JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Note à l'occasion du Mémoire précédent

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 19 (1854), p. 395-400.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1854_1_19__395_0>

Note à l'occasion du Mémoire précédent;

Par M. J. LIOUVILLE.

1. En désignant par u, v, w trois fonctions de x, y, z, continues et bien déterminées dans toute l'étendue où on les emploie, on réduit aisément l'intégrale triple

$$\int\int\int\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)dxdydz,$$

qui concerne les éléments $dxdydz$ d'un volume contenu dans une surface fermée (f), à une intégrale double

$$\int\int(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)\,d\omega,$$

qui n'est plus relative qu'aux éléments $d\omega$ de la surface (f), et où α, β, γ sont les angles que la normale à $d\omega$, dirigée hors du volume, fait avec les trois axes rectangulaires des coordonnées x, y, z. C'est ainsi que dans les *Additions à la Connaissance des Temps* pour 1855, j'ai de l'équation

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0$$

déduit celle-ci

$$\int\int(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)\,d\omega=0,$$

qu'on aurait pu, du reste, à l'endroit indiqué, poser *à priori*, s'il n'avait été bon de montrer tout d'abord, sur un cas simple, la marche d'un calcul qui devait se reproduire plus d'une fois dans le cours du Mémoire.

L'équation

$$\iiint \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) dxdydz$$
$$= \iint (u \cos\alpha + v \cos\beta + w \cos\gamma)\, d\omega$$

a été, au surplus, souvent employée, explicitement ou implicitement, dans ce Journal. L'analyse qui la fournit, et qui démontre en même temps les trois suivantes dont elle se compose,

$$\iiint \frac{du}{dx}\, dx\, dy\, dz = \iint u \cos\alpha\, d\omega,$$
$$\iiint \frac{dv}{dy}\, dx\, dy\, dz = \iint v \cos\beta\, d\omega,$$
$$\iiint \frac{dw}{dz}\, dx\, dy\, dz = \iint w \cos\gamma\, d\omega,$$

a été développée avec beaucoup de soin par M. Gauss dans le Mémoire sur l'attraction des ellipsoïdes que M. Borchardt cite; mais quoique ce Mémoire remonte à l'année 1813, les formules elles-mêmes étaient, si je ne me trompe, déjà connues antérieurement. Peu importe, au reste, pour l'objet que nous avons ici en vue. Contentons-nous de partir de l'équation rappelée plus haut, comme d'une équation familière à nos lecteurs.

2. Maintenant, soit

$$f(x, y, z) = \text{constante},$$

ou, pour abréger,

$$f = \text{constante},$$

l'équation de la surface fermée (f) dont $d\omega$ est l'élément, et posons

$$\mathrm{R} = \left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2 :$$

nous aurons

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{R}}}\frac{df}{dx}, \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{R}}}\frac{df}{dy}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{R}}}\frac{df}{dz},$$

en fixant convenablement le signe du radical. Ces valeurs des trois cosinus sont des fonctions de x, y, z : on peut conserver ces fonctions telles qu'elles sont; on pourrait aussi les modifier, et, par exemple, les réduire à des fonctions de deux variables seulement, au moyen de l'équation de la surface. Modifiées ou non, désignons-les par

$$L,\ M,\ N;$$

en sorte que L, M, N soient trois fonctions de x, y, z, conservant un sens précis pour chaque point de l'intérieur de (f), et devenant respectivement égales aux valeurs de nos trois cosinus sur la surface (f).

3. Cela étant, si l'on demande que les fonctions u, v, w du n° **1** soient telles qu'on ait, à la surface de (f),

$$u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma = \varphi,$$

φ ou $\varphi(x, y, z)$ étant une fonction de x, y, z à volonté, la réponse la plus simple à cette question, naturellement susceptible d'une infinité de solutions, sera de prendre

$$u = L\varphi,\quad v = M\varphi,\quad w = N\varphi;$$

en effet, cela donne, à la surface,

$$u = \varphi\cos\alpha,\quad v = \varphi\cos\beta,\quad w = \varphi\cos\gamma,$$

et l'équation demandée s'ensuit, puisque

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

D'après le n° **1**, il vient dès lors

$$\iiint \left(\frac{d.L\varphi}{dx} + \frac{d.M\varphi}{dy} + \frac{d.N\varphi}{dz}\right) dx dy dz = \iint \varphi(x, y, z)\, d\omega.$$

En particulier

$$\iiint \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{R}}\frac{df}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{R}}\frac{df}{dz}\right)\right] dx dy dz = \iint \varphi(x, y, z)\, d\omega.$$

C'est la formule fondamentale de M. Borchardt.

