JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. LEJEUNE-DIRICHLET

Sur une propriété des formes quadratiques à déterminant positif

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 1 (1856), p. 76-79.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1856_2_1__76_0>

SUR

UNE PROPRIÉTÉ DES FORMES QUADRATIQUES
A DÉTERMINANT POSITIF;

PAR M. G. LEJEUNE-DIRICHLET.

[Extrait des *Comptes rendus de l'Académie de Berlin* (juillet 1855), et librement traduit par l'auteur.]

Comme la propriété des formes quadratiques que je me propose de faire connaître dans cette Note est liée intimement à la théorie de l'équation

$$t^2 - \mathrm{D}u^2 = 1, \tag{1}$$

je commencerai par quelques remarques sur cette équation dans laquelle l'entier positif donné D est supposé non carré, et dont nous n'aurons à considérer que les solutions exprimées en entiers positifs t et u.

On sait que si l'on désigne par T, U les plus petits entiers positifs, satisfaisant à l'équation proposée, toutes les solutions positives de l'équation seront données par la formule

$$(\mathrm{T} + \mathrm{U}\sqrt{\mathrm{D}})^n = t_n + u_n\sqrt{\mathrm{D}},$$

où il faut attribuer à n successivement toutes les valeurs entières depuis $n = 1$ jusqu'à $n = \infty$. Parmi les valeurs que l'on obtient ainsi pour u_n, il y en a une infinité qui sont divisibles par un entier quelconque S (positif), et l'on prouve facilement que si N désigne le plus petit indice n, pour lequel cette condition a lieu, les autres valeurs convenables de n forment la suite des multiples successifs de N. Pour nous en assurer, soit $\mathrm{D}' = \mathrm{DS}^2$, et considérons l'équation

$$t'^2 - \mathrm{D}'u'^2 = 1,$$

qui a la même forme que celle (1). On voit qu'en posant $t = t'$, $u = Su'$, toute solution de cette dernière donnera une solution de l'équation (1), pour laquelle u est divisible par S, et *vice versâ;* l'assertion avancée plus haut se trouve donc justifiée, et l'on reconnaît de plus que l'entier N est donné par l'équation

$$(T + U\sqrt{D})^N = T' + U'\sqrt{D'},$$

T' et U' désignant les plus petites valeurs positives de t' et u'.

L'exposant N peut être assigné sans que l'on détermine préalablement T' et U'; il suffit de connaître pour chacun des diviseurs premiers p de S le plus petit indice ν tel que u_ν soit divisible par p, et de savoir en même temps quelle est la puissance la plus élevée p^δ de p qui divise u_ν. Dans la double supposition qu'on vient de faire, on peut indiquer immédiatement l'exposant de la plus haute puissance de p contenue dans $u_{\nu e}$, e étant un entier arbitrairement choisi. L'exposant dont il s'agit est $\delta + \varepsilon$, si ε, qui peut d'ailleurs se réduire à zéro, désigne celui de la puissance la plus élevée de p qui divise e.

Pour reconnaître la vérité de ce qui vient d'être avancé, soient θ et η deux entiers qui satisfassent à l'équation (1), et soit de plus p^k (k différant de zéro) la plus haute puissance de p contenue dans η. Si de cette solution nous déduisons une solution nouvelle au moyen de la formule

$$(\theta + \eta\sqrt{D})^m = t + u\sqrt{D},$$

nous aurons

$$u = \eta\left(m\theta^{m-1} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\theta^{m-3}\eta^2 D + \text{etc.}\right),$$

et il est manifeste, θ n'étant pas divisible par p, que la puissance la plus élevée de p contenue dans u sera p^k, si m n'est pas divisible par p, et que cette puissance sera p^{k+1} si l'on suppose $m = p$. Or l'élévation à une puissance quelconque pouvant se réduire à la combinaison des deux cas particuliers précédents, le résultat énoncé plus haut se trouve établi.

D'après la propriété qui vient d'être démontrée, on voit que la condition nécessaire et suffisante pour que $u_{\nu e}$ soit divisible par une puissance quelconque p^α, où $\alpha > 0$, consiste en ce que e doit avoir le facteur $p^{\alpha-\delta}$, l'exposant $\alpha - \delta$, s'il devient négatif, devant être remplacé par zéro.

Si maintenant nous nous servons d'indices pour désigner les nombres premiers inégaux p contenus dans S, et les valeurs correspondantes de ν et δ, et que nous posions

$$S = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots,$$

l'exposant cherché N sera, d'après ce qui précède, le plus petit multiple commun des nombres

$$\nu_1 p_1^{\alpha_1 - \delta_1}, \quad \nu_2 p_2^{\alpha_2 - \delta_2}, \ldots,$$

et l'on voit sans peine que si, sans introduire de nouveaux facteurs premiers dans S, on fait croître indéfiniment tous les exposants α_1, $\alpha_2, \ldots$, le quotient $\frac{S}{N}$ finira bientôt par ne plus varier, en conservant une valeur indépendante de celles de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$.

Le théorème que nous venons d'établir sur l'équation (1) donne lieu à une conséquence remarquable qui se rapporte à la théorie des formes quadratiques à déterminant positif. Si aux suppositions précédemment énoncées, nous ajoutons celle que D n'ait pas de diviseur carré, que nous désignions par h le nombre des classes dans lesquelles se distribuent les formes quadratiques ayant D pour déterminant commun, et que nous donnions à la lettre h' une signification analogue relativement au déterminant $D' = DS^2$, nous aurons l'équation que voici :

$$h' = h \frac{\log(T + U\sqrt{D})}{\log(T' + U'\sqrt{D'})} SR,$$

et que j'ai établie dans mon Mémoire : *Recherches sur diverses applications de l'Analyse infinitésimale à la Théorie des Nombres*, 2^e partie. Quant à la quantité R qui y entre et dont nous n'avons pas eu à parler plus haut, il suffira pour notre objet de rappeler que cette quantité dépend à la vérité des nombres premiers $p_1, p_2, \ldots$, mais nullement des exposants $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$. Notre équation pouvant se mettre sous la forme

$$h' = h \frac{S}{N} R,$$

nous concluons du résultat précédemment établi que de tout déterminant positif D, on peut déduire une infinité d'autres déterminants de la forme DS^2, ayant tous le même nombre de classes. En choisissant convenablement l'entier D et les nombres premiers $p_1, p_2, \ldots$, on peut faire en sorte, et cela d'une infinité de manières, que le nombre invariable des classes coïncide pour toute cette série infinie de déterminants avec celui des genres, ce qui confirme la conjecture énoncée par l'illustre auteur des *Disq. arith.* (*voir* art. 304), et d'après laquelle les déterminants positifs possédant une seule classe dans chacun des genres qui leur correspondent forment une suite infinie. C'est là un phénomène analytique d'autant plus remarquable, que les déterminants négatifs jouissant de la même propriété ne paraissent être qu'en nombre fini et même très-restreint. Si l'on peut s'en rapporter à une induction portée très-loin (jusqu'à 10 000 si je ne me trompe) d'abord par Euler qui s'est occupé de ces mêmes nombres sous le nom de *numeri idonei*, c'est-à-dire de nombres propres à faire trouver des nombres premiers très-grands, à une époque où la théorie des formes quadratiques, fondée par Lagrange, n'existait pas encore, et plus tard par Gauss, les déterminants négatifs dont il s'agit ne seraient qu'au nombre de 65, et le plus grand de ces déterminants, abstraction faite du signe, aurait pour valeur 1848.