J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + 8y^2 + 8z^2 + 64t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 7 (1862), p. 246-248.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1862_2_7__246_0>

SUR LA FORME

$x^2 + 8y^2 + 8z^2 + 64t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

La détermination du nombre N des représentations d'un entier donné, par la forme

$$x^2 + 8y^2 + 8z^2 + 64t^2,$$

n'offre aucune difficulté quand cet entier est pair. Il est d'abord évident que s'il est impairement pair, on a $N = 0$. Et s'il est pairement pair, de sorte qu'on puisse le représenter par $2^\alpha m$ avec $\alpha > 1$, l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + 8y^2 + 8z^2 + 64t^2$$

exigera que x soit pair; en remplaçant donc x par $2x$ et divisant par 4, on se trouvera conduit à l'équation

$$2^{\alpha-2} m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 16t^2$$

que nous avons discutée dans le cahier de mai.

Quant au cas d'un entier impair m, j'observe que l'on a $N = 0$, si cet entier m est de l'une des trois formes $8\mu + 3$, $8\mu + 5$, $8\mu + 7$. Nous ferons donc $m = 8\mu + 1$, et la valeur de N se calculera alors comme il suit.

On cherchera la somme $\zeta_1(m)$ des diviseurs de m, qui jouera ici un rôle important, mais qu'il faudra combiner avec deux autres fonctions numériques. L'une de ces deux fonctions est la somme

$$\sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

relative aux entiers positifs i qui peuvent figurer dans l'équation

$$m = i^2 + 4s^2,$$

où l'entier s (qui sera pair à cause de $m = 8\mu + 1$) doit être pris négativement comme positivement quand il ne se réduit pas à zéro. L'autre fonction se rattache aussi à une équation que nous avons souvent employée, savoir à l'équation

$$m = r^2 + 2u^2,$$

où l'entier r est supposé positif, tandis que l'entier u est indifféremment positif, nul ou négatif. La fonction dont il s'agit s'exprime par

$$\sum (-1)^{\frac{r-1}{2} + \frac{r^2-1}{8}} r,$$

ou bien encore, en employant un signe de Legendre avec la signification étendue que lui a donnée Jacobi, par

$$\sum \left(\frac{-2}{r}\right) r.$$

Cela posé, on a

$$N = \frac{1}{2}\left[\zeta_1(m) + \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} i\right] + \sum (-1)^{\frac{r-1}{2} + \frac{r^2-1}{8}} r.$$

Ainsi pour $m = 1 = 1^2 + 4.0^2 = 1^2 + 2.0^2$, on a $N = 2$, ce qui est exact. Pour $m = 9$, on a les équations

$$9 = 3^2 + 4.0^2, \quad 9 = 3^2 + 2.0^2, \quad 9 = 1^2 + 2(\pm 2)^2,$$

et l'on en conclut

$$N = \frac{1}{2}(13 - 3) + 3 + 2 = 10,$$

ce qui s'accorde avec les équations

$$9 = (\pm 3)^2 + 8.0^2 + 8.0^2 + 64.0^2,$$
$$9 = (\pm 1)^2 + 8(\pm 1)^2 + 8.0^2 + 64.0^2,$$
$$9 = (\pm 1)^2 + 8.0^2 + 8(\pm 1)^2 + 64.0^2.$$

Pour $m = 17$, les équations à considérer sont

$$17 = 1^2 + 4(\pm 2)^2, \quad 17 = 3^2 + 2(\pm 2)^2;$$

par suite

$$N = \frac{1}{2}(18 + 2) + 6 = 16,$$

et l'on trouve en effet seize représentations de 17, vu que

$$17 = (\pm 1)^2 + 8(\pm 1)^2 + 8(\pm 1)^2 + 64.0^2,$$
$$17 = (\pm 3)^2 + 8(\pm 1)^2 + 8.0^2 + 64.0^2,$$
$$17 = (\pm 3)^2 + 8.0^2 + 8(\pm 1)^2 + 64.0^2.$$

Pour $m = 25$, on a

$$25 = 5^2 + 4.0^2, \quad 25 = 3^2 + 4(\pm 2)^2, \quad 25 = 5^2 + 8.0^2;$$

donc

$$N = \frac{1}{2}(31 + 5 - 6) - 5 = 10.$$

Les équations

$$25 = (\pm 5)^2 + 8.0^2 + 8.0^2 + 64.0^2,$$
$$25 = (\pm 3)^2 + 8(\pm 1)^2 + 8(\pm 1)^2 + 64.0^2,$$

confirment ce fait.

Pour $m = 33$, $m = 41$, etc., on trouve respectivement $N = 16$, $N = 32$, etc. Mais je ne veux pas pousser plus loin ces vérifications numériques.