JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

M. CHASLES

Propriétés des courbes à double courbure du troisième ordre

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 2 (1857), p. 397-407.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1857_2_2__397_0>

PROPRIÉTÉS
DES COURBES A DOUBLE COURBURE DU TROISIÈME ORDRE;

PAR M. CHASLES.

I.

1. On appelle *courbe à double courbure du troisième ordre*, une courbe à double courbure qu'un plan quelconque ne rencontre qu'en trois points (dont deux peuvent être imaginaires).

2. La courbe d'intersection de deux cônes du second ordre qui ont une génératrice commune satisfait à cette condition, et, par conséquent, est une courbe à double courbure du troisième ordre.

Réciproquement, toute courbe à double courbure du troisième ordre peut être considérée comme l'intersection de deux cônes du second ordre ayant leurs sommets en deux points quelconques de la courbe.

Cela résulte de cette propriété caractéristique de la courbe à double courbure du troisième ordre, savoir, que *tout cône qui passe par la courbe et qui a son sommet en un de ses points est du deuxième ordre*.

En effet, tout plan mené par le sommet du cône ne le coupe que suivant deux arêtes, ce qui prouve qu'il est du deuxième ordre.

3. *Six points donnés dans l'espace déterminent une courbe à double courbure du troisième ordre*.

Car deux de ces points peuvent être pris pour sommets de deux cônes du deuxième ordre passant par les six points et ayant une arête commune. La courbe d'intersection de ces deux cônes passe par les six points.

4. Comme l'expression *courbe à double courbure du troisième ordre* doit se présenter dans toutes les nombreuses propositions qui vont suivre, on éprouve le besoin d'une dénomination plus simple. C'est pourquoi nous appellerons la courbe dont il s'agit, *courbe gauche du troisième ordre*.

II.

Propriétés d'une courbe à double courbure, ou courbe gauche, du troisième ordre dérivées du rapport anharmonique et de la considération des figures homographiques.

5. *Étant pris cinq points fixes sur une courbe gauche du troisième ordre, les droites menées de ces cinq points à chacun des autres points de la courbe forment des angles pentaèdres (ou faisceaux de cinq droites) homographiques entre eux.*

6. On en conclut que :

Les deux faisceaux formés par les rayons menés de deux points fixes d'une courbe gauche du troisième ordre, à tant d'autres points de la courbe qu'on voudra, sont homographiques.

7. Ces deux propriétés constituent une analogie remarquable entre les courbes gauches du troisième ordre et les coniques planes. Car la seconde exprime, dans ses propres termes, la propriété fondamentale des sections coniques; et quant à la première, elle correspond à cet énoncé, savoir, que le faisceau de quatre droites menées de quatre points fixes d'une conique à un cinquième point quelconque de la courbe, a toujours le même rapport anharmonique; ce qu'on peut exprimer en d'autres termes, en disant que ces quatre droites forment un faisceau qui est toujours homographique à un même faisceau fixe.

Il y a donc, à l'égard de ces deux propriétés, une analogie parfaite entre les coniques planes et les courbes gauches du troisième ordre.

Ces propriétés concernent les points, tant des sections coniques que des courbes gauches; or on sait que les tangentes aux coniques donnent lieu à des propriétés semblables et non moins importantes : nous verrons plus loin (**33**) que ces propriétés des tangentes ont aussi leurs analogues dans les courbes gauches du troisième ordre, non pas précisément à l'égard des tangentes à ces courbes, mais à l'égard de leurs plans osculateurs.

