JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. DE JONQUIÈRES

Note sur le nombre des coniques qui sont déterminées par cinq conditions, lorsque, parmi ces conditions, il existe des normales données. - Construction de ces coniques. - Théorèmes relatifs aux contacts d'une série de coniques et d'un faisceau de droites

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 4 (1859), p. 49-56.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1859_2_4__49_0>

NOTE

Sur le nombre des coniques qui sont déterminées par cinq conditions, lorsque, parmi ces conditions, il existe des normales données. — Construction de ces coniques. — Théorèmes relatifs aux contacts d'une série de coniques et d'un faisceau de droites.

PAR M. E. DE JONQUIÈRES,
Capitaine de frégate.

I. Le tableau suivant présente d'une manière synoptique les résultats des recherches auxquelles donne lieu la question proposée [*].

NUMÉROS D'ORDRE des cas proposés.	DONNÉES DE LA QUESTION.			NOMBRE des solutions.
	Points.	Tangentes.	Normales.	
1	4	»	1	3
2	3	1	1	6
3	3	»	2	9
4	2	2	1	8
5	2	1	2	14
6	2	»	3	23
7	1	3	1	6
8	1	2	2	14
9	1	1	3	28
10	1	»	4	51
11	»	4	1	3
12	»	3	2	9
13	»	2	3	23
14	»	1	4	51
15	»	»	5	102

[*] M. Steiner a fait connaître ces résultats dans une livraison récente du *Journal*

Je vais indiquer la marche que j'ai suivie pour les obtenir.

II. Premier cas. — *On donne quatre points et une normale.* (Trois solutions.)

Supposons d'abord que, par les quatre points, on mène une série de coniques tangentes aux rayons d'un faisceau de droites. Une droite donne lieu à deux solutions, et, par conséquent, on obtient deux points de contact sur chacune des droites du faisceau. Mais le sommet du faisceau est lui-même un point de contact relatif à l'un des rayons qui s'y croisent; car, par ce point et par les quatre qui sont donnés, on peut faire passer une conique, qui a une tangente en ce point, et une seule. Donc le lieu géométrique des points de contact de la série de coniques et du faisceau de droites est une courbe du troisième ordre qui passe par le sommet du faisceau et qui n'y a pas de point double. Il sera facile de trouver huit points de cette courbe, lesquels, avec le sommet du faisceau, la détermineront complétement.

Le sommet du faisceau étant à l'infini, les rayons du faisceau de droites sont parallèles; et, si l'on choisit pour leur direction commune celle de la perpendiculaire à la normale donnée, il est évident que les trois points d'intersection de cette normale par la courbe du troisième ordre relative à ce faisceau particulier sont trois points qui, avec les quatre points donnés, déterminent les trois coniques qui seules satisfont à la question proposée.

Remarque. — La solution précédente s'applique d'elle-même au cas où la conique cherchée, au lieu d'être normale à une droite donnée, doit couper cette droite sous un certain angle. Il en est de même des solutions relatives aux cas suivants.

Enfin je fais remarquer, une fois pour toutes, que si la conique devait couper orthogonalement un cercle donné, il suffirait de prendre le centre de ce cercle pour le sommet du faisceau de droites, de construire la courbe du troisième ordre, lieu géométrique des contacts, et de chercher ses intersections avec la circonférence. Chacun des six

---

de Crelle, sans en donner aucune démonstration et sans indiquer la méthode qui l'y a conduit (Crelle, vol. LV, 4e cahier, p. 377).

points ainsi obtenus déterminerait une conique satisfaisant à l'énoncé du problème.

III. Deuxième cas. — *On donne trois points, une tangente et une normale.* (Six solutions.)

Imaginons, comme ci-dessus, le faisceau des droites perpendiculaires à la normale donnée. Il existe, comme on sait, quatre coniques distinctes qui touchent chacune de ces parallèles et la tangente donnée, et qui passent en même temps par les trois points. On a donc d'abord quatre points de contact sur chaque droite du faisceau. En outre, par les trois points donnés et par le sommet du faisceau, on peut mener deux coniques distinctes qui touchent la tangente donnée. Chacune de ces deux coniques a une tangente au sommet du faisceau; donc ce point est doublement un point de contact, et, comme il appartient à toutes les droites du faisceau, c'est un point double du lieu géométrique des points de contact de la série des coniques avec le faisceau de droites; ce qui prouve que ce lieu est une courbe du sixième ordre. Les six points où cette courbe est rencontrée par la normale proposée déterminent, avec les autres données de la question, six coniques qui remplissent les conditions requises.

