journal de Mathématiques*.

Elles ne portent sur aucune des conclusions du Mémoire de 1863, qui subsistent ainsi entières. Elles ne signalent pas non plus d'inexactitude dans les formules (2) [(c) ci-après], données au début et telles que je les comprenais, pour exprimer en fonction de déplacements (u, v, w) de grandeurs quelconques les trois *dilatations* et les trois

[*] 2e série, t. VIII, p. 26 à 282.

glissements (∂, g), quand on néglige les carrés et les produits de ces six quantités très-petites.

Mais on peut voir au même Mémoire qu'il est nécessaire de conserver ce qui vient de ces carrés et produits, lorsqu'on veut partir de l'expression du *potentiel* ou de l'*énergie latente* [*] résultant des produits des pressions par les petits mouvements que leurs réactions sont capables d'engendrer. Or, alors, comme on me l'a fait apercevoir, les formules en question exprimant les dilatations ∂ et glissements g ont besoin d'être complétées. Et il faut, par contre, compléter d'une manière analogue la première partie de la formule (9) du potentiel, en réparant ainsi deux omissions qui étaient d'autant plus sujettes à échapper qu'elles portent sur des quantités du second ordre habituellement supprimées, et qui, de plus, lorsqu'on les fait l'une avec l'autre, se compensent de manière à n'affecter aucunement le résultat à obtenir.

Ce résultat désiré n'était autre que le groupe connu des six formules complètes et exactes (10) [(i) ci-après], données par Cauchy, en 1829, pour les composantes des pressions à l'intérieur d'un solide élastique, dans le cas général où il y aurait déjà des pressions ou tensions considérables en jeu avant les déplacements relatifs subis par les divers points du corps. Mon but était, dis-je, de les établir d'une manière nouvelle, sans parler aucunement des actions entre molécules, fonctions continues de leurs distances, dont le calcul, depuis quelques années, est rejeté *à priori*, et à tort suivant moi, par un certain nombre de savants. Aujourd'hui j'aperçois clairement qu'il faut renoncer à contenter ainsi, par concession, une opinion qui n'est point la mienne; car l'expression du potentiel, complétée ainsi qu'on vient de le dire, ne peut être obtenue, comme me l'a fait remarquer M. Boussinesq, que par un calcul des forces moléculaires en jeu; et les formules mêmes de Cauchy ne peuvent être définies, quant aux coefficients qui y entrent, que par des sommes de fonctions de pareilles actions mutuelles; en sorte qu'elles ne peuvent pas être démontrées, ainsi que j'avais espéré le faire, en s'appuyant seulement

[*] Ce qui a été nommé l'*Ergiel* (*Comptes rendus*, 20 juin 1870, t. LXX, p. 1314), par M. Clausius, qui, avec d'autres physiciens, réserve le terme *potentiel* pour le seul cas de forces en raison inverse des carrés des distances où elles agissent.

sur la forme linéaire des formules de pressions : forme qui est acceptée par tout le monde, bien qu'on ne puisse la justifier que comme conséquence de ce que les pressions sont elles-mêmes des résultantes de ces actions réciproques, dont la considération, systématiquement repoussée, est ainsi inévitable à tous égards.

Comme ces points sont délicats et se rattachent à des considérations importantes, je vais, dans une *première partie*, entrer à leur égard dans quelques détails.

Puis, dans la *deuxième partie* de ce travail, je donnerai des formules propres à exprimer, au moyen de coefficients d'élasticité constants et susceptibles d'être mesurés expérimentalement d'avance pour chaque matière, les coefficients ou paramètres variables figurant dans les formules les plus générales des forces élastiques.

2. Au Mémoire cité de 1863, où

$$\partial_x, \partial_y, \partial_z \quad \text{et} \quad g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}$$

désignent les six *déformations élémentaires* (les *strains* des auteurs anglais) supposées toujours *très-petites*, d'un corps élastique au point dont les coordonnées rectangles sont

$$x, y, z,$$

c'est-à-dire 1° les dilatations subies par l'unité de longueur de trois petites lignes matérielles qui s'y croisaient dans des directions parallèles à ces coordonnées; et 2° les glissements, ou les cosinus des angles très-peu aigus qu'elles forment deux à deux après des déplacements de grandeurs du reste aussi considérables qu'on veut

$$u, \quad v, \quad w,$$

ou après que x, y, z sont devenus $x+u$, $y+v$, $z+w$, l'on démontre, dans la note du n° **2** qui est après les formules (3), qu'on a sans aucune erreur

$$(a) \qquad \partial_x = -1 + \sqrt{1 + 2\frac{du}{dx} + \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2},$$

ou, ce qui revient identiquement au même,

$$(b)\quad\begin{cases} \partial_x + \frac{1}{2}\partial_x^2 = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2, \\ \text{et qu'on a aussi} \\ g_{yz}(1+\partial_y)(1+\partial_z) = \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} + \frac{du}{dy}\frac{du}{dz} + \frac{dv}{dy}\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\frac{dw}{dz} \\ \text{avec quatre autres expressions semblables.} \end{cases}$$

Quand on peut négliger $\frac{1}{2}\partial_x^2$ devant ∂_x qui doit rester une fraction numérique fort petite pour que l'élasticité ne s'altère pas, et, de même, les produits de g_{yz} par ∂_y et ∂_z devant g_{yz}, l'on peut écrire

$$(c)\quad\begin{cases} \left.\begin{matrix} \partial_x \\ \text{et } g_{yz} \end{matrix}\right\} = \text{les seconds membres de } (b) \\ \text{et } \partial_y,\ \partial_z,\ g_{zx},\ g_{xy} = \text{des expressions analogues.} \end{cases}$$

Ce sont les formules (3) du n° 2 de mon Mémoire de 1863, que j'avais données depuis longtemps [*], et qui sont exactes, au degré d'approximation dont on se contente alors quant aux valeurs des ∂ et g.

Mais elles ne suffisent plus quand il s'agit, comme au n° suivant 3, p. 273, 275 (et note), de substituer, aux $\partial_x, \ldots, g_{xy}$, leurs valeurs en u, v, w dans le potentiel, appelé Φ, des forces internes par unité de volume, pour appliquer à la manière de Lagrange, comme a fait M. Ch. Neumann pour un cas particulier [**], le principe des travaux virtuels à la variation $\iiint dx\,dy\,dz\,\delta\Phi$ du potentiel total, afin de tirer, en en détachant trois intégrales doubles dont les limites sont sur l'enveloppe du corps, les expressions complètes (10) [(i) ci-après] des six composantes de pression. Il faut employer d'autres formules que (c), où les carrés et produits des ∂, g ne soient plus négligés. L'emploi du calcul des variations n'est alors possible qu'en supposant en même temps très-petits les déplacements u, v, w, supposition qu'on peut toujours faire, car on rend u, v, w très-petits en en retranchant une

[*] 1844 (*Société philomathique*, 26 mars, ou l'*Institut*, n° 537), et 1847 (*Comptes rendus*, 22 février, t. XXIV, p. 260.)

[**] *Journal de Crelle et Borchardt*, t. 57 (1860), 4ᵉ livraison, p. 303.

translation et une rotation générale du système quand les ∂, g sont très-petits eux-mêmes comme on le suppose toujours. Or, dans ces conditions, l'on peut tirer ∂_x et g_{yz} des formules plus complètes (b) : il suffit 1° de remplacer, dans la première, $\frac{1}{2}\partial_x^2$ par la moitié du carré du second membre, c'est-à-dire par $\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2$, puisqu'on néglige les termes du troisième degré en u, v, w; 2° de diviser le second membre, pour la deuxième, par $1+\partial_y+\partial_z$, ce qui équivaut à le multiplier par $1-\frac{dv}{dy}-\frac{dw}{dz}$, en ne supprimant toujours que des termes du troisième degré. Il en résulte les deux expressions suivantes, exactes jusqu'au deuxième degré inclusivement, tant des ∂, g que des $\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)}$:

$$(d)\qquad \left\{\begin{aligned} \partial_x &= \frac{du}{dx}+\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2,\\ g_{yz} &= (b)\ \text{moins}\ \left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right)\left(\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)\\ &= \frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}+\frac{du}{dy}\frac{du}{dz}-\frac{dv}{dy}\frac{dw}{dy}-\frac{dv}{dz}\frac{dw}{dz};\end{aligned}\right.$$

la première pouvant être obtenue aussi par le développement du radical de (a) comme puissance $\frac{1}{2}$ de $1+\left(2\frac{du}{dx}+\ldots\right)$, en ayant soin, comme me l'a fait remarquer M. Brill, de ne pas oublier *le troisième terme* du développement, qui est

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1.2}\left(2\frac{du}{dx}+\ldots\right)^2=-\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2.$$

3. Par contre, il faut, le potentiel étant toujours désigné, ainsi que les six composantes, parallèlement aux trois axes fixes coordonnés rectangles, des pressions sur l'unité de trois petites faces qui leur sont respectivement normales, se croisant au point (x, y, z)

$$(e)\qquad \left\{\begin{array}{l} \text{par } \Phi^0 \text{ et } p^0_{xx},\ p^0_{yy},\ p^0_{zz},\ p^0_{yz},\ p^0_{zx},\ p^0_{xy}, \text{ avant}\\ \qquad\qquad \text{les déformations opérées } \partial,\ g;\\ \text{par } \Phi \text{ et } p_{xx},\ p_{yy},\ p_{zz},\ p_{yz},\ p_{zx},\ p_{xy} \text{ après;}\end{array}\right.$$

et, enfin, des portions de ces sept dernières quantités, composées de la même manière en fonction des distances moléculaires initiales que quand les pressions initiales $p^0_{xx},\ldots, p^0_{xy}$ sont nulles,

$$(f) \qquad \text{par } \Phi^1 \text{ et } p^1_{xx},\ p^1_{yy},\ p^1_{zz},\ p^1_{yz},\ p^1_{zx},\ p^1_{xy};$$

il faut, dis-je, ainsi que me l'a fait remarquer M. Boussinesq, prendre pour l'expression du potentiel total Φ,

$$(g) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi = \Phi^0 &+ p^0_{xx}(\partial_x + \tfrac{1}{2}\partial_x^2) + p^0_{yy}(\partial_y + \tfrac{1}{2}\partial_y^2) + p^0_{zz}(\partial_z + \tfrac{1}{2}\partial_z^2) \\ &+ p^0_{yz}\, g_{yz}(1+\partial_y)(1+\partial_z) + p^0_{zx}\, g_{zx}(1+\partial_z)(1+\partial_x) \\ &+ p^0_{xy}(1+\partial_x)(1+\partial_y) + \Phi^1, \end{aligned} \right.$$

et non pas la formule (9) $\Phi = \Phi^0 + p^0_{xx}\partial_x + \ldots + \Phi^1$ de 1863, dans laquelle le sextinôme qui figure entre Φ^0 et Φ^1 n'avait pas de termes du second degré, ou se réduisait à

$$(h) \qquad p^0_{xx}\partial_x + p^0_{yy}\partial_y + p^0_{zz}\partial_z + p^0_{yz} g_{yz} + p^0_{zx} g_{zx} + p^0_{xy} g_{xy}.$$

En effet, c'est à cette expression (g) qu'on arrive réellement, lorsqu'on établit par le calcul des forces moléculaires la valeur du potentiel Φ, ainsi qu'il a été fait à la dernière note du n° 3 du Mémoire de 1863 (p. 280-281), car on trouve, comme on peut voir en s'y reportant, avant le polynôme homogène du second degré (6) en $\partial_x,\ldots g_{yz},\ldots$ à vingt et un termes, que Φ^1 représente, un sextinôme en $p^0_{xx},\ldots p^0_{xy}$, dans lequel ce qui affecte ces six pressions p^0 revient aux seconds membres des équations exactes (b) ci-dessus. Or ces seconds membres représentent, d'après les premiers, non pas $\partial_x,\ldots g_{yz},\ldots$ qui figurent dans (4), mais précisément $\partial_x + \frac{1}{2}\partial_x^2,\ldots, g_{yz}(1+\partial_y)(1+\partial_z),\ldots,$ ou ce qui affecte les p^0 dans l'expression (g).