4. Mais M. Borchardt ajoute des détails intéressants où figurent les rayons de courbure principaux de la surface (f). Sans le suivre dans cette partie de son Mémoire, qui a été, on ne peut en douter, son objet principal, je vais du moins donner une courte démonstration de l'équation par laquelle il détermine les rayons de courbure dont il est question.

Au point m ou (x, y, z) de la surface (f) menons la normale mn, et au point infiniment voisin m' ou $(x + dx, y + dy, z + dz)$ la normale $m'n'$; si mm' est la direction d'une ligne de courbure, mn et $m'n'$ se rencontreront en un point o à une certaine distance $om = om'$ des deux points m, m' : soit λ cette distance [que je prends négative ou positive suivant que mo est ou n'est pas sur la partie de la normale mn extérieure à (f)]; les coordonnées du point o, en tant qu'il appartient à la normale mn, seront

$$x - \lambda \cos\alpha, \quad y - \lambda\cos\beta, \quad z - \lambda\cos\gamma;$$

mais en tant qu'il appartient à la normale $m'n'$, elles seront exprimées par ces mêmes quantités augmentées de leurs différentielles : ces différentielles seront donc nulles, et on devra avoir

$$dx - \lambda d\cos\alpha = 0, \quad dy - \lambda d\cos\beta = 0, \quad dz - \lambda d\cos\gamma = 0,$$

si mm' est la direction d'une ligne de courbure; de plus, dans ce cas, λ sera le rayon de courbure de la section principale correspondante.

Les trois équations que je viens d'écrire se réduisent au fond à deux, car si on les multiplie par $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, et qu'on les ajoute, on trouvera une identité, puisque, d'une part,

$$\cos\alpha\, dx + \cos\beta\, dy + \cos\gamma\, dz = 0,$$

vu que mm' et mn sont à angle droit, et que, d'autre part,

$$\cos\alpha\, d\cos\alpha + \cos\beta\, d\cos\beta + \cos\gamma\, d\cos\gamma = 0.$$

En les développant, il vient

$$\left(1 - \lambda\frac{d\cos\alpha}{dx}\right)dx - \lambda\frac{d\cos\alpha}{dy}dy - \lambda\frac{d\cos\alpha}{dz}dz = 0,$$

$$-\lambda\frac{d\cos\beta}{dx}dx + \left(1 - \lambda\frac{d\cos\beta}{dy}\right)dy - \lambda\frac{d\cos\beta}{dz}dz = 0,$$

$$-\lambda\frac{d\cos\gamma}{dx}dx - \lambda\frac{d\cos\gamma}{dy}dy + \left(1 - \lambda\frac{d\cos\gamma}{dz}\right)dz = 0;$$

éliminant donc dx, dy, dz, qui n'entrent que par leurs rapports, on arrive à conclure que λ, c'est-à-dire chacun des deux rayons de courbure principaux de la surface (f), vérifie l'équation

$$\text{Déterminant} \begin{vmatrix} 1-\lambda\dfrac{d\cos\alpha}{dx}, & -\lambda\dfrac{d\cos\alpha}{dy}, & -\lambda\dfrac{d\cos\alpha}{dz} \\ -\lambda\dfrac{d\cos\beta}{dx}, & 1-\lambda\dfrac{d\cos\beta}{dy}, & -\lambda\dfrac{d\cos\beta}{dz} \\ -\lambda\dfrac{d\cos\gamma}{dx}, & -\lambda\dfrac{d\cos\gamma}{dy}, & 1-\lambda\dfrac{d\cos\gamma}{dz} \end{vmatrix} = 0,$$

laquelle revient au fond à celle de M. Borchardt, qu'on pourra ainsi introduire dans les éléments.