8. *Quand on a deux faisceaux de rayons, dans l'espace, homographiques entre eux, le lieu des points de rencontre de deux rayons homologues est une courbe gauche du troisième ordre.*

Et *si l'on considère dans les deux faisceaux deux plans homologues, leur droite d'intersection s'appuie toujours sur la courbe en deux points (lesquels peuvent être imaginaires).*

9. *Quand deux droites s'appuient, chacune en deux points, sur une courbe gauche du troisième ordre, si autour de ces deux droites on fait tourner deux plans se coupant toujours sur la courbe, ces deux plans forment, autour des deux droites fixes, deux faisceaux homographiques.*

10. On peut dire encore que :

Si par quatre points fixes d'une courbe gauche du troisième ordre on mène quatre plans se coupant suivant une même droite qui s'appuie en deux autres points quelconques de la courbe, le rapport anharmonique de ces quatre plans a toujours la même valeur, quelle que soit cette droite.

Cette droite peut être une tangente à la courbe. Par conséquent :

Si par chaque tangente à une courbe gauche du troisième ordre on mène quatre plans passant respectivement par quatre points fixes pris sur la courbe, le rapport anharmonique de ces quatre plans a toujours la même valeur.

11. *Si autour d'une droite fixe passant par un point de la courbe gauche du troisième ordre, on fait tourner un plan qui rencontre la courbe en deux autres points, la droite qui joint ces deux points engendre un hyperboloïde qui passe par la courbe proposée.*

12. *Étant donnés six points d'une courbe gauche du troisième ordre, construire la courbe par points.*

Soient a, b, c, d, O et O' les six points donnés. Que par les deux O, O' on mène un plan quelconque P; ce plan rencontrera la courbe en un troisième point m que l'on construit ainsi. On considère le plan P comme appartenant au faisceau des quatre rayons Oa, Ob, Oc, Od, et l'on détermine le plan homologue P' dans le faisceau des quatre rayons O'a, O'b, O'c, O'd considéré comme homographique au premier. Ce plan P' passe par le point O' et coupe le premier suivant une droite. Considérant cette droite comme un rayon du deuxième faisceau, on détermine son homologue dans le premier faisceau. Le point d'intersection des deux droites est le point de la courbe que l'on cherche.

Autrement. Les quatre points a, b, c, d, pris trois à trois, déterminent quatre plans. Que par la droite OO' on mène un plan quelconque qui rencontre ces quatre premiers suivant quatre droites, et que l'on conçoive la conique tangente à ces quatre droites et à la cinquième OO'; les tangentes à cette conique, menées par les points O et O', se rencontreront en un point qui appartiendra à la courbe cherchée.

III.

Courbe gauche du troisième ordre considérée sur un hyperboloïde à une nappe.

13. *La courbe gauche du troisième ordre ne peut se trouver sur une surface du second ordre, qu'autant que cette surface est engendrée par une ligne droite, et est, par conséquent, un hyperboloïde à une nappe, lequel peut être, dans les cas particuliers, un paraboloïde hyperbolique, ou un cône, ou un cylindre.*

14. *Quand une courbe gauche du troisième ordre est tracée sur un hyperboloïde à une nappe, elle rencontre en deux points toutes les génératrices d'un même système de génération, et en un seul point toutes les génératrices du deuxième système.*

15. *Une surface du deuxième ordre quelconque ne rencontre une courbe gauche du troisième ordre qu'en six points (réels ou imaginaires).*

D'où il suit que :

Quand un hyperboloïde à une nappe rencontre une courbe gauche du troisième ordre en sept points, cette courbe est tout entière sur l'hyperboloïde.

16. *Par une courbe gauche du troisième ordre et par une droite qui s'appuie en un seul point sur la courbe, on peut faire passer un hyperboloïde; les génératrices de cette surface qui s'appuient sur la droite donnée rencontrent la courbe, chacune en deux points.*

17. On conclut de là que :

Par un point quelconque de l'espace, on peut toujours mener une droite (et on n'en peut mener qu'une), qui s'appuie en deux points sur une courbe gauche du troisième ordre.

18. Par conséquent :

La perspective, ou la projection d'une courbe gauche du troisième ordre sur un plan, est une courbe du troisième ordre ayant toujours un point double ou conjugué.