4. Si maintenant, dans l'expression complète (g) du potentiel Φ ainsi établie, nous mettons pour les ∂, g les expressions rectifiées (d), ce sera la même chose que d'y mettre les expressions (b) pour

$$\partial_x + \tfrac{1}{2}\partial_x^2,\ldots, \quad g_{yz}(1+\partial_y)(1+\partial_z),\ldots;$$

et, par conséquent, aussi la même chose que de substituer, comme j'ai fait en 1863, les expressions incomplètes (c) à $\partial_x, \ldots, g_{yz}, \ldots$, dans la formule aussi incomplète (9) qu'on a pour Φ en effaçant les carrés et produits des ∂, g qui affectent les p^0 de la formule (g), ou en prenant l'expression (h) pour les six termes en p^0. On obtiendra donc, au moyen du calcul des variations appliquée en 1863, mais maintenant par le fait aux expressions nouvelles ou rectifiées (g) et (d) ou (b), pour les composantes des pressions aux limites ou sur les éléments $d\Omega$ d'une surface enveloppe Ω du corps ou d'une quelconque de ses portions finies, on obtiendra, dis-je, précisément et encore les formules complètes de composantes de pression, établies en 1829 [*] par Cauchy à la suite d'un calcul des résultantes des forces moléculaires supposées n'être sensibles qu'à des distances insensibles [calcul résumé à la note après ces formules (10) de 1863]; formules qui sont :

$$(i)\quad \begin{cases} p_{xx} = p^0_{xx}\left(1 + \dfrac{du}{dx} - \dfrac{dv}{dy} - \dfrac{dw}{dz}\right) + 2p^0_{xy}\dfrac{du}{dy} + 2p^0_{zx}\dfrac{du}{dz} + p^1_{xx}, \\ p_{yy} = \ldots, \quad p_{zz} = \ldots, \\ p_{yz} = p^0_{yz}\left(1 - \dfrac{du}{dx}\right) + p^0_{yy}\dfrac{dw}{dy} + p^0_{zz}\dfrac{dv}{dz} + p^0_{zx}\dfrac{dv}{dx} + p^0_{xy}\dfrac{dw}{dx} + p^1_{yz}, \\ p_{zx} = \ldots, \quad p_{xy} = \ldots, \end{cases}$$

pouvant être écrites sous cette forme très-symétrique :

$$(i\,bis)\quad \begin{cases} p_{xx} = p^0_{xx}\left(1 - \dfrac{du}{dx} - \dfrac{dv}{dy} - \dfrac{dw}{dz}\right) + 2\left(p^0_{xx}\dfrac{du}{dx} + p^0_{xy}\dfrac{du}{dy} + p^0_{xz}\dfrac{du}{dz}\right) + p^1_{xx}, \\ p_{yz} = p^0_{yz}\left(1 - \dfrac{du}{dx} - \dfrac{dv}{dy} - \dfrac{dw}{dz}\right) \\ \qquad + \left(p^0_{yx}\dfrac{dw}{dx} + p^0_{yy}\dfrac{dw}{dy} + p^0_{yz}\dfrac{dw}{dz}\right) + \left(p^0_{zx}\dfrac{dv}{dx} + p^0_{zy}\dfrac{dv}{dy} + p^0_{zz}\dfrac{dv}{dz}\right) + p^1_{yz}, \end{cases}$$

où $p^1_{xx}, \ldots, p^1_{yz}, \ldots$ désignent toujours les six dérivées sextinômes, par rapport à $\partial_x, \ldots, g_{yz}, \ldots$ respectivement, de la partie à vingt et un

[*] *Exercices de mathématiques*, 4e année, p. 138, form. (36), (37).

termes du second degré [(6) de 1863]

$$(j) \qquad \Phi' = \tfrac{1}{2}\mathfrak{a}_{xxxx}\partial_x^2 + \ldots + \tfrac{1}{2}\mathfrak{a}_{yzyz}\mathfrak{g}_{yz}^2 + \ldots + \mathfrak{a}_{yyxy}\partial_y\mathfrak{g}_{xy},$$

du potentiel Φ, c'est-à-dire les expressions

$$(k) \quad \begin{cases} p_{xx}^1 = \mathfrak{a}_{xxxx}\partial_x + \mathfrak{a}_{xxyy}\partial_y + \mathfrak{a}_{xxzz}\partial_z + \mathfrak{a}_{xxyz}\mathfrak{g}_{yz} + \mathfrak{a}_{xxzx}\mathfrak{g}_{zx} + \mathfrak{a}_{xxyz}\mathfrak{g}_{xy}, \\ p_{yy}^1 = \ldots, \qquad p_{zz}^1 = \ldots, \\ p_{yz}^1 = \mathfrak{a}_{yzxx}\partial_x + \mathfrak{a}_{yzyy}\partial_y + \mathfrak{a}_{yzzz}\partial_z + \mathfrak{a}_{yzyz}\mathfrak{g}_{yz} + \mathfrak{a}_{yzzx}\mathfrak{g}_{zx} + \mathfrak{a}_{yzxy}\mathfrak{g}_{xy}, \\ p_{zx}^1 = \ldots, \qquad p_{xy}^1 = \ldots; \end{cases}$$

semblables à celles (1) du Mémoire de 1863.

Les adversaires des considérations moléculaires croient, comme on a dit, pouvoir poser ces expressions (k) de prime abord, pour le cas particulier et ordinaire de nullité des p^0, comme *fonctions linéaires* des $\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$; mais c'est admettre implicitement, comme nous avons dit, la grande loi physique que tous les faits prouvent, et dont l'invocation patente est seule propre à lever les incertitudes que cette manière douteuse de raisonner laisse subsister.

Quant à la partie de l'intégrale triple qui reste après qu'on a détaché les intégrales doubles donnant les pressions aux limites ou sur l'enveloppe Ω, elle sera aussi la même que si la double modification à l'expression de Φ et aux expressions des ∂ et $\mathfrak{g}$ n'avait pas été opérée; en sorte qu'elle restera telle qu'elle est à la formule (15) de la note du n° **3** du Mémoire de 1863; et les équations différentielles indéfinies qu'on dit, au n° **4**, pouvoir en être tirées, seront toujours les équations (19).

5. Mais on voit que cette manière d'obtenir soit les six formules complètes (10) ou (i) de pressions, soit les trois équations différentielles complètes (19), et qui consiste à les tirer de l'expression préalablement établie du potentiel, ne dispense nullement du calcul des forces moléculaires, car l'expression rectifiée ou complétée (g) du potentiel ne s'obtient qu'au moyen d'un pareil calcul.

Même, il faut bien le remarquer, les coefficients d'élasticité, tels que $\mathfrak{a}_{xxxx}$, qui entrent dans les sextinômes $p_{xx}^1, \ldots, \ldots, p_{yz}^1, \ldots$ des formules (i) de Cauchy *ne peuvent être définis que par ces forces,* car ce sont les sommes (12) (de la note du n° 3) :

$$(l) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\rho}{2} \mathbf{S} \frac{m}{r} \frac{d\frac{fr}{r}}{dr} (\mathrm{x}^4 \text{ ou } \mathrm{y}^2\mathrm{z}^2 \text{ ou } \mathrm{y}^3\mathrm{z} \text{ ou } \mathrm{x}^2\mathrm{yz}) \\ &\quad = \mathrm{a}_{xxxx} \text{ ou } \mathrm{a}_{yzyz} \text{ ou } \mathrm{a}_{yyyz} \text{ ou } \mathrm{a}_{xxyz} \end{aligned} \right.$$

de fonctions des distances moléculaires r dont x, y, z désignent les projections sur les axes fixes, fr représentant l'action mutuelle inconnue de deux molécules à la distance r par unité de masse, et ρ étant la densité qui dépend aussi des distances où sont les molécules les unes des autres.

Leurs expressions (l) en r ont les mêmes formes que quand les pressions primitives p^0 étaient nulles, ou que le corps se trouvait dans l'état dit *naturel* avant les déplacements u, v, w de ces points. Mais les grandeurs de ces coefficients $\mathrm{a}_{\ldots}$ dépendent des grandeurs qu'avaient les distances moléculaires r lorsque les pressions étaient $p^0_{xx}, \ldots, p^0_{xy}$. Or les distances elles-mêmes dépendent des intensités de ces pressions p^0, qu'il faut supposer considérables pour que les termes des formules (i) où elles sont multipliées par les dérivées de u, v, w ne soient pas négligeables. Les coefficients d'élasticité $\mathrm{a}_{xxxx}, \ldots, \mathrm{a}_{yyyz}$, et, par suite, les parties $p^1_{xx}, \ldots$ des formules (i) ou (i *bis*) dépendent ainsi, implicitement et nécessairement, à un certain degré de leurs parties $p^0_{xx}, \ldots, p^0_{xy}$.

6. Au reste, il n'y *que les premiers termes* des formules (i) de Cauchy, savoir :

$$\text{pour } p_{xx}, \quad p^0_{xx}\left(1 + \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz}\right), \quad \text{et, pour } p_{yz}, \quad p^0_{yz}\left(1 - \frac{du}{dx}\right),$$

dont la forme ait besoin d'être établie par un calcul d'actions moléculaires. Les autres termes, affectés des pressions primitives p^0 résultent simplement du petit changement que les déplacements des points ont opéré dans l'orientation des plans sur lesquels ces pressions s'exerçaient, et ils peuvent être obtenus en mettant seulement en œuvre le théorème de l'équilibre du tétraèdre élémentaire, qui régit les changements de plans de pression [*].

En effet, les formules connues de changement de plans de pression, fournies immédiatement par ce théorème, donnent, pour les composantes, suivant des directions nouvelles x', y', z', rectangulaires ou obliques, des pressions sur l'unité de faces qui leur sont normales, les expressions suivantes, si $c_{zx'}$, $c_{yz'}$, etc., désignent les cosinus des angles de z avec x', de y avec z', et si l'on suppose que x', y', z' ne font que de très-petits angles avec les directions rectangulaires x, y, z respectivement, en sorte qu'on puisse remplacer les trois cosinus $c_{xx'}$, $c_{yy'}$, $c_{zz'}$ par l'unité, et effacer les carrés et les produits deux à deux des six autres cosinus

$$(m)\qquad \begin{cases} p_{x'x'} = p_{xx} + 2p_{xy}c_{x'y} + 2p_{zx}c_{x'z}, \\ p_{y'z'} = p_{yz} + p_{yy}c_{z'y} + p_{zz}c_{y'z} + p_{zx}c_{y'x} + p_{xy}c_{z'x}. \end{cases}$$

Or si les directions x', y', z' sont suivant les perpendiculaires aux trois facettes dans lesquelles les petits déplacements u, v, w ont changé celles yz, zx, xy, ces six cosinus ont des valeurs connues [**], à savoir :

$$(n)\qquad \begin{cases} c_{x'y} = -\dfrac{du}{dy}, & c_{x'z} = -\dfrac{du}{dz}, & c_{y'z} = -\dfrac{dv}{dz}, \\ c_{y'x} = -\dfrac{dv}{dx}, & c_{z'x} = -\dfrac{dw}{dx}, & c_{z'y} = -\dfrac{dw}{dy}, \end{cases}$$

ce qui change ces formules en

$$(o)\qquad \begin{cases} p_{x'x'} = p_{xx} - 2p_{xy}\dfrac{du}{dy} - 2p_{zx}\dfrac{du}{dz}, \\ p_{y'x'} = p_{yz} - p_{yy}\dfrac{dw}{dy} - p_{zz}\dfrac{dv}{dz} - p_{zx}\dfrac{dv}{dx} - p_{yx}\dfrac{dw}{dx}. \end{cases}$$

---

[*] Je l'ai déjà montré aux Notes sur Navier (Appendice III, § 23), ainsi qu'au n° 278 des *Leçons de Mécanique analytique*, publiées d'après Cauchy, etc., par M. l'abbé Moigno.

[**] Formules (16) d'une Note du n° 3 du Mémoire de 1863. Elles avaient été données par Poisson, au XX^e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, p. 39.