IV. Troisième cas. — *On donne trois points et deux normales.* (Neuf solutions.)

Soient A et B les deux normales. Imaginons un faisceau parallèle de droites perpendiculaires à A. Il existe six coniques (III) tangentes à chacune de ces droites, et, en même temps, normales à B et passant par les trois points; on a donc d'abord six points de contact sur chaque parallèle. Mais en outre, par ces trois points et par le sommet du faisceau, on peut (II) faire passer trois coniques normales à B; donc trois points de contact sont réunis en un seul au sommet même du faisceau. Ainsi le lieu géométrique des points de contact des coniques passant par les trois points donnés, normales à B et tangentes aux droites perpendiculaires à A, est une courbe du neuvième ordre qui a un point triple au point de concours (infiniment éloigné) de ces perpendiculaires. Chacun des neuf points d'intersection de cette courbe par la normale A détermine, avec les autres données de la question, une conique normale aux deux droites A et B et passant par les trois points proposés. Donc la question admet neuf solutions.

V. En continuant ce genre de démonstration, on arrive, de proche en proche, et dans l'ordre même où ils sont indiqués, aux résultats consignés dans le tableau du § I. La suite des raisonnements ne peut, d'après ce qui vient d'être dit, présenter aucune difficulté. Cependant, pour plus de clarté, je vais encore examiner séparément les cinq derniers cas, où aucun point ne figure au nombre des données.

VI. Onzième cas. — *On donne quatre tangentes et une normale.* (Trois solutions.)

Chacune des droites du faisceau perpendiculaire à la normale donnée détermine, avec les quatre autres tangentes, une seule conique, donc un seul point de contact. De plus, le sommet du faisceau et les quatre tangentes en déterminent deux distincts. Donc ce sommet est un point double du lieu géométrique des points de contact, et, par conséquent, ce lieu est une courbe du troisième ordre qui coupe la normale donnée en trois points, auxquels correspondent les trois coniques qui résolvent la question.

VII. Douzième cas. — *On donne trois tangentes et deux normales* A *et* B. (Neuf solutions.)

Soit encore un faisceau parallèle de droites perpendiculaires à B. Chacune de ces droites, considérée comme étant une tangente, détermine, ainsi qu'on vient de le voir (VI), avec les trois autres et la normale donnée, trois coniques; on a ainsi trois points de contact sur chacune d'elles. Mais, d'après le résultat du septième cas (tableau I), il passe, par le sommet du faisceau, six coniques normales à A et tangentes aux trois droites. Donc ce sommet est un point sextuple du lieu géométrique des points de contact, lequel est ainsi une courbe du neuvième ordre qui coupe la normale B en neuf points. Chacun de ces neuf points et les autres données de la question déterminent une des coniques cherchées. On a donc neuf solutions.

VIII. Treizième cas. — *On donne trois normales* A, B, C *et deux tangentes* D, E. (Vingt-trois solutions.)

Imaginons un faisceau de droites perpendiculaires à C. Chacune de ces droites étant regardée comme une tangente donnée, on vient de voir (VII) qu'il existe neuf coniques qui la touchent, tout en étant normales à A et B et tangentes à D et E. Mais d'après le résultat du huitième cas (tableau I), il existe quatorze coniques qui passent par le sommet du faisceau, et qui sont en même temps normales à A et B et tangentes à D et E. Donc, sur chacune des perpendiculaires à C, il existe vingt-trois points de contact, dont quatorze sont réunis en un seul au sommet du faisceau. Ainsi le lieu géométrique de ces points de contact est une courbe du vingt-troisième ordre, qui a au sommet du faisceau un point 14^{tuple}, et qui coupe la normale C en vingt-trois points, auxquels correspondent autant de coniques satisfaisant à la question.

