JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 4v^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 10 (1865), p. 161-168.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1865_2_10__161_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

SUR LA FORME
$x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+4v^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. La forme

$$x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+4v^2,$$

dont je veux m'occuper maintenant, se rattache à celles que nous venons d'étudier. Aussi, pour déterminer le nombre

$$\mathrm{N}\left(2^\alpha m = x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+4v^2\right)$$

des représentations qu'elle offre concernant chaque entier donné $2^\alpha m$ (m impair, $\alpha = 0, 1, 2, 3, \ldots$), on aura surtout à se servir de la fonction

$$\rho_2(m),$$

c'est-à-dire de la somme

$$\sum(-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d^2,$$

relative aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier $m = d\delta$. Examinons successivement tous les cas qui peuvent se présenter.

2. Qu'il s'agisse d'abord d'un entier impairement pair $2m$. On aura

$$\mathrm{N}\left(2m = x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+4v^2\right) = 40\rho_2(m).$$

Ainsi, par exemple,

$$\mathrm{N}\left(2 = x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+4v^2\right) = 40.$$

Ce résultat est confirmé par l'identité

$$2 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 4.0^2,$$

dont le second membre comporte dix permutations.

L'équation

$$N(6 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 4v^2) = 320,$$

que notre formule donne ensuite, est vérifiée à son tour par les deux identités

$$6 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 4.0^2$$

et

$$6 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 4(\pm 1)^2.$$

En y opérant les permutations convenables, la première fournit deux cent quarante représentations de l'entier 6 sous la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 4v^2;$$

la seconde en fournit quatre-vingts. Or

$$240 + 80 = 320.$$

3. Occupons-nous en second lieu du cas d'un entier pairement pair, c'est-à-dire du cas de

$$\alpha > 1.$$

La formule sera alors

$$N(2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 4v^2) = 4\left[3.2^{2\alpha-1} - (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\rho_2(m).$$

Elle diffère beaucoup de celle qui convient à un entier impairement pair, et la valeur de $m \pmod{4}$ y joue un rôle. Vérifions-la sur quelques exemples.

Elle donne d'abord

$$N(4 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 4v^2) = 92.$$

Or on a les trois identités

$$4 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 4(\pm 1)^2,$$
$$4 = (\pm 2)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 4.0^2,$$
$$4 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1) + 0^2 + 4.0^2.$$

La première ne fournit que deux représentations de l'entier 4. Les autres, qui comportent des permutations, donnent respectivement dix et quatre-vingts représentations. D'ailleurs

$$2 + 10 + 80 = 92.$$

La vérification cherchée a donc lieu.

On trouve ensuite

$$N(8 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 4v^2) = 380.$$

La vérification résulte cette fois des identités

$$8 = (\pm 2)^2 + (\pm 2)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 4.0^2,$$
$$8 = (\pm 2)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 4(\pm 1)^2,$$
$$8 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 4(\pm 1)^2,$$
$$8 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 4.0^2,$$

où l'on opérera les permutations convenables. De la première on tirera quarante représentations pour l'entier 8, vingt de la seconde, cent soixante de chacune des deux dernières. Or

$$40 + 20 + 160 + 160 = 380.$$

Il n'est pas plus difficile de s'assurer de l'exactitude de l'équation

$$N(12 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 4v^2) = 800$$

Les identités à employer pour cela sont

$$12 = (\pm 2)^2 + (\pm 2)^2 + (\pm 2)^2 + 0^2 + 0^2 + 4.0^2,$$
$$12 = (\pm 2)^2 + (\pm 2)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 4(\pm 1)^2,$$
$$12 = (\pm 3)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 4.0^2,$$
$$12 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2.$$

Chacune des deux premières donne quatre-vingts représentations de l'entier 12, chacune des deux dernières en donne trois cent vingt; or

$$80 + 80 + 320 + 320 = 800.$$

4. Le cas de $\alpha = 0$, ou d'un entier impair m, se subdivise en deux autres, suivant que l'on a

$$m = 4g + 3$$

ou

$$m = 4g + 1.$$

Quand

$$m = 4g + 3,$$

on obtient aisément la formule cherchée, savoir

$$N(m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 4v^2) = 10\rho_2(m).$$

Cette formule donne, par exemple,

$$N(3 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 4v^2) = 80,$$

résultat confirmé par l'identité

$$3 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 4.0^2,$$

qui comporte dix permutations fournissant chacune huit représentations.