Tirant p_{xx}, p_{yz}, l'on peut, dans les termes contenant comme facteurs les $\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$, remplacer les $p_{xy}, p_{zx}, p_{yy}, \ldots$ par leurs valeurs primitives $p^0_{xy}, \ldots$, dont elles ne diffèrent que de quantités affectées des mêmes dérivées très-petites. Il en résulte

$$(p) \qquad \left\{ \begin{aligned} p_{xx} &= p_{x'x'} + 2p^0_{xy}\frac{du}{dy} + 2p^0_{zx}\frac{du}{dz}, \\ p_{yz} &= p_{y'z'} + p^0_{yy}\frac{dw}{dy} + p^0_{zz}\frac{dv}{dz} + p^0_{zx}\frac{dv}{dx} + p^0_{xy}\frac{dw}{dx}. \end{aligned} \right.$$

Comparant à (i), l'on voit qu'il ne manque plus, pour que les formules de Cauchy soient démontrées, que d'établir qu'on a

$$(q) \qquad \left\{ \begin{aligned} p_{x'x'} &= p^0_{xx}(1 + \partial_x - \partial_y - \partial_z) + p^1_{xx}, \\ p_{y'z'} &= p^0_{yz}(1 - \partial_x) + p^1_{yz}. \end{aligned} \right.$$

Or, la question étant réduite à ces termes, les considérations de mécanique moléculaire qui la résolvent, à la manière de la Note après les formules (10), sont tellement simples, que personne, ce me semble, ne doit se refuser à leurs conséquences. Il suffit, en ne supposant pas d'autres déformations que les trois dilatations ∂_x, ∂_y, ∂_z, de reconnaître que les parties de $p_{x'x'}$, $p_{y'z'}$ qui ne dépendent pas des augmentations $d\frac{fr}{r}$ du quotient des intensités fr des forces par les petites distances r où elles agissent, doivent excéder p^0_{xx}, p^0_{yz} dans les proportions respectives des accroissements du carré x^2 et du produit yz des projections des r sur x, et sur y, z, sauf toutefois ce qui résulte de la diminution de la densité qui, d'une autre part, doit faire diminuer proportionnellement les sommes de composantes d'actions (même Note). Il en résulte, en effet, que les parties de $p_{x'x'}$, $p_{y'z'}$ dont on parle sont égales aux produits $p^0_{xx}(1 + \partial_x)^2$, $p^0_{yz}(1 + \partial_y)(1 + \partial_z)$ divisés l'un et l'autre par $(1 + \partial_x)(1 + \partial_y)(1 + \partial_z)$ rapport des densités ; ce qui revient bien à (q) ou aux premiers termes de (i).

On arrive, comme on voit, très-simplement à ces formules complètes (i) [*] de composantes de pressions dues à Cauchy [**], et composées d'une partie en p^0 et d'une partie en a....

7. Ces deux parties affectées, l'une des pressions antérieures p^0, l'autre des coefficients d'élasticité a...., sont distinctes aussi dans l'expression générale (g) du potentiel ou de l'énergie latente Φ des forces intérieures, où les p^0 comme les a.... se trouvent multipliés par les dilatations et glissements, ainsi que par leurs carrés et produits deux à deux.

Plusieurs auteurs ordonnent d'une autre manière l'expression de Φ. Ils développent ce potentiel en portions polynômes, composées respectivement des termes du premier, du second, du troisième,... degré en $\partial_x, \partial_y, \partial_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}$, en ne conservant toutefois que les termes des deux premiers degrés. Il en résulte que le sextinôme (h) $p^0_{xx}\partial_x + \ldots$ se trouve substitué, dans leurs formules, à celui $p^0_{xx}(\partial_x + \frac{1}{2}\partial_x^2) + \ldots$ qui figure dans (g), ou qu'ils posent l'expression

$$(r)\qquad \Phi = \Phi^0 + p^0_{xx}\partial_x + p^0_{yy}\partial_y + p^0_{zz}\partial_z + p^0_{yz}g_{yz} + p^0_{zx}g_{zx} + p^0_{xy}g_{xy} + \Phi^{(2)},$$

dans laquelle $\Phi^{(2)}$ est, comme Φ', un polynôme complet et homogène du second degré en $\partial_x, \ldots, g_{xy}$ à vingt et un termes.

Il en résulte, si l'on appelle $p^{(2)}_{xx}, p^{(2)}_{yy}, p^{(2)}_{zz}, p^{(2)}_{yz}, p^{(2)}_{zx}, p^{(2)}_{xy}$ les dérivées $\frac{d\Phi^{(2)}}{d\partial_x}, \frac{d\Phi^{(2)}}{d\partial_y}, \ldots, \frac{d\Phi^{(2)}}{dg_{xy}}$ de ce polynôme par rapport aux six déformations élémentaires ∂, g, que l'on a simplement

$$(s)\qquad \frac{d\Phi}{d\partial_x} = p^0_{xx} + p^{(2)}_{xx},\quad \frac{d\Phi}{d\partial_y} = p^0_{yy} + p^{(2)}_{yy}, \ldots\quad \frac{d\Phi}{dg_{xy}} = p^0_{xy} + p^{(2)}_{xy},$$

---

[*] On peut, vu les expressions (70) données au n° 14 du Mémoire de 1863 pour les petites rotations *moyennes* τ_x, τ_y, τ_z, qui ont lieu autour des trois axes, y remplacer $\frac{dw}{dy}$ par $\tau_x + \frac{1}{2}g_{yz}$, $\frac{dv}{dz}$ par $-\tau_x + \frac{1}{2}g_{yz}$, et ainsi des autres; et n'avoir plus ainsi, dans ces formules, que des dilatations ∂, des glissements g, et des rotations τ.

[**] Elles ont été adoptées finalement par Poisson pour les corps isotropes [*Journal de l'École Polytechnique*, XX^e cahier, form. (10), p. 52].

tandis qu'on a, avec l'expression (g) du même potentiel Φ,

$$(t)\quad \begin{cases} \dfrac{d\Phi}{d\partial_x} = p^0_{xx}(1+\partial_x) + p^0_{xy}g_{xy} + p^0_{zx}g_{zx} + p^1_{xx}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dfrac{d\Phi}{dg_{yz}} = p^0_{yz}(1+\partial_y+\partial_z) + p^1_{yz}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Il en résulte aussi, en appliquant à cette expression (r) de Φ le calcul des variations à la manière de Lagrange et de M. Ch. Neumann, comme on a fait (n° 4 ci-dessus), pour celle (q), c'est-à-dire après y avoir mis les expressions complètes (d) pour les ∂ et g, qu'on obtient, au lieu des formules (i) de Cauchy, les suivantes :

$$(u)\quad \begin{cases} p_{xx} = p^0_{xx}\left(1 - \dfrac{dv}{dy} - \dfrac{dw}{dz}\right) - p^0_{xy}\left(\dfrac{dv}{dx} - \dfrac{du}{dy}\right) + p^0_{zx}\left(\dfrac{du}{dz} - \dfrac{dw}{dx}\right) + p^{(2)}_{xx}, \\ \qquad p_{yy} = \dots, \qquad\qquad p_{zz} = \dots, \\ p_{yz} = p^0_{yz}\left(1 - \dfrac{du}{dx} - \dfrac{dv}{dy} - \dfrac{dw}{dz}\right) + p^0_{yy}\dfrac{dw}{dy} + p^0_{zz}\dfrac{dv}{dz} + p^0_{zx}\dfrac{dv}{dx} + p^0_{xy}\dfrac{dw}{dx} + p^{(2)}_{yz}, \\ \qquad p_{zx} = \dots, \qquad\qquad p_{xy} = \dots; \end{cases}$$

qui, pas plus que les expressions (i), ne sont les dérivées de Φ ou de toute autre fonction par rapport à six variables quelconques, mais où on reconnaît bien que les derniers termes

$$p^{(2)}_{xx}, \dots, \quad p^{(2)}_{yz}, \dots$$

doivent être, comme $p^1_{xx}, \dots, p^1_{yz}, \dots$, les six dérivées respectives d'une même fonction par rapport à $\partial_x, \dots, g_{yz}, \dots$; car, en retranchant respectivement les six expressions (u) des six expressions (i), qui n'en diffèrent que par la forme, l'on a des équations dont on tire, pour les différences

$$p^{(2)}_{xx} - p^1_{xx}, \dots, \quad p^{(2)}_{yz} - p^{(1)}_{yz}, \dots,$$

des expressions qui sont bien les six dérivées par rapport à $\partial_x, \dots,$

$g_{yz},\ldots$ d'une même fonction, savoir :

$$\Phi^{(2)}-\Phi^{(1)}=\tfrac{1}{2}p^0_{xx}\partial^2_x+\tfrac{1}{2}p^0_{yy}\partial^2_y+\tfrac{1}{2}p^0_{zz}\partial^2_z \\ +p^0_{yz}g_{yz}(\partial_y+\partial_z)+p^0_{zx}g_{zx}(\partial_z+\partial_x)+p^0_{xy}g_{xy}(\partial_x+\partial_y).$$

Et ces six portions de pression,

$$p^{(2)}_{xx},\ldots,\ldots,\quad p^{(2)}_{yz},\ldots,\ldots,$$

sont, comme celles $p^1_{xx},\ldots$, des sextinômes en $\partial_x,\ldots, g_{yz},\ldots$ affectés de coefficients qui, étant appelés

$$\mathrm{a}'_{xxxx},\ldots,\quad \mathrm{a}'_{yzyz},\ldots,\quad \mathrm{a}'_{xxyz},\ldots,$$

sont reconnus égaux à ceux $\mathrm{a}_{xxxx},\ldots$, de mêmes indices, des p^1_{xx}, sauf les neuf a' suivants, dont voici les relations avec les $\mathrm{a}_{\ldots}$ et les p^0 :

$$(v)\quad\left\{\begin{aligned} &\mathrm{a}'_{xxxx}=\mathrm{a}_{xxxx}+p^0_{xx},\quad \mathrm{a}'_{yyyy}=\mathrm{a}_{yyyy}+p^0_{yy},\quad \mathrm{a}'_{zzzz}=\mathrm{a}_{zzzz}+p^0_{zz},\\ &\mathrm{a}'_{yyyz}=\mathrm{a}_{yyyz}+p^0_{yz},\quad \mathrm{a}'_{zzyz}=\mathrm{a}_{zzyz}+p^0_{yz},\\ &\mathrm{a}'_{zzzx}=\mathrm{a}_{zzzx}+p^0_{zx},\quad \mathrm{a}'_{xxzx}=\mathrm{a}_{xxzx}+p^0_{zx},\\ &\mathrm{a}'_{xxxy}=\mathrm{a}_{xxxy}+p^0_{xy},\quad \mathrm{a}'_{yyxy}=\mathrm{a}_{yyxy}+p^0_{xy}.\end{aligned}\right.$$

M. Boussinesq arrive aux formules des composantes des pressions, en partant d'une de celles du potentiel, par une méthode à quelques égards plus directe que l'application du calcul des variations. Il établit d'abord [*], par une analyse exacte et délicate, et pour des grandeurs *quelconques* des déplacements u, v, w, ne produisant toutefois que des déformations ∂, g exprimées par les formules (b) ci-dessus, une expression très-générale donnant le travail total des forces élastiques intérieures sur l'unité de volume d'un élément, ou l'augmentation de leur potentiel Φ, pendant un instant dt; et il en tire les expressions de ces six forces $p_{xx}, p_{yy},\ldots, p_{xy}$ en fonction des dérivées de Φ par rapport aux neuf $\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)}$, puis, au moyen d'une transformation, par rapport aux six déformations élémentaires $\partial_x, \partial_y,\ldots, g_{xy}$. Elles se ré-

[*] Note complémentaire, présentée le 5 septembre 1870 (*Comptes rendus*, t. LXXI, p. 400), à son Mémoire *sur les ondes liquides périodiques*, qui va paraître au tome XX du *Recueil des Savants étrangers*.

duisent, dans les cas où l'on peut négliger les carrés et produits de ces quantités, à

$$(x)\left\{\begin{array}{l} p_{xx} = (1 - \partial_y - \partial_z)\dfrac{d\Phi}{d\partial_x} + \left(2\dfrac{du}{dz} - g_{zx}\right)\dfrac{d\Phi}{dg_{zx}} + \left(2\dfrac{du}{dy} - g_{xy}\right)\dfrac{d\Phi}{dg_{xy}}, \\ p_{yz} = (1 - \partial_x - \partial_y - \partial_z)\dfrac{d\Phi}{dg_{yz}} + \dfrac{dw}{dy}\dfrac{d\Phi}{d\partial_y} + \dfrac{dw}{dz}\dfrac{d\Phi}{d\partial_z} + \dfrac{dv}{dx}\dfrac{d\Phi}{dg_{zx}} + \dfrac{dw}{dx}\dfrac{d\Phi}{dg_{xy}}. \end{array}\right.$$

En y substituant les six expressions (s) des $\dfrac{d\Phi}{d\partial_x},\dots$ répondant à l'adoption de la deuxième forme (r) du potentiel, leurs secondes parties $p^{(2)}$, qui sont des sextinômes en $\partial_x, \partial_y, \dots, g_{xy}$, quantités très-petites du premier ordre, disparaissent des termes où les $d\Phi$ se trouvent multipliés par les ∂, g, ou par les dérivées de u, v, w, aussi de cet ordre. De cette substitution, en mettant pour les $\partial_x, \dots, g_{xy}$ les valeurs $\dfrac{du}{dx}, \dots, \dfrac{du}{dy} + \dfrac{dv}{dx}$, auxquelles ils se réduisent quand on néglige les petites quantités du second ordre, M. Boussinesq obtient bien, comme on voit, les formules nouvelles (u) des pressions.