IX. Quatorzième cas. — *On donne quatre normales* A, B, C, D *et une tangente* E. (Cinquante et une solutions.)

D'après le § VIII, il y a vingt-trois coniques normales à A, B, C, et tangentes à E ainsi qu'à chacune des droites du faisceau perpendiculaire à D; on a donc vingt-trois points de contact sur chacune de ces droites. Mais, d'après le neuvième cas, ce sommet représente vingt-huit points de contact confondus en un seul. Donc le lieu des contacts est une courbe du cinquante et unième ordre douée, au sommet du faisceau, d'un point 28^{tuple}. Les cinquante et un points d'intersection de cette courbe par la normale D déterminent les cinquante et une coniques qui remplissent les conditions exigées.

X. Quinzième et dernier cas. — *On donne cinq normales* A, B, C, D, E. (Cent deux solutions.)

Normalement aux quatre droites A, B, C, D, on peut (IX) décrire cinquante et une coniques tangentes à chaque droite perpendiculaire à E. On a donc cinquante et un points de contact sur chacune d'elles. En outre, cinquante et un autres points de contact sont réunis en un seul au sommet du faisceau (tableau I, dixième cas). Donc le lieu géométrique des points de contact est une courbe du cent deuxième ordre, qui a, au sommet du faisceau, un point 51^{tuple}. Les cent deux points de rencontre de cette courbe avec la normale donnée E déterminent, avec les autres données, les cent deux coniques cherchées.

XI. Au sujet des développements qui précèdent, je dois faire remarquer que non-seulement ils font connaître, dans chacun des cas proposés, le nombre des coniques qui satisfont à la question, mais encore qu'ils fournissent directement le moyen de les construire. La solution du problème est donc complète.

XII. J'ajoute encore qu'ils contiennent les énoncés et les démons trations de plusieurs théorèmes très-généraux, et par eux-mêmes dignes d'intérêt, au sujet des lieux géométriques des points de contact d'un faisceau de droites et d'une série de coniques satisfaisant toutes à quatre mêmes conditions.

Ainsi le § II prouve incidemment que :

Le lieu des points de contact d'un faisceau de droites et d'un faisceau de coniques est une courbe du troisième ordre qui passe par le sommet du faisceau de droites.

Le § III prouve que :

Le lieu des points de contact d'un faisceau de droites et d'une série de coniques ayant en commun trois points et une tangente est une courbe du sixième ordre douée d'un point double au sommet du faisceau de droites.

Le tableau ci-après présente le résumé de ces divers théorèmes :

TABLEAU

Faisant connaître le degré des courbes, lieux des points de contact d'un faisceau de droites et d'une série de coniques satisfaisant toutes à quatre mêmes conditions, ainsi que l'ordre de multiplicité du point multiple dont chacune de ces courbes est douée au sommet du faisceau de droites.

N°s D'ORDRE des cas proposés.	DÉSIGNATION des quatre conditions communes à toutes les coniques d'une même série.			DEGRÉ de la courbe, lieu des contacts du faisceau de droites et de la série de coniques.	ORDRE du point multiple dont la courbe des contacts est douée au sommet du faisceau de droites.
	Points.	Tangentes.	Normales.		
1	4	»	»	3	1
2	3	1	»	6	2
3	3	»	1	9	3
4	2	2	»	8	4
5	2	1	1	14	6
6	2	»	2	23	9
7	1	3	»	6	4
8	1	2	1	14	8
9	1	1	2	28	14
10	1	»	3	51	23
11	»	4	»	3	2
12	»	3	1	9	6
13	»	2	2	23	14
14	»	1	3	51	28
15	»	»	4	102	51

XIII. Je terminerai par une dernière considération :

Des coniques décrites des mêmes foyers peuvent, comme on sait, être regardées comme ayant quatre tangentes (imaginaires) communes, et des coniques qui ont un seul foyer commun, comme ayant deux tangentes (imaginaires) communes. D'après cela les résultats énoncés dans les deux tableaux précédents, sous les numéros d'ordre 4, 8, 11 et 13, conviennent aux coniques homofocales.

Par exemple (tableau II), *le lieu des points de contact d'une série de coniques biconfocales et d'un faisceau de droites, est une courbe du troisième ordre, qui a un point double au sommet du faisceau, etc.*