Je n'insiste pas sur ce que notre méthode offre en même temps, relativement aux lignes de courbure, le long desquelles nous voyons qu'on a toujours

$$d\cos\alpha : d\cos\beta : d\cos\gamma :: dx : dy : dz.$$

Mais je dois faire observer que, dans une Note insérée au tome XVII du présent Journal, j'annonçais la solution d'un problème bien plus général, à savoir celui de déterminer la direction et la courbure des sections principales ou plutôt le rayon de courbure d'une section normale quelconque d'une surface représentée par une équation entre des coordonnées u_1, u_2, u_3 dont la signification géométrique n'est pas connue, et pour lesquelles on sait seulement que le carré ds^2 de la droite qui joint deux points infiniment voisins a une expression donnée. Le principe de cette solution est on ne peut plus simple; mais le calcul exige quelques développements : ce sera l'objet d'un prochain article.

Revenons à l'équation en λ, qui fournit les deux rayons de courbure principaux ρ, ρ' de la surface (f). Cette équation ne doit être et n'est en effet que du second degré; car le coefficient du terme en λ^3 qui se présente d'abord, lorsqu'on développe le déterminant placé au premier membre, est égal au signe près à la quantité suivante

$$\frac{d\cos\alpha}{dx}\frac{d\cos\beta}{dy}\frac{d\cos\gamma}{dz} - \frac{d\cos\alpha}{dx}\frac{d\cos\gamma}{dy}\frac{d\cos\beta}{dz} + \frac{d\cos\gamma}{dx}\frac{d\cos\alpha}{dy}\frac{d\cos\beta}{dz}$$
$$- \frac{d\cos\beta}{dx}\frac{d\cos\alpha}{dy}\frac{d\cos\gamma}{dz} + \frac{d\cos\beta}{dx}\frac{d\cos\gamma}{dy}\frac{d\cos\alpha}{dz} - \frac{d\cos\gamma}{dx}\frac{d\cos\beta}{dy}\frac{d\cos\alpha}{dz},$$

que l'on trouve égale à zéro, en exprimant que $\cos\gamma$ est une fonction de $\cos\alpha$ et $\cos\beta$.

On aurait eu de suite une équation sans terme apparent en λ^3 si, au lieu d'éliminer dx, dy, dz entre les trois équations

$$dx - \lambda\, d\cos\alpha = 0, \quad dy - \lambda\, d\cos\beta = 0, \quad dz - \lambda\, d\cos\gamma = 0,$$

on s'était servi de deux équations déduites de celles-là, et de l'équation

$$\cos\alpha\, dx + \cos\beta\, dy + \cos\gamma\, dz = 0\,;$$

mais le calcul eût été moins élégant. En opérant comme nous l'avons fait, on a d'ailleurs l'avantage de retrouver exactement les résultats de M. Borchardt. Nos formules définitives sont

$$1 - G\lambda + H\lambda^2 = 0, \quad \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = G, \quad \frac{1}{\rho\rho'} = H,$$

et nos valeurs de G et H, savoir

$$G = \frac{d\cos\alpha}{dx} + \frac{d\cos\beta}{dy} = \frac{d\cos\gamma}{dz},$$

et

$$\begin{aligned} H = {} & \frac{d\cos\alpha}{dx}\frac{d\cos\beta}{dy} + \frac{d\cos\gamma}{dz}\frac{d\cos\alpha}{dx} + \frac{d\cos\beta}{dy}\frac{d\cos\gamma}{dz} \\ & - \frac{d\cos\alpha}{dy}\frac{d\cos\beta}{dx} - \frac{d\cos\gamma}{dx}\frac{d\cos\alpha}{dz} - \frac{d\cos\beta}{dz}\frac{d\cos\gamma}{dy}, \end{aligned}$$

coïncident (quand on y remplace les cosinus par leurs valeurs) avec celles que l'habile géomètre de Berlin a obtenues dans son élégant travail.