19. *Quand une droite s'appuie en deux points sur une courbe gauche du troisième ordre, on peut mener par un point pris arbitrairement dans l'espace un hyperboloïde passant par la courbe et par la droite.*

Tous les hyperboloïdes ainsi déterminés ont pour intersection commune la courbe et la droite.

20. *Quand deux droites s'appuient, chacune en deux points, sur une courbe gauche du troisième ordre, ces deux droites et la courbe sont sur un même hyperboloïde.*

21. *Si une droite qui s'appuie en deux points sur une courbe gauche du troisième ordre est l'arête commune à plusieurs angles dièdres en involution, les cordes que ces angles interceptent dans la courbe forment un hyperboloïde.*

22. Réciproquement : *Quand une courbe gauche du troisième ordre est tracée sur un hyperboloïde, dont elle rencontre en deux points toutes les génératrices d'un même système* (**14**), *si par une droite fixe quelconque qui s'appuie en deux points sur la courbe, on mène deux plans passant par les deux points où la courbe rencontre chacune de ces génératrices, les couples de plans ainsi menés forment des angles dièdres en involution.*

23. Cette proposition conduit à une solution simple du problème suivant :

Une courbe gauche du troisième ordre étant tracée sur un hyperboloïde, déterminer les deux génératrices de l'hyperboloïde qui sont tangentes à cette courbe.

IV.

Courbe gauche du troisième ordre considérée sur deux hyperboloïdes.

24. *On peut faire passer par une courbe gauche du troisième ordre une infinité d'hyperboloïdes ayant pour génératrice commune une droite qui s'appuie en deux points sur la courbe.*

25. *Quand une courbe gauche du troisième ordre est l'intersection de deux hyperboloïdes à la fois, ces deux hyperboloïdes ont nécessairement une génératrice commune.*

26. *Quand une courbe gauche du troisième ordre est l'intersection de deux hyperboloïdes qui ont une génératrice commune, cette courbe rencontre cette génératrice et toutes celles qui appartiennent au même système de génération dans chacun des deux hyperboloïdes, en deux points, et les génératrices du deuxième système de génération en un seul point.*

27. *Quand autour de trois droites données dans l'espace on fait tourner trois plans formant trois faisceaux homographiques (ou, en d'autres termes, se correspondant anharmoniquement), le point d'intersection de ces trois plans décrit une courbe gauche du troisième ordre.*

V.

Deux courbes gauches du troisième ordre tracées sur un même hyperboloïde.

28. *Quand deux courbes gauches du troisième ordre tracées sur un même hyperboloïde rencontrent chacune en deux points une même génératrice, ces deux courbes se rencontrent en quatre points;*

Et quand les deux courbes rencontrent, l'une en deux points et l'autre en un seul point, une même génératrice, elles se rencontrent en cinq points.

29. Puisque deux courbes gauches du troisième ordre tracées sur un hyperboloïde, et qui rencontrent chacune en deux points une même génératrice, ne se rencontrent qu'en quatre points, il s'ensuit que :

Trois hyperboloïdes qui ont une génératrice commune ne se rencontrent qu'en quatre points.

30. *Quand deux courbes gauches du troisième ordre ont cinq points communs, on peut faire passer par ces deux courbes un hyperboloïde.*

31. *Par cinq points d'un hyperboloïde, on peut faire passer deux courbes gauches du troisième ordre tracées sur la surface de l'hyperboloïde.*

32. *Étant données sur un hyperboloïde deux courbes gauches du troisième ordre qui rencontrent une même génératrice chacune en deux points, construire les quatre points d'intersection de ces deux courbes.*

33. *Etant donnés cinq points dans l'espace et une droite, construire la courbe gauche du troisième ordre qui passe par ces cinq points et qui s'appuie en deux points sur la droite.*

VI.

Systèmes de courbes gauches du troisième ordre tracées sur un même hyperboloïde et passant par quatre mêmes points.

