JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 12t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 6 (1861), p. 135-136.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1861_2_6__135_0>

SUR LA FORME
$x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 12t^2$;
PAR M. J. LIOUVILLE.

Il est évident que la forme

$$x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 12t^2$$

ne peut représenter aucun nombre impairement pair, attendu qu'on ne peut pas rendre le binôme $x^2 + 3y^2$ divisible par 2, sans le rendre en même temps divisible par 4. Mais je dis que pour tout nombre m, soit impair, soit multiple de 4 (c'est-à-dire de la forme $2^{2+\alpha} n$, n étant impair et α égal à 0, 1, 2, etc.), une telle représentation existe, en sorte que l'on a, en nombres entiers,

$$m = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 12t^2.$$

C'est ce qu'on vérifie aisément pour les petits nombres 1, 3, 4, 5, 7, 8, etc.; mais il faut donner une démonstration générale.

Comme la forme

$$x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 12t^2$$

est une de celles qui se reproduisent par la multiplication, il suffira de considérer : 1° le cas de m premier impair, 2° le cas de $m = 2^{2+\alpha}$.

Or quand m est un nombre premier $4\mu + 1$, on peut poser, en nombres entiers,

$$m = a^2 + 4b^2;$$

il suffira donc alors de faire $x = a$, $y = 0$, $z = b$, $t = 0$.

Quant aux nombres premiers m de la forme $4\mu + 3$, on peut toujours poser pour eux l'équation

$$m = u^2 + v^2 + 3w^2,$$

qui convient évidemment au nombre 3, et qui a lieu aussi, comme Dirichlet l'a prouvé (cahier de juin 1859, p. 237-240), pour tout entier impair non multiple de 3. Mais quand m est de la forme $4\mu + 3$, une telle équation ne peut exister qu'avec des valeurs paires de u et v. On peut donc remplacer v par $2s$ et écrire

$$m = u^2 + 3w^2 + 4s^2,$$

ce qui rentre dans notre équation générale

$$m = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 12t^2,$$

en faisant $x = u$, $y = w$, $z = s$, $t = 0$.

Restent les entiers contenus dans l'expression

$$2^{2+\alpha},$$

que l'on peut remplacer par l'une ou l'autre des deux que voici :

$$4.4^\beta, \quad 8.4^\beta,$$

suivant que α est pair ou impair. Or 4 et 8 sont représentés par la forme

$$x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 3t^2,$$

en prenant $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$, $t = 0$, puis $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, $t = 0$. D'ailleurs en doublant les valeurs de x, y, z, t, on rend la valeur de cette forme quatre fois plus grande. On passera ainsi de 4 à 4.4, $4.4^2, \ldots, 4.4^\beta$ et de 8 à 8.4, $8.4^2, \ldots, 8.4^\beta$. Notre démonstration est donc complète.