Mais il est bon de remarquer qu'on obtient évidemment de la même manière celles (i) de Cauchy. Il suffit pour cela de substituer, dans (x), les dérivées de Φ prises sous la forme (t).

8. On peut sans aucun doute, en général, se servir à volonté des formules (i) de Cauchy, qui sont en rapport avec celle (g) $\Phi = \Phi_0 + p^0_{xx}(\partial_x + \frac{1}{2}\partial_x^2) + \dots$ du potentiel, ou des formules (u) en rapport avec celle (r) $\Phi = \Phi_0 + p^0_{xx}\partial_x + \dots$. Celles-ci donnent une expression un peu plus simple au potentiel, et, surtout, à ses six dérivées (s) $\dfrac{d\Phi}{d\partial_x} = p^0_{xx} + p^{(2)}_{xx}, \dots$, auxquelles M. Boussinesq a reconnu une certaine signification géométrique, et où l'on voit que les $p^{(2)}$ représentent toutes les parties variables ou affectées des ∂, g, tandis qu'avec l'expression (g) les parties variables ne sont pas toutes renfermées dans les sextinômes appelés p^1.

On pourra préférer, peut-être, les formes nouvelles (r), (u) dans les questions où les pressions p^0, antérieures aux déplacements supposés u, v, w, ont des intensités constantes, et où la variété des cas ne porte ainsi que sur les grandeurs des u, v, w, ou des déformations ∂, g,.... C'est ce qui peut avoir lieu pour la théorie de la lumière.

Mais dans les questions où les pressions primitives p^0 varieront d'intensité d'un cas à l'autre, je regarde comme préférable d'employer les formules de Cauchy (i) des pressions ultérieures p, et celle (g) du potentiel, où les coefficients des polynômes p' et Φ' ne sont que ceux d'élasticité ayant les significations (l) $\frac{\rho}{2}S\ldots$, sauf, si l'on ne peut pas attribuer à ces paramètres, avec une suffisante approximation, des grandeurs numériques constantes et connues, à déduire leurs valeurs des formules de la *deuxième partie* ci-après.

Sans doute, de même qu'on peut prouver que les pressions ou forces élastiques doivent avoir des expressions linéaires en $\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$ par la raison (qui me paraît la seule à en donner [*]) qu'elles résultent d'actions qui sont fonctions continues des distances moléculaires, et qui varient ainsi proportionnellement aux changements supposés très-petits de ces distances, de même on est en droit de prononcer, en se basant toujours et inévitablement sur la même loi, que le potentiel Φ, somme de produits des actions tant antérieures que nouvelles, par les petits changements des distances, doit être une fonction du second degré des mêmes neuf dérivées u, v, w, et, par suite, des six déformations ∂, g. Mais rien ne dit qu'il convienne de séparer l'expression de Φ en portion du premier degré et portion du deuxième, en ne tenant point compte de ce que la même loi physique apprend sur la composition de ses coefficients [**].

---

[*] Mémoire cité de 1863, n° 2, p. 262; et aussi, Mémoire sur la torsion, au tome XIV des *Savants étrangers*, n° 12, et Notes sur Navier, Appendice III, § 20, p. 555, 556.

[**] On peut remarquer encore que les formules (i) ou (i *bis*) de Cauchy, substituées dans l'une quelconque des trois équations d'équilibre, par exemple

$$\frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{yx}}{dy} + \frac{dp_{zx}}{dz} + \rho X = 0,$$

donnent, pour la partie en p^0, un sextinôme très-symétrique [équation (19) de 1863]; tandis que celles (u), substituées de même, donnent un polynôme dont la composition est bien moins simple, et peut faire juger que les formules dont il vient sont moins dans la nature de la question.

Ajoutons, au reste, que le choix entre les deux formes n'intéresse aucunement la question controversée du nombre des coefficients d'élasticité $a_{xxxx}, \ldots$; car, d'après les relations (ν) de neuf d'entre eux avec ceux $a'_{xxxx} \ldots$ de mêmes indices, s'il est établi, comme je le pense, que les premiers se réduisent à *quinze* inégaux à cause des six égalités complémentaires (8) $a_{yyzz} = a_{yzyz}$, $a_{xxyz} = a_{zxxy}, \ldots$ (du n° 3 du Mémoire de 1863) entre les douze que ces relations (ν) ne contiennent pas, les seconds a' se réduisent tout aussi bien à quinze, au lieu d'être au nombre de vingt et un comme le pensent les adversaires de l'emploi du calcul des forces agissant suivant les lignes de jonction des molécules. Ce n'est, en effet, que par suite d'une réunion opérée, ou plutôt d'une sorte de confusion, des termes $p^0 \frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$ qui apparaissent distincts dans les formules soit (i), soit (u), avec ceux des parties sextinômes p^1 ou $p^{(2)}$ de ces formules, qu'ont pu prendre naissance les erreurs [*] que Wertheim a cru étayer d'expériences aujourd'hui mieux interprétées [**], et prouvant seulement (et tout au plus) la non-isotropie des matières sur lesquelles il opérait.

DEUXIÈME PARTIE [***].

9. On a dit (n° 5) que les coefficients

$$a_{xxxx}, \ldots, \quad a_{xxyz}, \ldots, \quad a_{yyzx}, \ldots$$

affectant les $\partial_x, \ldots$, $g_{yz}, \ldots$ dans les parties sextinômes (k) $p^1_{xx}, \ldots$, $p^1_{yz}, \ldots$ des formules complètes (i) ou (i *bis*) des pressions dans l'intérieur

---

[*] *Voir* §§ 51 et suivants de l'Appendice V de la 3e édition, annotée (1864), des *Leçons de Navier*.

[**] *Voir* l'extrait (2 août 1869) d'un Mémoire de M. Cornu aux *Comptes rendus*, t. LXIX, p. 334 et 336.

[***] Ce qui y est traité a déjà été le sujet d'une Note présentée le 19 septembre 1870 à l'Académie et insérée aux *Comptes rendus* des 27 mars et 3 avril 1871, t. LXXII, p. 355 et 391.

d'un corps, dépendaient à un certain degré des six composantes

$$p^0_{xx},\ p^0_{xy},\ldots,\quad p^0_{yz},\ldots,\quad p^0_{xy}$$

de celles qui y étaient en jeu au moment où il a commencé à subir les petites déformations que les $\partial_x,\ldots,\ g_{yz},\ldots$ mesurent.

En effet, les quinze coefficients, que nous écrirons plus souvent

$$\mathrm{a}_{x^4},\ \mathrm{a}_{y^2z^2},\ldots,$$

ont les expressions (l)

$$(a')\quad \mathrm{a}_{x^4} \text{ ou } \mathrm{a}_{y^2z^2} \text{ ou } \mathrm{a}_{y^3z} \text{ ou } \mathrm{a}_{x^2yz} = \frac{\rho}{2}\mathrm{S}\, m\, \frac{d\frac{fr}{r}}{rdr}(\mathrm{x}^4 \text{ ou } \mathrm{y}^2\mathrm{z}^2 \text{ ou } \mathrm{y}^3\mathrm{z} \text{ ou } \mathrm{x}^2\mathrm{yz}).$$

Or les distances r, leurs projections x, y, z, et, aussi, la densité ρ, figurant dans ces expressions, dépendent elles-mêmes de ces pressions p^0 qui tenaient les molécules plus ou moins rapprochées entre elles et tournées de diverses manières.

Cette dépendance est faible lorsque les p^0 ne sont que de l'ordre de grandeur des p^1, et qu'en même temps les déformations produites $\partial_x,\ldots,\ g_{yz},\ldots$ sont assez petites pour ne point changer d'une manière permanente la contexture élastique qu'avait le corps au moment où les pressions n'étaient que les p^0. Alors on peut réduire les formules (i) ou (u) à

$$(b')\qquad p_{xx} = p^0_{xx} + p^1_{xx},\ldots,\ \ldots,\quad p_{yz} = p^0_{yz} + p^1_{yz},\ldots,\ \ldots,$$

puisqu'on peut alors négliger les produits des p^0 par les ∂, g qui ne doivent être que de très-petites fractions. Alors encore on peut très-bien adopter pour les coefficients $\mathrm{a}_{xxxx},\ldots$ des valeurs qui auraient été mesurées expérimentalement d'avance pour un état où les pressions intérieures seraient sensiblement nulles, si, de cet état à celui où les pressions sont les p^0, il n'y a pas de déformations permanentes; ce que justifie la constante reconnue, dans de certaines limites, du *module d'élasticité* de traction ou de flexion des prismes élastiques.

Mais il n'en est pas de même lorsque les p^0 sont assez considérables (même dans les limites de la conservation de la contexture) pour qu'il faille tenir compte de leurs produits par les dérivées $\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)}$ des déplacements, c'est-à-dire de tous les termes des formules (i).

Or, on ne peut pas supposer que les coefficients $\mathrm{a}_{xxxx},\ldots$ aient été mesuré d'avance pour tous les systèmes possibles de ces pressions primitives p^0.

Nous allons donc chercher à déterminer les valeurs des coefficients

$$\mathrm{a}_{x^4},\quad \mathrm{a}_{y^2z^2},\quad \mathrm{a}_{y^3z},\quad \mathrm{a}_{x^2yz}$$

relatifs à un état du corps, tel que celui où les pressions sont

$$p^{\circ}_{xx},\ldots,\ \ldots,\quad p^{\circ}_{yz},\ldots,\ \ldots,$$

en fonction de coefficients analogues mesurés pour un état constant et antérieur, coefficients que nous appellerons

$$\mathrm{a}^{\circ}_{x^4},\ \mathrm{a}^{\circ}_{x^2z^2},\ldots,\quad \mathrm{a}^{\circ}_{y^2z^2},\ldots,\quad \mathrm{a}^{\circ}_{x^2yz},\ldots,$$

et des dérivées des déplacements que ses points ont éprouvés de cet état à l'autre. Cet état antérieur sera, par exemple, l'état dit *naturel* où les pressions sont toutes nulles, ou bien, plutôt, l'état *habituel* où elles se réduisent à ce qui vient de la pression atmosphérique, ainsi que du poids propre du corps et des réactions de ses appuis.

10. Pour arriver à cette détermination, nous n'avons qu'à transformer l'expression générale (a') des coefficients $\mathrm{a}_{\ldots}$ par le même moyen dont s'est servi Cauchy (note du n° 3 de mon Mémoire de 1863) pour transformer celle

$$(c')\qquad p_{xx}\quad\text{ou}\quad p_{yz}=\frac{\rho_1}{2}\,\mathbf{S}\,m\frac{fr_1}{r_1}\left(\mathrm{x}_1^2\ \text{ ou }\ \mathrm{y}_1\mathrm{z}_1\right),$$

où ρ_1, r_1, x_1, y_1, z_1 étaient relatifs à l'état qui suit les déplacements u, v, w, en une autre ne contenant que ρ, r, x, y, z relatifs à l'état qui les a immédiatement précédés.

