JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

VOIZOT

Deuxième note sur les courbes à double courbure

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 17 (1852), p. 253-264.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1852_1_17__253_0>

DEUXIÈME NOTE

SUR LES COURBES A DOUBLE COURBURE;

PAR M. VOIZOT.

Dans une première Note, insérée dans le tome XIV, page 481 de ce Recueil, je crois avoir établi que

$$\rho\, dt = ds \tag{1}$$

étant l'équation de la première courbure ou de la courbure circulaire d'une courbe quelconque FF′,

$$dt = dt' \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\beta \tag{2}$$

était l'équation de la seconde courbure ou de la courbure conique de la proposée.

Dans cette deuxième Note, je présente aux géomètres quelques propriétés de la surface formée par les axes des cônes osculateurs, parmi lesquelles propriétés on distingue celles-ci :

1°. *La surface des axes des cônes osculateurs de la proposée* FF′ *est en même temps la surface des développées de toutes ses développantes.*

Par conséquent elle jouit, lorsqu'elle est rabattue dans un plan, de même que la surface des développées de FF′, de la propriété de transformer en lignes droites les développées de toutes les développantes.

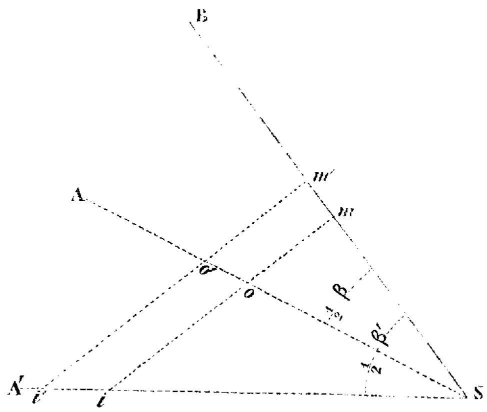
Or, la courbe FF′ étant elle-même une développée commune à toutes ces développantes, il s'ensuit que *cette courbe devient* UNE LIGNE DROITE, *lorsqu'on rabat, dans un plan, la surface des axes de ses cônes osculateurs.*

2°. *La surface des axes des cônes osculateurs de la courbe* FF′ *est* *aussi la surface des axes des cônes osculateurs des développées de toutes ses dévoloppantes.*

3°. *L'arête de rebroussement de cette surface est le lieu des centres des sphères osculatrices de toutes les développantes de la courbe* FF'.

J'aurai tout à l'heure à considérer des équations analogues aux équations (1) et (2). Puisque je regarde l'équation (2) comme celle de la deuxième courbure de la proposée FF', peut-être sera-t-il nécessaire de faire voir, tout d'abord, que, tandis que $\frac{1}{\rho}$ donne sa courbure circulaire, $\frac{1}{\tang \frac{1}{2}\beta}$ représente sa courbure conique ou la courbure de la surface de ses tangentes.

Fig. 1.



Soient donc :

SA l'axe d'un cône circulaire droit;
S son centre;
β son angle;
SB sa génératrice.

La courbure de la surface convexe de ce cône se mesurera par une section perpendiculaire à son arête SB.

Au centre S la courbure sera infinie; elle sera nulle à l'infini; et en chaque point de l'arête SB, elle variera en raison inverse de la distance au centre S.

Cette infinité de courbures, relatives à un même angle au centre, constitue une indétermination qui vient du manque d'unité de courbure homogène, et qui cessera si l'on considère en même temps un second cône circulaire droit dont

SA′ sera l'axe,
S le centre,
β' l'angle au centre,
et SB la génératrice.

En effet, si l'on fait coïncider les deux génératrices, ainsi que les plans des angles β et β', les convexités des surfaces ayant d'ailleurs lieu dans le même sens; et si, par deux points quelconques m et m', on mène deux plans perpendiculaires à SB, on aura

$$\frac{m'o'}{m'i'} = \frac{mo}{mi},$$

ce qui nous dit déjà que, quel que soit le point m' de SB, par lequel on mène le plan perpendiculaire, le rapport des courbures des surfaces des deux cônes sera *constant*.

Si l'on fait ensuite

$$\beta' = \tfrac{1}{2}\pi,$$

auquel cas le cône dont la courbure sera prise pour unité aura un angle au centre égal à un droit; et

$$\mathrm{S}m' = 1,$$

ce qui donnera

$$m'i' = 1,$$

il viendra

$$\frac{mo}{mi} = \frac{m'o'}{m'i'} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta}{1},$$

d'où

$$m'o' = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta,$$

ce qui donnera, pour la courbure absolue du cône SA,

$$\frac{1}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta}.$$

Ainsi, *tang $\frac{1}{2}\beta$ sera le rayon de courbure absolue de la surface des tangentes.*

Remarque. Si, au lieu de mesurer cette seconde courbure par le rapport $\frac{1}{\left(\frac{m'o'}{m'i'}\right)}$, qui la rend *constante* pour un même angle au centre β, on la mesurait au moyen du rapport

$$\frac{1}{\left(\frac{ds}{dt'}\right)} = \frac{1}{\rho \operatorname{tang} \frac{1}{2}\beta},$$

cette expression *variant* avec le rayon ρ, pour un même angle β, et pouvant *ne pas varier* pour un angle différent de β, ne permettrait pas de comparer entre elles les secondes courbures de la proposée.