Elle donne encore

$$N(7 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 4v^2) = 480.$$

Ici on a les identités

$$7 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2 + 0^2 + 4.0^2$$

et

$$7 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 4(\pm 1)^2,$$

qui toutes deux sont susceptibles de permutations. On tire de la première trois cent vingt représentations de l'entier 7; la seconde en donne cent soixante. Or

$$320 + 160 = 480.$$

5. Soit enfin

$$m = 4g + 1.$$

Pour trouver alors la valeur de

$$N(m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 4v^2),$$

il faudra non-seulement employer la fonction

$$\rho_2(m),$$

mais encore considérer l'équation

$$m = i^2 + 4s^2,$$

où nous supposons l'entier i positif, l'entier s positif, nul ou négatif; on comptera le nombre

$$\rho(m)$$

des solutions de cette équation et on calculera la somme

$$\sum i^2$$

pour toutes les solutions. Cela fait, on aura

$$N(m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 4v^2) = 6\rho_2(m) + 8\sum i^2 - 4m\rho(m).$$

Cette formule se simplifie quand l'équation

$$m = i^2 + 4s^2$$

est impossible; les deux derniers termes du second membre disparaissant alors d'eux-mêmes, il reste seulement

$$N(m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 4v^2) = 6\rho_2(m).$$

Ainsi, par exemple, ayant

$$\rho_2(21) = 384,$$

on en conclura que

$$N(21 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 4v^2) = 2304.$$

Mais pour $m=1$, $m=5$, $m=9$, etc., c'est à la formule

$$N(m=x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+4v^2)=6\rho_2(m)+8\sum i^2-4m\rho(m)$$

qu'il faudra avoir recours.

A cause de l'équation

$$1=1^2+4\,0^2,$$

cette formule donne

$$N(1=x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+4v^2)=10.$$

Or ce résultat est confirmé par l'identité

$$1=(\pm 1)^2+0^2+0^2+0^2+0^2+4.0^2,$$

dans laquelle on peut faire occuper à

$$(\pm 1)^2$$

cinq places différentes.

Les équations

$$5=1^2+4.1^2,\quad 5=1^2+4(-1)^2$$

montrent ensuite que, pour $m=5$, on a

$$\rho(m)=2$$

et

$$\sum i^2=2;$$

d'ailleurs

$$\rho_2(5)=26.$$

On doit donc avoir

$$N(5=x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+4v^2)=132,$$

résultat facile à vérifier au moyen des identités

$$5=(\pm 1)^2+(\pm 2)^2+0^2+0^2+0^2+4.0^2,$$
$$5=(\pm 1)^2+0^2+0^2+0^2+0^2+4(\pm 1)^2,$$
$$5=(\pm 1)^2+(\pm 1)^2+(\pm 1)^2+(\pm 1)^2+(\pm 1)^2+4.0^2,$$

dont les deux premières comportent des permutations. La dernière donne immédiatement trente-deux représentations de l'entier 5 par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 4v^2;$$

les deux autres en fournissent respectivement vingt et quatre-vingts. Or

$$32 + 20 + 80 = 132.$$

L'équation

$$9 = 3^2 + 4.0^2$$

servira de même dans la recherche de

$$N(9 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 4v^2);$$

mais voilà bien assez de calculs numériques.

6. Terminons par une remarque qui porte sur tous les articles insérés dans les trois premières feuilles de ce cahier et dans les deux premières feuilles du cahier de mars. Ces articles sont intimement liés entre eux. Partout on y rencontre la fonction

$$\rho_2(m).$$

De plus, quand il s'agit d'un entier $m \equiv 1 \pmod{4}$, on y trouve employées deux autres fonctions,

$$\rho(m)$$

et

$$\sum i^2,$$

relatives à l'équation en nombres entiers

$$m = i^2 + 4s^2,$$

où i est positif, s positif, nul ou négatif. Mais ces deux dernières fonctions ne sont point isolées l'une de l'autre dans nos formules, elles n'y jouent point un rôle indépendant, elles n'y figurent que par la différence

$$2\sum i^2 - m\rho(m),$$

en sorte que si l'on désignait cette différence par

$$\varpi(m),$$

on n'aurait plus à considérer que $\rho_2(m)$ et $\varpi(m)$.

La différence dont il s'agit pourrait d'ailleurs être remplacée par celle-ci

$$\sum i^2 - 4\sum s^2,$$

qui peut aussi s'écrire

$$\sum (i^2 - 4s^2).$$

Mais voici une autre expression qui mérite surtout qu'on en dise un mot. Posons de toutes les manières possibles

$$2m = j^2 + j'^2,$$

j et j' désignant des entiers impairs et positifs. Je trouve que la somme

$$\sum (-1)^{\frac{jj'-1}{2}} jj'$$

est parfaitement équivalente à la différence

$$2\sum i^2 - m\rho(m)$$

et peut conséquemment la remplacer.

Par exemple, au lieu de la formule

$$N(m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 4v^2) = 6\rho_2(m) + 8\sum i^2 - 4m\rho(m)$$

que nous venons de donner au n° 5, nous aurions pu donner celle-ci :

$$N(m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + 4v^2) = 6\rho_2(m) + 4\sum (-1)^{\frac{jj'-1}{2}} \cdot jj'.$$

En modifiant de cette façon nos formules, on gagnerait sans doute quant à l'élégance; mais on perdrait, je crois, quant à la facilité du calcul. Au lecteur à décider.