34. *Quand plusieurs courbes gauches du troisième ordre, décrites sur un hyperboloïde, passent par quatre mêmes points et rencontrent chacune en deux points une même génératrice,*

1°. *Les segments faits par ces courbes sur cette droite sont en involution.*

2°. *Ces segments correspondent anharmoniquement aux points dans lesquels les courbes rencontrent une génératrice du second système de génération de l'hyperboloïde.*

35. On conclut aisément de cette proposition la solution des questions suivantes :

Par quatre points donnés sur un hyperboloïde, faire passer une courbe gauche du troisième ordre qui soit tangente à une génératrice donnée.

Plus généralement, *par quatre points d'un hyperboloïde, mener sur cette surface une courbe gauche du troisième ordre qui intercepte sur une génératrice un segment de grandeur donnée.*

36. *Par cinq points d'un hyperboloïde, mener sur cette surface une courbe gauche du troisième ordre qui rencontre en deux points les génératrices d'un même système de génération.*

37. *Etant donnés trois points sur un hyperboloïde et deux génératrices d'un même système de génération, on peut tracer sur l'hyperboloïde quatre courbes gauches du troisième ordre passant par les trois points et tangentes aux deux droites.*

VII.

Surface développable dont la courbe gauche du troisième ordre est l'arête de rebroussement. — Plans osculateurs à la courbe en divers points.

38. *Par une droite donnée, on peut mener quatre plans tangents à une courbe gauche du troisième ordre.*

39. *La surface développable formée par les tangentes à une courbe gauche du troisième ordre est du quatrième ordre.*

40. *Par un point donné, on ne peut mener que trois plans tangents à cette surface.*

En d'autres termes : *Par un point donné, on ne peut mener que trois plans osculateurs à la courbe gauche du troisième ordre.*

41. *Les points de contact de ces trois plans osculateurs avec la courbe sont dans un plan passant par le point donné.*

42. Il résulte de là que : *Connaissant les plans osculateurs en trois points de la courbe, on construit immédiatement le plan osculateur en un quatrième point quelconque.*

43. On conclut encore du théorème précédent cette propriété remarquable :

Toute courbe gauche du troisième ordre peut prendre un mouvement infiniment petit dans lequel tous ses points se dirigent suivant les normales aux plans osculateurs en ces points [*].

44. *La développable formée par les tangentes à une courbe gauche du troisième ordre a pour trace sur un plan quelconque une courbe du quatrième ordre ayant trois points de rebroussement, lesquels sont les points d'intersection de la courbe gauche par le plan.*

45. *Quand le plan est tangent à la courbe proposée, la trace de la développable sur ce plan est du troisième ordre et a un point double.*

---

[*] On sait qu'une certaine courbe gauche du troisieme ordre jouit de cette autre propriété, qu'*elle peut prendre un mouvement infiniment petit dans lequel tous les points se dirigent vers un même point de l'espace, suivant les arêtes d'un cône du second ordre.* (Voir *Comptes rendus*, tome XVI, page 1424, année 1843.)

46. *Si le plan est osculateur à la courbe, et, par conséquent, tangent a la développable, il coupe cette surface suivant une conique.*

47. *Si par un point on mène des droites parallèles aux tangentes à une courbe gauche du troisième ordre, ces droites forment un cône du quatrième ordre qui a trois arêtes de rebroussement.*

VIII.

Corrélation entre les points d'une courbe gauche du troisième ordre et les plans osculateurs à la courbe en ces points.

48. Il résulte du théorème (**45**) que :

Les points d'une courbe gauche étant considérés comme formant une première figure, les plans osculateurs à la courbe en ces points forment une figure corrélative [*].

49. Cette simple proposition suffit pour donner lieu immédiatement à une foule de propriétés nouvelles des courbes gauches du troisième ordre; car ces propriétés seront les corrélatives (selon la loi de dualité) de toutes celles qui précèdent.

On en conclura en particulier diverses égalités de rapports anharmoniques.

