JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Extrait d'une Lettre adressée à M. Besge

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 14 (1869), p. 298-301.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1869_2_14__298_0>

Extrait d'une Lettre adressée à M. Besge;

Par M. J. LIOUVILLE.

« .... Que la valeur de l'intégrale définie

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tang} x \, dx}{1+x}$$

ait été ou non donnée déjà, je vous ferai observer qu'on la déduit immédiatement de l'équation

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{8}\log(2)$$

démontrée par M. Bertrand, puis de la manière la plus simple par M. Serret. (*Voir* à la fin du tome IX, 1[re] série.)

» En effet, une intégration par parties nous conduit d'abord à

$$\int \frac{\operatorname{arc\,tang} x \, dx}{1+x} = \operatorname{arc\,tang} x \log(1+x) - \int \frac{\log(1+x)\,dx}{1+x^2}.$$

Passez des intégrales indéfinies aux intégrales définies, en tenant compte de l'équation citée, et vous verrez tout de suite que l'on a aussi

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tang} x \, dx}{1+x} = \frac{\pi}{8}\log(2);$$

ce qu'il fallait obtenir.

» Je pourrais au moyen des intégrales définies dont je viens de vous parler en trouver beaucoup d'autres dont les valeurs seraient tout aussi simples; mais j'aime mieux passer à un autre sujet, et vous dire quelques mots à propos d'une Note sur les *formes quadratiques* *proprement primitives, dont le déterminant changé de signe est* > 0 *et* $\equiv 3$ (*mod.* 8), que j'ai insérée au tome XI (2e série). Voici effectivement deux théorèmes assez curieux que l'on peut ajouter à ceux dont j'ai parlé dans cette Note.

» Supposant l'entier positif $k \equiv 3 \pmod{8}$, on considère l'une après l'autre les formes quadratiques de déterminant $-k$ dont il est question à l'endroit cité, et pour chacune d'elles on cherche les deux plus petits entiers impairs a, a', qu'elle exprime proprement, a' étant $> a$, puis on calcule pour l'ensemble de ces formes les deux sommes

$$\sum a, \quad \sum a',$$

et aussi les deux sommes relatives aux carrés de a et de a', savoir :

$$\sum a^2, \quad \sum a'^2.$$

» Or je trouve que l'on a d'une part

$$\sum a' = 3 \sum a,$$

et d'autre part

$$\sum a'^2 = 9 \sum a^2.$$

Ces deux équations me semblent mériter qu'on les indique. Elles subsisteraient évidemment, du reste, si, au lieu de ne considérer que les classes de formes proprement primitives, on considérait la totalité des formes impaires, distinctes, de déterminant $-k$.

» Vous les vérifierez facilement sur des exemples. Ainsi pour

$$k = 3,$$

la vérification est immédiate, car on n'a alors pour a, a' que le seul système de valeurs

$$a = 1, \quad a' = 3.$$

Pour

$$k = 11,$$

on a ces trois systèmes

$$a = 1,\quad a' = 11;\quad a = 3,\quad a' = 5;\quad a = 3,\quad a' = 5;$$

d'où

$$\sum a = 1 + 3 + 3 = 7,$$

puis

$$\sum a' = 11 + 5 + 5 = 21,$$

valeur triple de la précédente. D'un autre côté,

$$\sum a^2 = 1 + 9 + 9 = 19$$

et

$$\sum a'^2 = 121 + 25 + 25 = 171;$$

or on a bien

$$171 = 9 \cdot 19.$$

Il vous sera facile de continuer, si l'envie vous en prend, ces vérifications numériques.

» En terminant, je reviens aux intégrales définies et je considère en particulier les deux suivantes :

$$\int_0^\infty f\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right) \log x \frac{dx}{x}$$

et

$$\int_0^\infty f\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right) \frac{dx}{x},$$

que je désignerai respectivement par P et Q; a est une constante positive, et la fonction (arbitraire, d'ailleurs) représentée par le signe f est, bien entendu, supposée telle que nos deux intégrales aient une valeur finie et un sens précis.

» Cela étant, je trouve entre les deux intégrales nommées P, Q une relation fort simple et peut-être, au surplus, déjà remarquée. On a, en effet,

$$P = Q \log a.$$

La démonstration est facile.

» Je vous engage à appliquer l'équation que je viens d'écrire à des exemples où la valeur de Q soit connue et par conséquent fournisse celle de P. Vous arriverez de la sorte à des résultats intéressants.

» J'espère pouvoir vous communiquer prochainement d'autres théorèmes nouveaux et, je crois, dignes aussi d'attention, concernant d'autres classes d'intégrales définies. »