Appelons donc

$$x_0,\quad y_0,\quad z_0$$

les coordonnées (toujours rectangles et rapportées aux mêmes axes fixes), dans un état antérieur connu, du point M, ayant pour coordonnées x, y, z dans l'état subséquent où les pressions sont les p^0; et

$$u_0,\quad v_0,\quad w_0,$$

$$\partial^{\circ}_x,\ \partial^{\circ}_y,\ \partial^{\circ}_z,\quad g^{\circ}_{yz},\ g^{\circ}_{zx},\ g^{\circ}_{xy},$$

ces déplacements, dilatations et glissements, supposés petits (mais pouvant être bien plus considérables que ceux u, v, w, $\partial_x, \ldots, g_{xy}$), que le même point M a dû subir pour passer du premier état au second. Nous aurons

$$(d')\quad\begin{cases} \mathrm{x} = \mathrm{x}_0 + \dfrac{du_0}{dx_0}\mathrm{x}_0 + \dfrac{du_0}{dy_0}\mathrm{y}_0 + \dfrac{du_0}{dz_0}\mathrm{z}_0 + \dfrac{1}{1.2}\left(\dfrac{d^2u_0}{dx_0^2}\mathrm{x}_0^2 + \ldots\right), \\ \mathrm{y} = \mathrm{y}_0 + \dfrac{dv_0}{dx_0}\mathrm{x}_0 + \ldots, \quad \mathrm{z} = \mathrm{z}_0 + \dfrac{dw_0}{dx_0}\mathrm{x}_0 + \ldots; \\ \mathrm{x}^4 = \mathrm{x}_0^4 + 4\mathrm{x}_0^3\left(\mathrm{x}_0\dfrac{d}{dx_0} + \mathrm{y}_0\dfrac{d}{dy_0} + \mathrm{z}_0\dfrac{d}{dz_0}\right)u_0 + \ldots, \\ \mathrm{y}^2\mathrm{z}^2 = \mathrm{y}_0^2\mathrm{z}_0^2 + 2\mathrm{y}_0\mathrm{z}_0\left(\mathrm{x}_0\dfrac{d}{dx_0} + \mathrm{y}_0\dfrac{d}{dy_0} + \mathrm{z}_0\dfrac{d}{dz_0}\right)(\mathrm{z}_0v_0 + \mathrm{y}_0w_0) + \ldots; \end{cases}$$

$$(e')\quad\begin{cases} r - r_0 = -r_0 + (\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2)^{\frac{1}{2}} \\ \quad = \dfrac{1}{r_0}\Big[\mathrm{x}_0^2\dfrac{du_0}{dx_0} + \mathrm{y}_0^2\dfrac{dv_0}{dy_0} + \mathrm{z}_0^2\dfrac{dw_0}{dz_0} \\ \qquad + \mathrm{y}_0\mathrm{z}_0\left(\dfrac{dv_0}{dz_0} + \dfrac{dw_0}{dy_0}\right) + \mathrm{z}_0\mathrm{x}_0\left(\dfrac{dw_0}{dx_0} + \dfrac{du_0}{dz_0}\right) + \mathrm{x}_0\mathrm{y}_0\left(\dfrac{du_0}{dy_0} + \dfrac{dv_0}{dx_0}\right)\Big] \\ \quad + \dfrac{1}{2r_0^2}\Big[\left(\dfrac{du_0}{dx_0}\mathrm{x}_0 + \dfrac{du_0}{dy_0}\mathrm{y}_0 + \dfrac{du_0}{dz_0}\mathrm{z}_0 + \ldots\right)^2 \\ \qquad + \left(\dfrac{dv_0}{dx_0}\mathrm{x}_0 + \ldots\right)^2 + \left(\dfrac{dw_0}{dx_0}\mathrm{x}_0 + \ldots\right)^2\Big] \\ \quad + \dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{1.2}\cdot\dfrac{4}{r_0^2}\left[\mathrm{x}_0^2\dfrac{du_0}{dx_0} + \mathrm{y}_0^2\dfrac{dv_0}{dy_0} + \ldots + \mathrm{x}_0\mathrm{y}_0\left(\dfrac{du_0}{dy_0} + \dfrac{dv_0}{dx_0}\right)\right]^2 \\ \quad + \dfrac{1}{2r_0}\left(\mathrm{x}_0^3\dfrac{d^2u_0}{dx_0^2} + \ldots\right); \end{cases}$$

$$(f')\qquad \frac{d\dfrac{fr}{r}}{r\,dr} = \frac{d\dfrac{fr_0}{r_0}}{r_0\,dr_0} + (r - r_0)\frac{d\dfrac{d\frac{fr_0}{r_0}}{r_0\,dr_0}}{dr_0} + \ldots;$$

$$(g')\quad \rho = \frac{\rho_0}{\left(1 + \dfrac{du_0}{dx_0}\right)\left(1 + \dfrac{dv_0}{dy_0}\right)\left(1 + \dfrac{dw_0}{dz_0}\right) - \dfrac{dv_0}{dz_0}\dfrac{dw_0}{dy_0} - \dfrac{dw_0}{dx_0}\dfrac{du_0}{dz_0} - \dfrac{du_0}{dy_0}\dfrac{dv_0}{dx_0} + \ldots}\ [*].$$

---

[*] Le dénominateur de la valeur de ρ est, sauf des produits du troisième ordre, que l'on n'a point écrits, le déterminant donnant le volume du parallélépipède obliquangle dans lequel s'est changé un élément cubique, divisé par le volume de celui-ci.

Substituons dans (c'), effectuons les multiplications, et faisons passer hors des $\mathbf{S}$ les dérivées $\frac{d(u_0, v_0, w_0)}{d(x_0, y_0, z_0)}$ qui sont des quantités sensiblement constantes dans l'étendue imperceptible de la sphère des actions des molécules sur une masse qui serait concentrée au point M (x_0, y_0, z_0). Nous supprimerons les carrés et les produits de ces dérivées très-petites, ce qui réduira (g') à

$$\rho = \rho_0 (1 - \partial_x^0 - \partial_y^0 - \partial_z^0).$$

Nous effacerons aussi toutes les sommes $\mathbf{S}$ dans lesquelles il entrerait comme facteurs plus de quatre des grandeurs imperceptibles x_0, y_0, z_0, ce qui nous permettra de supprimer, dans les valeurs (d') de x, y, z, les dérivées du second ordre de u_0, v_0, w_0, et, dans (f'), son terme en $r - r_0$. Ces termes, provenant de la mise en compte de dérivées d'ordre supérieur au premier, peuvent être utiles à conserver dans certaines questions élevées des théories de la lumière et de la chaleur [*]; mais une pareille approximation est superflue dans la question qui nous occupe.

Nous obtiendrons ainsi, en considérant qu'on a, d'après la définition des a^0 et l'expression (a'),

$$(h') \quad \mathrm{a}^0_{x^4} \text{ ou } \mathrm{a}^0_{y^2z^2} \text{ ou } \mathrm{a}^0_{y^3z} \text{ ou } \mathrm{a}^0_{x^2yz} = \frac{\rho_0}{2}\mathbf{S}\, m \frac{d\frac{fr_0}{r_0}}{r_0\, dr_0} (\mathrm{x}_0^4 \text{ ou } \mathrm{y}_0^2\mathrm{z}_0^2 \text{ ou } \mathrm{y}_0^3\mathrm{z}_0 \text{ ou } \mathrm{x}_0^2\mathrm{y}_0\mathrm{z}_0),$$

et, en faisant symboliquement

$$(i') \qquad \mathrm{a}^0_x\mathrm{a}^0_x\mathrm{a}^0_x\mathrm{a}^0_x = \mathrm{a}^0_{x^2}\mathrm{a}^0_{x^2} = \mathrm{a}^0_{x^4}, \quad \mathrm{a}^0_z\,\mathrm{a}^0_{xyz} = \mathrm{a}^0_{xyz^2}, \text{ et ainsi des autres},$$

[*] On peut voir une Communication faite le 20 octobre 1855 à la Société philomathique (journal *l'Institut*, n° 1146, 19 décembre, p. 441), où l'on exprime que la dilatation des corps par le mouvement vibratoire qui constitue la chaleur n'est possible qu'autant que les termes où se trouve engagée la dérivée du second ordre, supposée négative, de l'action mutuelle des atomes par rapport à leur distance l'un de l'autre, ne sont point négligeables. (Il n'y a pas lieu de s'arrêter à l'alinéa de cette Communication commençant par les mots : Newton va même...).

l'expression générale symbolique suivante, très-symétrique :

$$
(j')\quad\left\{
\begin{aligned}
&\mathrm{a}_{x^4} \text{ ou } \mathrm{a}_{y^2z^2} \text{ ou } \mathrm{a}_{y^3z} \text{ ou } \mathrm{a}_{x^2yz}\\
&\quad = \left(\mathrm{a}^{\circ}_{x^4} \text{ ou } \mathrm{a}^{\circ}_{y^2z^2} \text{ ou } \mathrm{a}^{\circ}_{y^3z} \text{ ou } \mathrm{a}^{\circ}_{x^2yz}\right)\left(1 - \frac{du_0}{dx_0} - \frac{dv_0}{dy_0} - \frac{dw_0}{dz_0}\right)\\
&\qquad + \left(\mathrm{a}^{\circ}_{x}\frac{d}{dx_0} + \mathrm{a}^{\circ}_{y}\frac{d}{dy_0} + \mathrm{a}^{\circ}_{z}\frac{d}{dz_0}\right)
\left\{
\begin{aligned}
&\quad 4\,\mathrm{a}^{\circ}_{x^3}u_0\\
&\text{ou } 2\,\mathrm{a}^{\circ}_{yz^2}v_0 + 2\,\mathrm{a}^{\circ}_{y^2z}w_0\\
&\text{ou } 3\,\mathrm{a}^{\circ}_{y^2z}v_0 + \mathrm{a}^{\circ}_{y^3}w_0\\
&\text{ou } 2\,\mathrm{a}^{\circ}_{xyz}u_0 + \mathrm{a}^{\circ}_{x^2z}v_0 + \mathrm{a}^{\circ}_{x^2y}w_0
\end{aligned}
\right\},
\end{aligned}
\right.
$$

où, après le développement, les caractéristiques d de différentiation doivent porter seulement sur les u_0, v_0, w_0; en sorte qu'elle produit les quatre suivantes :

$$
(k')\quad\left\{
\begin{aligned}
&\mathrm{a}_{x^4} = \mathrm{a}^{\circ}_{x^4}\left(1 - 3\frac{du_0}{dx_0} - \frac{dv_0}{dy_0} - \frac{dw_0}{dz_0}\right) + 4\left(\mathrm{a}^{\circ}_{x^3y}\frac{du_0}{dy_0} + \mathrm{a}^{\circ}_{x^3z}\frac{du_0}{dz_0}\right),\\
&\mathrm{a}_{y^2z^2} = \mathrm{a}^{\circ}_{y^2z^2}\left(1 - \frac{du_0}{dx_0} + \frac{dv_0}{dy_0} + \frac{dw_0}{dz_0}\right)\\
&\qquad + 2\left(\mathrm{a}^{\circ}_{yz^3}\frac{dv_0}{dz_0} + \mathrm{a}^{\circ}_{xyz^2}\frac{dv_0}{dx_0} + \mathrm{a}^{\circ}_{xy^2z}\frac{dw_0}{dx_0} + \mathrm{a}^{\circ}_{y^3z}\frac{dw_0}{dy_0}\right),\\
&\mathrm{a}_{y^3z} = \mathrm{a}^{\circ}_{y^3z}\left(1 - \frac{du_0}{dx_0} + 2\frac{dv_0}{dy_0}\right)\\
&\qquad + 3\left(\mathrm{a}^{\circ}_{y^2z^2}\frac{dv_0}{dz_0} + \mathrm{a}^{\circ}_{xy^2z}\frac{dv_0}{dx_0}\right) + \left(\mathrm{a}^{\circ}_{xy^3}\frac{dw_0}{dx_0} + \mathrm{a}^{\circ}_{y^4}\frac{dw_0}{dy_0}\right),\\
&\mathrm{a}_{x^2yz} = \mathrm{a}^{\circ}_{x^2yz}\left(1 + \frac{du_0}{dx_0}\right) + 2\left(\mathrm{a}^{\circ}_{xy^2z}\frac{du_0}{dy_0} + \mathrm{a}^{\circ}_{xyz^2}\frac{du_0}{dz_0}\right)\\
&\qquad + \mathrm{a}^{\circ}_{x^3z}\frac{dv_0}{dx_0} + \mathrm{a}^{\circ}_{x^2z^2}\frac{dv_0}{dz_0} + \mathrm{a}^{\circ}_{x^3y}\frac{dw_0}{dx_0} + \mathrm{a}^{\circ}_{x^2y^2}\frac{dw_0}{dy_0}.
\end{aligned}
\right.
$$

Elle résout la question proposée, de détermination des coefficients $\mathrm{a}_{\ldots}$ relatifs à un état moléculaire donné du corps élastique, par ceux $\mathrm{a}^{\circ}_{\ldots}$ d'un état déterminé antérieur, et par les pressions en jeu dans ces deux états qu'elles constituaient, car les neuf dérivées en x_0, y_0, z_0 des déplacements u_0, v_0, w_0 qui ont eu lieu de l'un à l'autre sont déterminables analytiquement en fonction de ces pressions supposées connues, si la contexture élastique n'a pas été altérée en passant de l'état antérieur à l'état subséquent, ou si les déplacements u_0, v_0, w_0 n'ont eu aucune partie permanente.