50. Par exemple, *Etant pris six points* a, b, c, d, e, f *d'une courbe gauche du troisième ordre, si par les deux points* e, f *on mène quatre plans passant respectivement par les quatre premiers, le rapport anharmonique de ces quatre plans est égal à celui des quatre points dans lesquels la droite d'intersection des plans osculateurs en* e *et* f *rencontre les quatre plans osculateurs en* a, b, c, d.

51. *Une tangente quelconque à une courbe gauche du troisième ordre rencontre quatre plans osculateurs fixes en quatre points dont le rapport anharmonique est constant, quelle que soit cette tangente.*

52. *Si l'on conçoit cinq plans osculateurs à la courbe gauche du troisième ordre, un sixième quelconque coupe ces cinq premiers suivant cinq droites qui forment une figure toujours homographique à une même figure.*

---

[*] Voir *Aperçu historique sur l'origine et le développement des Méthodes en Géométrie*, page 676.

53. *Si l'on conçoit les plans osculateurs en deux points fixes d'une courbe gauche du troisième ordre, les droites suivant lesquelles les plans osculateurs en tant d'autres points qu'on voudra coupent ces deux premiers, forment toujours deux figures homographiques.*

C'est ce théorème et le précédent qui constituent dans les courbes gauches du troisième ordre l'analogie entre leurs plans osculateurs et les tangentes des sections coniques, dont il a été question plus haut (**7**).

54. *Si l'on prend deux points fixes* a, b *d'une courbe gauche du troisième ordre, et un troisième point quelconque de la courbe* m, *le rapport des distances de ce point aux plans osculateurs en* a *et* b *est au rapport des distances du plan osculateur en* m *aux deux points* a, b, *dans une raison constante.*

Etc., etc.

IX.

Surfaces réglées passant par une courbe gauche du troisième ordre.

55. *Si une droite qui s'appuie en deux points sur une courbe gauche du troisième ordre est l'arête commune à deux faisceaux de plans homographiques, les cordes interceptées dans la courbe entre les couples de plans homologues des deux faisceaux, formeront une surface du quatrième ordre.*

Ainsi, par exemple, *si les cordes sont interceptées entre les côtés d'un angle dièdre de grandeur constante, tournant autour de son arête fixe qui s'appuie en deux points de la courbe, ces cordes forment une surface du quatrième ordre.*

Observation. — Par chaque point de la courbe gauche proposée passent deux génératrices de la surface, de sorte que cette courbe est une ligne de striction de la surface réglée du quatrième ordre.

Si les deux faisceaux homographiques sont en involution, la surface devient un hyperboloïde, comme il a été dit précédemment (**21**).

56. *Etant données une courbe gauche du troisième ordre et une droite fixe dans l'espace, si, par chaque point de cette droite, on mène une autre droite qui s'appuie en deux points sur la courbe, le lieu de ces droites est une surface du quatrième ordre.*

En d'autres termes :

Si, autour d'une droite fixe, on fait tourner un plan qui rencontre *une courbe gauche du troisième ordre en trois points, le lieu des droites qui joignent ces points deux à deux est une surface du quatrième ordre.*

57. *La surface réglée dont les génératrices s'appuient chacune en un point d'une courbe gauche du troisième ordre et sur deux droites situées d'une manière quelconque dans l'espace, est du sixième ordre.*

58. Corollaires. — *Si l'une des deux droites rencontre la courbe en un point, la surface n'est que du cinquième ordre.*

59. *Si les deux droites s'appuient chacune en un point sur la courbe, ou bien si l'une s'appuie sur la courbe en deux points et que l'autre ait une position quelconque dans l'espace, la surface n'est que du quatrième ordre.*

60. *Si l'une des droites s'appuie en deux points sur la courbe, et l'autre en un point seulement, la surface n'est plus que du troisième ordre.*

Enfin, si les deux droites s'appuient chacune en deux points sur la courbe, la surface devient un hyperboloïde à une nappe, comme il a été dit précédemment (**20**).