JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur un théorème de M. Dirichlet

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 2 (1857), p. 184.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1857_2_2__184_0>

SUR UN THÉOREME DE M. DIRICHLET;

PAR M. J. LIOUVILLE.

On trouve dans le Mémoire de M. Dirichlet *sur les applications de l'analyse infinitésimale à la Théorie des Nombres* un théorème du genre de ceux dont j'ai parlé dans un article inséré au cahier d'*avril*, page 141. Ce théorème n'est pas énoncé explicitement par l'illustre géomètre, mais il résulte d'une de ses formules (*voir* le Journal de Crelle, tome XXI, page 4). Je profite de la place qui reste libre dans cette feuille pour en dire ici deux mots.

Je désigne par $\theta(m)$ le nombre de manières dont l'entier m peut être décomposé en deux facteurs premiers entre eux, et par $\zeta(m)$ le nombre des diviseurs de m. Cela posé, considérons les diviseurs carrés D^2 que m peut avoir (l'unité est toujours un de ces diviseurs), et pour chacun d'eux formons l'expression $\theta\left(\frac{m}{D^2}\right)$, puis faisons la somme des résultats pour tous les diviseurs D^2. Le théorème de M. Dirichlet consiste en ce que

$$\sum \theta\left(\frac{m}{D^2}\right) = \zeta(m).$$

Ainsi, pour le cas de $m = 12$, où $D^2 = 1, 4$, on a

$$\theta(12) + \theta(3) = 4 + 2 = \zeta(12).$$

Si, au lieu de ne considérer que les diviseurs carrés D^2, on prenait tous les diviseurs d de m, on aurait cette autre formule, curieuse aussi,

$$\sum \theta\left(\frac{m}{d}\right) \quad \text{ou} \quad \sum \theta(d) = \zeta(m^2).$$

Exemple : $m = 12$; alors

$$\theta(1) + \theta(2) + \theta(3) + \theta(4) + \theta(6) + \theta(12) = 15 = \zeta(12^2).$$