Arrivons maintenant à notre objet.

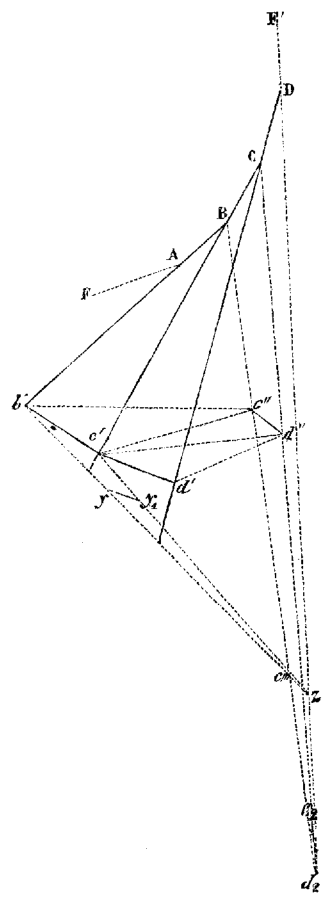


Fig. 2.

Soient :

F...ABCD...F′	la courbe proposée,
Bb', Cc', Dd',...	ses tangentes,
et Bc_2, Cc_2,...	les axes de ses cônes osculateurs.

I.

On a vu, dans notre première Note, *que le lieu géométrique des axes des cônes osculateurs de la courbe* FF′ *était celui des centres de courbure de tous les points de la surface des tangentes.*

II.

La surface des axes des cônes osculateurs de la courbe FF′ étant formée par les intersections de plans perpendiculaires aux normales principales, ou, ce qui est la même chose, à la fois tangents à cette courbe et perpendiculaires à ses plans osculateurs, est *une surface développable.*

III.

Soit $b'c'd'$... une développante de la proposée dans laquelle

$$b'c' = ds_1 = sdt,$$

s étant l'arc Bb' développé.

Les plans normaux-tangents $b'Bc_2$, $c'Bc_2$ à la courbe FF′ seront les plans normaux de la développante $b'c'd'$..., et, par conséquent, *la surface des axes des cônes osculateurs de* FF′ *sera la surface de toutes les développées de cette développante.*

Ainsi, *la courbe* FF′, *qui est une de ces développées, se transformera en une* LIGNE DROITE *lorsque l'on rabattra, dans un plan, la surface des axes de ses cônes osculateurs.*

On vérifie facilement cette proposition par l'analyse suivante :

La développante $b'c'd'$... a son plan osculateur $b'c''c'$ perpendiculaire à l'intersection Bc'' de ses deux plans normaux consécutifs.

Son angle de contingence sera donc

$$(3) \qquad b'c''c' = \frac{dt}{\sin\frac{1}{2}\beta} = dt_1;$$

son angle conique sera

$$(4) \qquad c''c'd'' = d\tfrac{1}{2}\beta = dt'_1,$$

et ses deux équations de courbure seront

$$(5) \qquad \rho_1 dt_1 = ds_1,$$

$$(6) \qquad dt_1 = dt'_1 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta_1,$$

en désignant par β_1 l'angle au centre de son cône osculateur.

La dernière est indépendante de l'arc s développé.

La figure donne

$$b'c'' = \rho_1 = s\sin\tfrac{1}{2}\beta,$$

ce qui s'accorde avec l'équation (5).

Or, soit

$$\mathrm{BC}\,d_2 = \tfrac{1}{2}\beta,$$

on aura

$$c''c'd'' = \mathrm{B}c_2\mathrm{C} = \mathrm{C}d_2\mathrm{D} = d\tfrac{1}{2}\beta,$$

à un infiniment petit près du second ordre. D'ailleurs

$$d_2\mathrm{CD} = \pi - (\tfrac{1}{2}\beta - d\tfrac{1}{2}\beta) - d\tfrac{1}{2}\beta = \pi - \tfrac{1}{2}\beta,$$

d'où

$$\mathrm{BC}\,d_2 + d_2\mathrm{CD} = \pi. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarques. 1°. Soit PQR un des plans normaux de la courbe FF'. Si l'on rabat, dans ce plan, la surface des développées, en même temps que tous les plans normaux générateurs de cette surface, *chaque point de la courbe glissera le long de cette courbe qui se réduira au seul point* F *contenu dans le plan* PQR, *tandis que toutes les tangentes se confondront en une seule qui sera celle perpendiculaire au plan.*

2°. Or, si l'on applique cette remarque ainsi que la proposition précédente, à l'hélice, on arrivera à de curieux résultats.