11. Mais cette formule (j') ou ses particularisations (k') résolvent une question plus étendue.

Elles donnent les coefficients $a_{\dots}$ en fonction de ceux $a^\circ_{\dots}$ et des neuf dérivées, si elles sont connues, des petits déplacements u_0, v_0, w_0, même dans le cas où la contexture du corps solide aurait été changée, en sorte qu'une partie des déformations opérées par les mêmes déplacements entre les deux états que ces coefficients d'élasticité caractérisent, soit devenue persistante.

Il suffit, en effet, pour l'établissement de la formule (j'), que les dérivées $\frac{d(u_0, v_0, w_0)}{d(x_0, y_0, z_0)}$ de ces déplacements, persistants ou non, aient été assez petites pour permettre la suppression de leurs carrés et produits.

Aussi cette formule (j') n'est-elle qu'une généralisation de celles (**79**) du Mémoire de 1863, qui étaient données pour l'évaluation des effets de trois compressions ou dilatations permanentes, et qui ont été obtenues précisément par le procédé dont on vient de faire usage [*].

12. Il convient d'observer que les coefficients d'élasticité $a_{\dots}$ ou $a^\circ_{\dots}$ d'un corps solide homogène ne dépendent pas seulement de l'état

---

[*] En effet, ces formules (79), réduites à leurs premiers termes, ou débarrassées de ceux dans lesquels les $a_{\dots}$ désignent des sommes $\mathbf{S}$ de produits de six facteurs tres-petits, que nous venons de dire pouvoir être omises, reviennent, avec nos notations actuelles, à

$$a_{x^4} = \frac{\left(1+\frac{du_0}{dx_0}\right)^3}{\left(1+\frac{dv_0}{dy_0}\right)\left(1+\frac{dw_0}{dz_0}\right)}\, a^0_{x^4}, \qquad a_{y^2z^2} = \frac{\left(1+\frac{dv_0}{dy_0}\right)\left(1+\frac{dw_0}{dz_0}\right)}{1+\frac{du_0}{dx_0}}\, a^0_{y^2z^2}.$$

Or c'est à quoi se réduisent les deux premières expressions (k') quand les carrés des dérivées sont négligés et quand on suppose, comme en 1863, que le corps inégalement comprimé en trois sens était primitivement isotrope.

On peut voir aux *Essais sur la théorie mathématique de la lumière*, de M. Briot (1864), un calcul du même genre, avec mise en compte de termes du sixième degré en x, y, z, et de dérivées de fr comme celles qui affectent le deuxième terme de (f').

de ce corps ou du degré de rapprochement ou d'écartement de ses molécules en divers sens à chaque point. Ils dépendent aussi des directions des axes coordonnés des x, y, z dans son intérieur, ou de leur orientation par rapport à ses plans principaux ou lignes principales de contexture s'il n'est pas isotrope, ou s'il a cessé de l'être avant les derniers déplacements appelés u, v, w sans indices. Comme, au Mémoire de 1863, il a été donné sous le nº 33 une formule générale symbolique

$$(l') \qquad \begin{aligned} \mathrm{a}_{nsx'y'} = {} & (\mathrm{a}_x \mathrm{c}_{nx} + \mathrm{a}_y \mathrm{c}_{ny} + \mathrm{a}_z \mathrm{c}_{nz})(\mathrm{a}_x \mathrm{c}_{sx} + \mathrm{a}_y \mathrm{c}_{sy} + \mathrm{a}_z \mathrm{c}_{sz}) \\ & \times (\mathrm{a}_x \mathrm{c}_{x'x} + \mathrm{a}_y \mathrm{c}_{x'y} + \mathrm{a}_z \mathrm{c}_{x'z})(\mathrm{a}_x \mathrm{c}_{y'x} + \mathrm{a}_y \mathrm{c}_{y'y} + \mathrm{a}_z \mathrm{c}_{y'z}), \end{aligned}$$

propre à déduire, des coefficients $\mathrm{a}_{\dots}$ relatifs à une orientation donnée, ceux qui le sont à toute autre dans un corps resté au même état, il est entendu que nous supposons, dans toutes nos formules, que les $\mathrm{a}^{\circ}_{\dots}$ et les $\mathrm{a}_{\dots}$ sont relatifs à des axes coordonnés rencontrant les mêmes molécules, à cela près des seuls écarts résultant des déplacements très-petits u_0, v_0, w_0.

On peut remarquer aussi que le très-léger changement d'orientation résultant inévitablement de ces petits écarts suffit pour expliquer et déterminer les divers termes des quatre formules de transformation (k'), *à l'exception du premier de chacune d'elles*, et cela, indépendamment des considérations de forces moléculaires qui nous ont servi à établir la formule (j'), dont elles dérivent.

En effet, lorsque les directions appelées n, s, x′, y′ dans la formule (l') sont prises parmi trois axes coordonnés nouveaux rectangulaires ou légèrement obliquangles, x', y', z' ne faisant que de très-petits angles avec x, y, z, en sorte qu'on puisse prendre $\mathrm{c}_{xx'} = 1$, $\mathrm{c}_{yy'} = 1$, $\mathrm{c}_{zz'} = 1$, et négliger comme petits du second ordre les produits des six autres cosinus entre eux, la formule (l') donne

$$(m') \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{a}_{x'^4} &= \mathrm{a}_{x^4} + 4\mathrm{a}_{x^3y}\mathrm{c}_{x'y} + 4\mathrm{a}_{x^3z}\mathrm{c}_{x'z}, \\ \mathrm{a}_{y'^2z'^2} &= \mathrm{a}_{y^2z^2} + 2\mathrm{a}_{yz^3}\mathrm{c}_{y'z} + 2\mathrm{a}_{xyz^2}\mathrm{c}_{y'x} + 2\mathrm{a}_{xy^2z}\mathrm{c}_{z'x} + 2\mathrm{a}_{y^3z}\mathrm{c}_{z'y}, \\ \mathrm{a}_{y'^3z'} &= \mathrm{a}_{y^3z} + 3\mathrm{a}_{y^2z^2}\mathrm{c}_{y'z} + 3\mathrm{a}_{xy^2z}\mathrm{c}_{y'x} + \mathrm{a}_{xy^3}\mathrm{c}_{z'x} + \mathrm{a}_{y^4}\mathrm{c}_{z'y}, \\ \mathrm{a}_{x'^2y'z'} &= \mathrm{a}_{x^2yz} + 2\mathrm{a}_{xy^2z}\mathrm{c}_{x'y} + 2\mathrm{a}_{xyz^2}\mathrm{c}_{x'z} + \mathrm{a}_{x^3y}\mathrm{c}_{z'x} + \mathrm{a}_{x^3z}\mathrm{c}_{y'x} \\ &\quad + \mathrm{a}_{x^2y^2}\mathrm{c}_{z'y} + \mathrm{a}_{x^2z^2}\mathrm{c}_{y'z}. \end{aligned} \right.$$

Or, si nous remplaçons x, y, z par x_0, y_0, z_0, en supposant, comme au n° **6** [expression (n)], que les directions x', y', z' sont normales aux trois plans légèrement obliquangles dans lesquels les déplacements u_0, v_0, w_0 ont changé les directions x_0, y_0, z_0, en sorte qu'on ait

$$(n')\qquad \begin{cases} c_{x'y_0} = -\dfrac{du_0}{dy_0}, & c_{x'z_0} = -\dfrac{du_0}{dz_0}, \quad c_{y'z_0} = -\dfrac{dv_0}{dz_0}, \\ c_{y'x_0} = -\dfrac{dv_0}{dx_0}, & c_{z'x_0} = -\dfrac{dw_0}{dx_0}, \quad c_{z'y_0} = -\dfrac{dw_0}{dy_0}, \end{cases}$$

et si nous substituons ces valeurs dans les équations (m'), en tirant celles des $a_{x'}$,... qui forment les premiers termes des seconds membres, puis remplaçant, dans les termes affectés des $d(u_0, v_0, w_0)$, les a par des a^0 de mêmes indices, qui n'en peuvent différer que de quantités affectées elles-mêmes de ces neuf dérivées très-petites, nous obtenons, comme on voit, tous les termes des expressions (k') des $a_{x'}$,..., sauf le premier de chacune d'elles. Ces premiers termes se trouvent remplacés par les espèces de coefficients d'élasticité oblique formant les premiers membres des (m'), en sorte que ces termes ont seuls besoin, comme on voit, d'être déterminés par ces considérations d'action moléculaire dont je cherche à restreindre la mise en œuvre, tout en en soutenant la légitimité contre ceux qui refusent de les invoquer, ou, pour mieux dire, qui ne les invoquent qu'implicitement et à leur insu.

13. Composons maintenant les expressions des forces p en p^0 et $\dfrac{du_0}{dx_0}$,.... Substituons pour cela les expressions trouvées (j') ou (k') des coefficients a en a^0 dans les sextinômes (k) p^1_{xx} et p^1_{yz}, et ceux-ci dans les formules (*i bis*) de Cauchy. Appelons p^{01} des sextinômes composés en ∂_x, ∂_y,..., g_{xy} avec les coefficients $a^0_{\dots}$, comme ceux (k) p^1 l'étaient avec les coefficients $a_{\dots}$, c'est-à-dire faisons, pour abréger,

$$(o')\qquad \begin{cases} (a^0_{xx} \text{ ou } a^0_{yz} \text{ ou } \dots)(a^0_{xx}\partial_x + a^0_{yy}\partial_y + a^0_{zz}\partial_z + a^0_{yz}g_{yz} + a^0_{zx}g_{zx} + a^0_{xy}g_{xy}) \\ \quad = p^{01}_{xx} \text{ ou } p^{01}_{yz} \text{ ou}\dots; \end{cases}$$

et convenons d'étendre aux p^0 et p^{01}, et ci-après à ceux que nous appellerons p^{00}, la décomposition symbolique (i') des $a_{\dots}$.