En effet, soit a le rayon de courbure constant d'une hélice FF'.

La courbe des centres de cette hélice étant l'arête de rebroussement de sa surface polaire, et étant perpendiculaire au rayon a commun à l'hélice et à cette courbe, *deviendra*, dans le rabattement de la surface polaire, *un cercle de rayon* a, *ayant pour centre le point auquel l'hélice se sera réduite*.

Réciproquement, la surface des tangentes de l'hélice FF′ étant la polaire de sa ligne des centres, en rabattant cette surface dans un plan, *l'hélice se transformera en un cercle de rayon* a, *ayant pour centre le point auquel se sera réduite, dans le rabattement, la ligne des centres de l'hélice*. D'où l'on voit qu'une hélice quelconque peut toujours se transformer en

Un *point*,
Une *droite*,
Et un *cercle*.

3°. Les deux premières transformations ont lieu quelle que soit la courbe FF′. Elles ont lieu toutes les trois lorsque la courbe FF′ a un rayon de courbure constant.

IV.

Soit $c'''z\ldots$ une développée de la développante $b'c'd'\ldots$.

Son plan osculateur sera $b'c'''c'$.

Les plans $b'\mathrm{B}c'''$, $c'\mathrm{B}c'''$, normaux à la développante, étant à la fois des plans tangents à la développée $c'''z\ldots$ et perpendiculaires à ses deux plans osculateurs consécutifs, *leur intersection* $\mathrm{B}c'''$ *sera l'axe du cône osculateur de cette développée*.

Donc *la surface des axes des cônes osculateurs de la courbe* FF′ *sera encore la surface des axes des cônes osculateurs des développées de toutes ses développantes*.

V.

Il suit de là que *la surface des développées de la courbe* FF′ *est en même temps celle des axes des cônes osculateurs de toutes ces développées*.

Il suit aussi de ce qui a été dit § III, *remarque* 1°, que *si l'on* *développe la surface des développées, le point* F *de* FF′, *situé dans le plan développé, décrira, dans le développement, la courbe* FF′. *Le rayon de courbure, en chaque point, sera la perpendiculaire abaissée du point* F *sur l'arête de la surface polaire formant l'axe actuel du mouvement.*

Le point F étant arbitraire, on voit que *la surface des développées de* FF′ *appartient à une infinité de courbes décrites dans un même mouvement, ayant toutes leurs côtés parallèles chacun à chacun à ceux de* FF′; *et, par conséquent, leurs angles de contingence et coniques égaux chacun à chacun.*

L'arête de rebroussement de la surface polaire est le lieu des centres des sphères osculatrices de toutes ces courbes.

VI.

L'arête de rebroussement $c_2 d_2 e_2 \ldots$ de la surface des axes des cônes osculateurs, déterminée de position dans l'espace par la distance

$$Bc_2 = \frac{ds \sin\frac{1}{2}\beta}{d\frac{1}{2}\beta},$$

a pour équation de courbure conique

$$dt'_1 = dt_1 \cot\tfrac{1}{2}\beta_1. \tag{7}$$

On trouverait facilement qu'elle a pour équation de courbure circulaire

$$\rho_2\, dt'_1 = ds_2, \tag{8}$$

dans laquelle

$$\begin{aligned} ds_2 &= d(Bc_2) - ds \cos\tfrac{1}{2}\beta, \\ &= d\left(\frac{ds_1 \sin\frac{1}{2}\beta}{d\frac{1}{2}\beta}\right) - ds \cos\tfrac{1}{2}\beta. \end{aligned}$$

Cette arête est aussi le lieu des centres des sphères osculatrices de toutes les développantes, et de toutes les courbes telles que $yy_1 \ldots$ *menées parallèlement à une développante quelconque* $b'c'd' \ldots$

VII.

Une développée telle que $c''' z\ldots$ a une infinité de développantes telles que $yy_1,\ldots$, $b' c' d'\ldots$. Et, réciproquement, une courbe telle que $yy_1\ldots$ a une infinité de développées susceptibles d'être tracées sur la surface des axes des cônes osculateurs de la courbe FF′.

Il en est de même de toute développée tracée sur la surface polaire de la courbe FF′.