Nous aurons, en négligeant les produits des dérivées $\dfrac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$ entre elles, mais non pas leurs produits par les dérivées supposées bien plus grandes $\frac{d(u_0, v_0, w_0)}{d(x_0, y_0, z_0)}$, la formule générale suivante, donnant, après de petits déplacements u, v, w, éprouvés à partir d'un état où il y avait déjà des pressions considérables données $p^\circ_{xx}, \ldots, p^\circ_{xy}$, les composantes des pressions finales, exprimées, comme on le désirait, en fonction des coefficients d'élasticité $\mathrm{a}^\circ_{x^4}$, $\mathrm{a}^\circ_{x^2yz}, \ldots$ mesurés pour un état constant du corps, et des dérivées de u, v, w en x, y, z, ainsi que de celles de u_0, v_0, w_0 en x_0, y_0, z_0,

$$
(p')\left\{
\begin{aligned}
p_{xx} \text{ ou } p_{yz} = {} & (p^\circ_{xx} \text{ ou } p^\circ_{yz})\left(1 - \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz}\right) + (p^{0\,1}_{xx} \text{ ou } p^{0\,1}_{yz})\left(1 - \frac{du_0}{dx_0} - \frac{dv_0}{dy_0} - \frac{dw_0}{dz_0}\right) \\
& + \left(p^\circ_x \frac{d}{dx} + p^\circ_y \frac{d}{dy} + p^\circ_z \frac{d}{dz}\right)(2p^\circ_x u \text{ ou } p^\circ_y w + p^\circ_z v) \\
& + \left(p^{0\,1}_x \frac{d}{dx_0} + p^{0\,1}_y \frac{d}{dy_0} + p^{0\,1}_z \frac{d}{dz_0}\right)(2p^{0\,1}_x u_0 \text{ ou } p^{0\,1}_y w_0 + p^{0\,1}_z v_0) \\
& + (\mathrm{a}^\circ_{xx} \text{ ou } \mathrm{a}^\circ_{yz})\left(\mathrm{a}^\circ_x \frac{d}{dx_0} + \mathrm{a}^\circ_y \frac{d}{dy_0} + \mathrm{a}^\circ_z \frac{d}{dz_0}\right)
\left\{
\begin{aligned}
& (2\,\mathrm{a}^\circ_x \partial_x + \mathrm{a}^\circ_y g_{xy} + \mathrm{a}^\circ_z g_{zx}) u_0 \\
& + (\mathrm{a}^\circ_x g_{xy} + 2\,\mathrm{a}^\circ_y \partial_y + \mathrm{a}^\circ_z g_{yz}) v_0 \\
& + (\mathrm{a}^\circ_x g_{zx} + \mathrm{a}^\circ_y g_{yz} + 2\,\mathrm{a}^\circ_z \partial_z) w_0
\end{aligned}
\right\};
\end{aligned}
\right.
$$

les différentiations par rapport à x, y, z, indiquées dans la seconde ligne, portant sur les u, v, w, et les différentiations par rapport à x_0, y_0, z_0, indiquées ensuite, portant sur les u_0, v_0, w_0.

14. On peut, par une vérification curieuse, obtenir identiquement cette formule (p') des pressions p, en faisant usage d'un procédé tout différent et important à signaler, comme éclaircissant un point susceptible de causer quelque embarras.

Si, dans des expressions de $p^\circ_{xx}, \ldots, p^\circ_{yz}, \ldots$ en $\mathrm{a}^\circ_{\ldots}$ et $\frac{d(u_0, v_0, w_0)}{d(x_0, y_0, z_0)}$, nous substituons à u_0, v_0, w_0, respectivement

$$u_0 + u, \quad v_0 + v, \quad w_0 + w,$$

nous devrons, évidemment, avoir les valeurs des pressions $p_{xx}, \ldots$, $p_{yz}, \ldots$, vu qu'elles répondent à ces déplacements totaux supposés toujours petits; et leurs expressions ainsi obtenues se trouveront affectées, ainsi que nous le désirons, des coefficients censés constants et connus

$a^0_{\dots}$ au lieu de ceux $a_{\dots}$ qui ne sont pas supposés avoir été mesurés d'avance comme ceux-ci, vu leur variabilité avec les données de chaque problème particulier.

Il semble, d'abord, que le résultat serait simplement $p^0_{xx} + p^1_{xx}$, $p^0_{yz} + p^1_{yz}$. Mais, dans le fait, on n'obtient des expressions complètes de $p_{xx},\dots, p_{yz},\dots$ qu'en construisant d'abord des expressions de $p^0_{xx},\dots$, $p^0_{yz}\dots$, où les carrés et produits deux à deux des neuf dérivées de u_0, v_0, w_0 soient conservés. Nous y parviendrons, toujours à la manière de Cauchy, en mettant, dans les expressions non encore transformées [telles que (c')]

$$(q') \qquad p^0_{xx} \text{ ou } p^0_{yz} \text{ ou}\ldots = \frac{\rho}{2}\,\mathrm{S}m\frac{fr}{r}(\mathrm{x}^2 \text{ ou } \mathrm{yz} \text{ ou}\ldots):$$

1° A la place de x, y, z, x^4, $\mathrm{y}^2\mathrm{z}^2$, leurs valeurs (d') du n° **10**, toutefois sans les termes affectés des dérivées du second ordre, qui donneraient des produits de plus de quatre des grandeurs imperceptibles x_0, y_0, z_0;

2° A la place de $\dfrac{fr}{r}$, $\dfrac{fr_0}{r_0} + (r - r_0)\dfrac{d\dfrac{fr_0}{r_0}}{dr_0}$ en ne poussant pas plus loin le développement par la même raison;

3° A la place de $r - r_0$, les quatre premières lignes de son expression (e'), car la cinquième et la sixième ne fournissent que de ces produits du sixième et du cinquième degré que nous effaçons [*];

4° A la place de ρ, son expression (g') en divisant le numérateur par le dénominateur et en conservant les carrés et produits deux à deux des $\dfrac{d(u_0\, v_0\, w_0)}{d(x^0\, y_0\, z_0)}$.

---

[*] Dans un premier calcul, j'avais tenu compte de ce qui vient de ces deux dernières lignes, et, en même temps, du terme en $\dfrac{(r - r_0)^2}{1.2}$ du développement de $\dfrac{fr}{r}$. Leurs résultats réunis se sont trouvés encore identiquement conformes à ce que donne l'analyse du n° **10** en conservant le terme en $r - r_0$ de l'expression (f') de $\dfrac{d\dfrac{fr}{r}}{rdr}$, qui ajoute, à celles (h') des divers $a_{\dots}$, des polynômes à vingt et un termes du second degré en ∂^0, g^0, affectés de trente-cinq coefficients nouveaux $\dfrac{\rho_0}{2}\,\mathrm{S}m\ldots$ du sixième degré en x_0, y_0, z_0.

Alors, en remplaçant, conformément aux expressions (b) du n° **1**,

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{du_0}{dx_0}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{du_0}{dx_0}\right)^2+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dv_0}{dx_0}\right)^2+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dw_0}{dx_0}\right)^2 & \text{par} & \partial_x^0+\dfrac{1}{2}(\partial_x^0)^2 \\ \dfrac{dv_0}{dz_0}+\dfrac{dw_0}{dy_0}+\dfrac{du_0}{dy_0}\dfrac{du_0}{dz_0}+\dfrac{dv_0}{dy_0}\dfrac{dv_0}{dz_0}+\dfrac{dw_0}{dy_0}\dfrac{dw_0}{dz_0} & \text{par} & \mathrm{g}_{yz}^0(1+\partial_y^0+\partial_z^0) \end{array}\right\} \text{ et ainsi des autres,}$$

enfin, en faisant

$$\frac{\rho_0}{2}\mathbf{S}\, m\frac{fr_0}{\mathrm{r}_0}(\mathrm{x}_0^4 \quad \text{ou} \quad \mathrm{y}_0^2\,\mathrm{z}_0^2 \quad \text{ou}\ldots)=p_{xx}^{00} \quad \text{ou} \quad p_{yz}^{00} \quad \text{ou}\ldots,$$

c'est-à-dire en appelant p^{00} les six composantes de pressions dans l'*état antérieur* ou qui a précédé les premiers déplacements u_0, v_0, w_0 des points, nous obtiendrons l'expression suivante, où le $(p_x^{00}+\ldots)^2$ du premier terme est symbolique quant aux p^{00} comme les autres le sont quant aux a^0, et n'acquiert de signification qu'après effectuation :

$$(r')\left\{\begin{array}{l} p_{xx}^0=\left(p_x^{00}+p_x^{00}\dfrac{du_0}{dx_0}+p_y^{00}\dfrac{du_0}{dy_0}+p_z^{00}\dfrac{du_0}{dz_0}\right)^2\left(1-\dfrac{du_0}{dx_0}-\dfrac{dv_0}{dy_0}-\dfrac{dw_0}{dz_0}+\text{termes du 2}^{\text{e}}\text{ degré}\right) \\ \qquad +\left\{\begin{array}{c}\mathrm{a}_{xx}^0\partial_x^0+\mathrm{a}_{yy}^0\partial_y^0+\mathrm{a}_{zz}^0\partial_z^0 \\ +\mathrm{a}_{yz}^0\mathrm{g}_{yz}^0+\mathrm{a}_{zx}^0\mathrm{g}_{zx}^0+\mathrm{a}_{xy}^0\mathrm{g}_{xy}^0\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c}\mathrm{a}_{xx}^0\left(1-\dfrac{du_0}{dx_0}-\dfrac{dv_0}{dy_0}-\dfrac{dw_0}{dz_0}\right) \\ +2\,\mathrm{a}_{xx}^0\dfrac{du_0}{dx_0}+2\,\mathrm{a}_{xy}^0\dfrac{du_0}{dy_0}+2\,\mathrm{a}_{xz}^0\dfrac{du_0}{dz_0}\end{array}\right\} \\ \qquad +\dfrac{1}{2}\mathrm{a}_{xx}^0\left\{\begin{array}{c}\mathrm{a}_{xx}^0\partial_x^{0^2}+\mathrm{a}_{yy}^0\partial_y^{0^2}+\mathrm{a}_{zz}^0\partial_z^{0^2} \\ +2\,\mathrm{a}_{yz}^0\mathrm{g}_{yz}^0(\partial_y^0+\partial_z^0)+2\,\mathrm{a}_{zx}^0\mathrm{g}_{zx}^0(\partial_z^0+\partial_x^0)+2\,\mathrm{a}_{xy}^0\mathrm{g}_{xy}^0(\partial_x^0+\partial_y^0)\end{array}\right\}, \end{array}\right.$$

expression qui, avec un zéro de moins à chaque lettre, donne p_{xx} avec mise en compte des termes du second degré en u, v, w, ∂, g et qui alors se réduit à celle (i) de Cauchy en effaçant ces termes.

Maintenant, à la place de u_0, v_0, w_0, mettons comme nous avons dit

$$u_0+u, \quad v_0+v, \quad w_0+w,$$

et, cette substitution étant faite, changeons de variable indépendante, comme me l'a indiqué M. Boussinesq [*]; c'est-à-dire, après

[*] Sa *Note complémentaire* du 5 septembre citée au n° 7 a été l'occasion du présent travail. C'est aussi ce jeune géomètre qui a appelé mon attention sur la nécessité de tenir compte des termes du second degré en $d(u_0+u,\ v_0+v,\ w_0+w)$, comme pouvant fournir des produits non négligeables des $d(u_0,\ v_0,\ w_0)$ par les $d(u,\ v,\ w)$.

avoir mis

$$\frac{du_0}{dx_0} + \frac{du}{dx_0},\quad \frac{du_0}{dy_0} + \frac{du}{dy_0},\ldots \quad \text{à la place de} \quad \frac{du_0}{dx_0},\quad \frac{du_0}{dy_0},\ldots;$$

changeons les seconds termes $\frac{du}{dx_0}$, $\frac{du}{dy_0}$ de ces binômes en

$$\frac{du}{dx}\frac{dx}{dx_0} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx_0} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx_0},\quad \frac{du}{dx}\frac{dx}{dy_0} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dy_0} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dy_0};$$

ou, eu égard à ce que

$$x = x_0 + u_0,\quad y = y_0 + v_0,\quad z = z_0 + w_0,$$

changeons-les en

$$\frac{du}{dx}\left(1 + \frac{du_0}{dx_0}\right) + \frac{du}{dy}\frac{dv_0}{dx_0} + \frac{du}{dz}\frac{dw_0}{dx_0},\quad \frac{du}{dx}\frac{du_0}{dy_0} + \frac{du}{dy}\left(1 + \frac{dv_0}{dy_0}\right) + \frac{du}{dz}\frac{dw_0}{dy_0}.$$

Cela reviendra à remplacer, dans l'expression (r') de p^0_{xx}, pour qu'elle devienne la valeur de p_{xx},

$$(s')\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{du_0}{dx_0} \quad \text{par} \quad \frac{du_0}{dx_0} + \frac{du}{dx} + \frac{du_0}{dx_0}\frac{du}{dx} + \frac{dv_0}{dx_0}\frac{du}{dy} + \frac{dw_0}{dx_0}\frac{du}{dz},\\ &\frac{du_0}{dy_0} \quad \text{par} \quad \frac{du_0}{dy_0} + \frac{du}{dy} + \frac{du_0}{dy_0}\frac{du}{dx} + \frac{dv_0}{dy_0}\frac{du}{dy} + \frac{dw_0}{dy_0}\frac{du}{dz},\ldots, \end{aligned}\right.$$

et, par conséquent, en négligeant les produits des $\frac{d(u,\, v,\, w)}{d(x,\, y,\, z)}$ les uns par les autres, ainsi que *par des produits mutuels* des $\frac{d(u_0,\, v_0,\, w_0)}{d(x_0,\, y_0,\, z_0)}$,

$$\text{à remplacer} \quad \frac{du_0}{dx_0}\frac{du_0}{dy_0} \quad \text{par} \quad \frac{du_0}{dx_0}\frac{du_0}{dy_0} + \frac{du_0}{dx_0}\frac{du}{dy} + \frac{du_0}{dy_0}\frac{du}{dx}, \quad \text{et ainsi des autres.}$$

Nous obtiendrons ainsi pour p_{xx} une expression dans laquelle on pourra écrire simplement p^0_{xx} à la place de p^{00}_{xx} suivi de tout ce qui n'est affecté que des u_0, v_0, w_0 sans les u, v, w. Or nous trouverons, grâce à ces transformations, en ordonnant par rapport aux $a^0_{x^4}$, $a^0_{x^2y^2},\ldots$ et en négligeant, vu la faiblesse comparative supposée de p^{00}_{xx}, ses produits par un ∂^0 et par un ∂ à la fois, nous obtiendrons, dis-je, précisément ce que donne l'expression (p') déjà trouvée de p_{xx} lorsqu'on la développe et qu'on remplace

$$p_{xx}^{0} \quad \text{par} \quad p_{xx}^{00}\left(1-\frac{du_0}{dx_0}-\frac{dv_0}{dy_0}-\frac{dw_0}{dz_0}\right)+2\left(p_{xx}^{00}\frac{du_0}{dx_0}+p_{xx}^{00}\frac{du_0}{dy_0}+p_{zz}^{00}\frac{du_0}{dz_0}\right)$$
$$+\,\mathrm{a}_{xx}^{0}(\mathrm{a}_{xx}^{0}\partial_x^{0}+\mathrm{a}_{yy}^{0}\partial_y^{0}+\ldots+\mathrm{a}_{xy}^{0}\,\mathrm{g}_{xy}^{0}),$$

et ainsi des autres, conformément aux formules (i *bis*), ou à celle (r') réduite aux termes du premier degré.

15. La formule (p') de la pression normale p_{xx} se simplifie et devient capable *immédiatement* d'être exprimée en p^0-p^{00}, ∂, g seuls avec les a^0, lorsque le corps auquel on l'applique avait primitivement trois plans rectangulaires de symétrie de contexture et qu'il n'a été pressé ou tiré que parallèlement à leurs intersections. Alors, en prenant celles-ci pour axes des coordonnés, les dérivées de u_0, v_0, w_0 et celles de u, v, w se réduisent aux dilatations ∂^0, ∂, et les p^{00}, p^0, p aux seules composantes normales. On a, par exemple,

$$(t') \quad p_{xx}=p_{xx}^{0}+p_{xx}^{0}(\partial_x-\partial_y-\partial_z)+(\mathrm{a}_{x^4}^{0}\partial_x^{0}+\mathrm{a}_{x^2y^2}^{0}\partial_y^{0}+\mathrm{a}_{x^2z^2}^{0}\partial_z^{0})(1+\partial_x-\partial_y-\partial_z).$$

Alors aussi on a, en négligeant (pour plus de simplicité seulement) les produits des pressions p^{00}, faibles vis-à-vis des p^0, par les ∂^0,

$$\begin{aligned}
p_{xx}^{0}-p_{xx}^{00}&=\mathrm{a}_{x^4}^{0}\partial_x^{0}+\mathrm{a}_{x^2y^2}^{0}\partial_y^{0}+\mathrm{a}_{x^2z^2}^{0}\partial_z^{0},\\
p_{yy}^{0}-p_{yy}^{00}&=\mathrm{a}_{x^2y^2}^{0}\partial_x^{0}+\mathrm{a}_{y^4}^{0}\partial_y^{0}+\mathrm{a}_{y^2z^2}^{0}\partial_z^{0},\\
p_{zz}^{0}-p_{zz}^{00}&=\mathrm{a}_{x^2z^2}^{0}\partial_x^{0}+\mathrm{a}_{y^2z^2}^{0}\partial_y^{0}+\mathrm{a}_{z^4}^{0}\partial_z^{0};
\end{aligned}$$

d'où l'on peut tirer ∂_x^0, ∂_y^0, ∂_z^0 pour les substituer dans l'expression (t') de p_{xx}, dont on aura ainsi immédiatement la valeur en fonction seulement des pressions primitives données, des dilatations ∂_x, ∂_y, ∂_z éprouvées depuis l'état où elles étaient p^0, ainsi que des six coefficients d'élasticité a^0 supposés connus et mesurés dans l'état p^{00} (coefficients qui seront ordinairement exprimables par trois constantes seulement [*]).

[*] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2e série, t. XIII, juillet 1868, p. 252. Note intitulée : *Formules de l'élasticité des corps amorphes.*

Elle se réduit, quand il y avait *isotropie*, en faisant

$$\mathrm{a}^{\circ}_{y^2z^2} = \tfrac{1}{3}\mathrm{a}^{\circ}_{x^4} = \mathrm{e},$$

et en effaçant les $p^{\circ\circ}$ supposés réduits à la pression de l'atmosphère, etc., dont la défalcation est censée faite d'avance, à

$$(u')\quad \left\{\begin{aligned} p_{xx} &= p^{\circ}_{xx} + \mathrm{e}(3\partial_x + \partial_y + \partial_z)\\ &\quad + p^{\circ}_{xx}\frac{26\partial_x - 3\partial_y - 3\partial_z}{5} - p^{\circ}_{yy}\frac{9\partial_x - 2\partial_y + 3\partial_z}{5} - p^{\circ}_{zz}\frac{9\partial_x + 3\partial_y - 2\partial_z}{5},\end{aligned}\right.$$

formule qui donne, si l'on a

$$p^{\circ}_{yy} = 0,\quad p^{\circ}_{zz} = 0,\quad \text{avec}\quad \partial_y = \partial_z = -\tfrac{1}{4}\partial_x,$$

comme pour un prisme qui n'éprouve aucune pression latérale :

$$(v')\qquad \frac{p_{xx}}{\partial_x} = \tfrac{5}{2}\mathrm{e} + \tfrac{11}{2}p^{\circ}_{xx}.$$

Cette expression montre ce qu'une forte pression ou traction longitudinale antérieure p°_{xx} peut ajouter à ce qu'on appelle le module d'élasticité de traction ou de flexion des prismes, dans les limites toutefois de la stabilité de la contexture élastique.

16. Résumons ce qui précède, et qui est entièrement relatif aux formules complètes des pressions ou forces élastiques s'exerçant dans un corps solide à la suite de petites déformations subies, ou de petits déplacements des points, lorsqu'il y avait en jeu, à l'intérieur du corps, des forces considérables du même genre avant ces déplacements ou déformations.

On a vu, dans la première partie (n^{os} **3**, **4**), que ces formules complètes de pressions, établies par Cauchy, en 1829, en calculant directement les augmentations que les déplacements des points apportaient aux résultantes des actions mutuelles des molécules à travers trois petites faces perpendiculaires aux coordonnées, pouvaient aussi être déduites, et de deux manières (n° **4** et fin du n° **7**), de l'expression du potentiel intérieur ou de l'*énergie latente* de l'élasticité du corps, mais moyennant qu'on établît préalablement aussi cette expression-là par un calcul d'actions moléculaires, qui, seul, peut fournir la valeur complète du potentiel en fonction des pressions primitives, des dérivées des déplacements, et des quinze coefficients mesurant l'élasticité du corps dans diverses directions. De sorte qu'il faut renoncer à calculer le potentiel élastique en ne partant que du fait généralement admis de la forme linéaire des six composantes des pressions, et à contenter ainsi les adversaires de la loi moléculaire ou de son invocation explicite. Il est nécessaire, dans ce calcul du potentiel, de tenir un compte complet (nº **3**) des quantités très-petites du second ordre, pour avoir d'une manière exacte les valeurs des composantes de pression jusqu'aux quantités du premier ordre, quoique l'on arrive au même résultat, quant à ces composantes, lorsqu'on fait simultanément, sur les termes du second ordre, deux omissions qui se compensent, et qu'il convient néanmoins d'apercevoir et d'éviter. On a vu aussi (nos **7** et **8**) que le potentiel peut être exprimé par une formule posée *à priori* comme fonction complète du second degré des dilatations et glissements, et dont la partie affectée de leurs premières puissances a pour coefficients les six composantes des pressions primitives; mais que les formules de pressions ultérieures qu'on en peut tirer des deux mêmes manières sont d'une autre forme, parce que neuf de leurs coefficients sont ceux d'élasticité des formules Cauchy, augmentés des composantes primitives, ce qui les fait varier davantage avec celles-ci.

Dans la deuxième partie (nos **9** à **15**), on a vu que les coefficients d'élasticité dont on a parlé, et qui restent à peu près constants quand les pressions primitives sont d'une grandeur de même ordre que ce que les déplacements u, v, w y ajoutent, peuvent (nº **9**) varier très-sensiblement avec ces pressions lorsqu'elles sont considérables; mais que l'on peut établir des formules donnant les valeurs de ces coefficients variables, en fonction de coefficients constants, mesurés d'avance pour un état déterminé du corps, tel que son état le plus habituel, et des pressions antérieures relatives à cet état, ou de quantités déterminables analytiquement au moyen de la connaissance supposée de leurs intensités.

Ces quantités sont les neuf dérivées, par rapport aux coordonnées primitives (x_0, y_0, z_0) des déplacements (u_0, v_0, w_0), supposés non permanents, qui feraient passer le corps de l'état déterminé et constant dont on a parlé, à l'état qui précède les déplacements nouveaux (u, v, w) produisant les pressions finales dont on désire avoir les six composantes $(p_{xx}, \ldots)$.

On a vu également (n° **11**) que les formules donnant les coefficients d'élasticité du corps (les a....), pour un certain état, en fonction des coefficients constants et supposés connus (les a°....), relatifs à un autre état, et des dérivées des déplacements (u_0, v_0, w_0) subis d'un état à l'autre, étaient également applicables quand ces déplacements ont amené des déformations en partie persistantes, pourvu qu'elles soient petites, mais qu'alors les dérivées de ces déplacements avaient besoin d'être connues indépendamment des pressions (p^{00} et p^{0}) relatives à ces deux états, vu qu'on ne peut alors les en déduire. Au reste, ces formules de détermination des coefficients d'élasticité inconnus par d'autres que l'on connaît, ont (n° **12**), ainsi que les formules complètes des composantes de pressions (n° **6**), leurs divers termes déterminables par la seule considération du petit changement de situation ou d'orientation que les déplacements ont fait éprouver aux trois lignes matérielles primitivement parallèles aux coordonnées, en sorte qu'il n'y a plus à déterminer que le premier terme de chacune de ces formules par des considérations moléculaires simples auxquelles on ne peut refuser d'acquiescer.

On a enfin (n° **15**) présenté, comme application, un cas particulier où les valeurs des coefficients d'élasticité variables, et, par suite, des pressions définitives, peuvent être immédiatement exprimées ainsi d'une manière simple.

Cette étude et cette discussion étaient nécessaires pour pouvoir compléter ce qui regarde les formules fondamentales de la théorie de l'élasticité des corps solides.