La courbe FF′ *jouit donc, à l'exclusion de toute autre, de la double propriété d'être à la fois* UNE DÉVELLOPPANTE COMMUNE *à une série de développées susceptibles d'être tracées sur la surface polaire, lesquelles sont ses propres développées, et* UNE DÉVELOPPÉE COMMUNE *à une série de développantes de développées susceptibles d'être tracées sur la surface des axes des cônes osculateurs de* FF′, *lesquelles développantes sont toutes celles de la proposée.*

Dans un prochain article, nous nous proposerons de faire voir que :

1°. *La surface des axes des cônes osculateurs d'une courbe quelconque* FF′ *a tous ses plans générateurs communs avec les plans tangents aux deux infinis, à toutes les surfaces gauches formées par les perpendiculaires élevées de tous les points de ses développantes sur les plans osculateurs de toutes ces courbes; ce qui rend la surface des axes des cônes osculateurs de* FF′ ASYMPTOTIQUE *de toutes ces surfaces gauches; et chacune de ces dernières asymptotique de toutes les autres.*

Cette propriété appartient à la surface polaire de la courbe FF′, *laquelle est* ASYMPTOTIQUE *de la surface gauche formée par les normales élevées en chaque point de cette courbe sur son plan osculateur.*

2°. *La surface développable formée par des plans menés par les différents points de la courbe* FF′, *et perpendiculairement aux axes des cônes osculateurs, est* ASYMPTOTIQUE *de la surface gauche formée par les normales principales de la courbe* FF′.

Cette surface développable est d'ailleurs celle des intersections des plans de bases de toutes les hélices osculatrices de la proposée.

3°. *La surface des axes des cônes osculateurs de l'arête de rebroussement $c_2 d_2 e_2 \ldots$ de la surface des axes des cônes osculateurs de la proposée,* EMBRASSE, *dans toute son étendue, la surface gauche formée par les normales principales de la courbe* FF', *et réciproquement, selon la ligne de striction de cette surface gauche, qui est le lieu des centres des cercles de bases de toutes les hélices osculatrices de la proposée* FF'.

Extrait d'une Lettre de M. Voizot à M. Liouville.

Châtillon-sur-Seine, le 24 mai 1852.

La Note que j'ai eu l'honneur de vous adresser en mai 1851 [*] se terminait par l'énoncé de quelques propositions sur de certaines surfaces gauches inhérentes à une courbe à double courbure. A cette époque, j'avais déjà constaté géométriquement l'existence de ce théorème :

Une surface gauche quelconque a pour surface asymptotique une surface développable formée par les intersections des plans menés par toutes les génératrices de la surface réglée, perpendiculairement aux lignes de plus courte distance correspondantes.

Dans un travail sur les surfaces en général, que je termine en ce moment, j'ai eu l'occasion de vérifier ce théorème par l'analyse, relativement à l'hyperboloïde de révolution à une seule nappe.

Soit

$$F = x^2 + y^2 - M^2 z^2 - N^2 = 0 \tag{1}$$

l'équation de cette surface, rapportée à trois axes rectangulaires, celui des z étant l'axe de révolution.

L'équation du plan passant par une génératrice quelconque, sur

---

[*] C'est la Note ci-dessus.

laquelle se trouve le point x, y, z, perpendiculairement à la plus courte distance entre cette génératrice et la suivante, sera

$$x' + ay' - \mathrm{M}^2 bz' = 0, \tag{2}$$

a et b étant des fonctions de x, y, z tirées de l'équation

$$\mathrm{F} = 0,$$

par le calcul différentiel.

Si l'on différentie l'équation (2) par rapport à a et à b, il viendra l'équation

$$y'\,da - \mathrm{M}^2 z'\,db = 0, \tag{3}$$

qui sera celle d'un plan coupant celui représenté par l'équation (2) selon une génératrice de la surface asymptotique cherchée.

En faisant les calculs indiqués par da et db, simplifiant au moyen de l'équation (1) et égalant à zéro les multiplicateurs de dx et de dy, on trouvera, ce que l'on pouvait prévoir, l'équation unique

$$y'b - z'a = 0. \tag{4}$$

Des considérations géométriques font voir que la génératrice du lieu cherché, représentée par les équations (2) et (4), a pour projection, dans le plan des x, y,

$$y' - ax' = 0. \tag{5}$$

Éliminant a et b entre les équations (2), (4) et (5), on aura, pour l'équation du lieu cherché,

$$x'^2 + y'^2 - \mathrm{M}^2 z'^2 = 0. \tag{6}$$

Or, cette équation étant celle du cône asymptotique de la surface

$$\mathrm{F} = 0,$$

il s'ensuit que le théorème avancé est vérifié sur l'hyperboloïde de révolution à une nappe.

Corollaire I. L'équation (6) étant indépendante de N, on en conclut que *tous les hyperboloïdes à une nappe que l'on obtient en donnant à* N *toutes les valeurs possibles sont asymptotiques l'un de l'autre, et qu'ils ont tous pour surface développable asymptotique* UNIQUE *le cône représenté par l'équation* (6).

Corollaire II. Une surface développable étant, en général, une surface gauche dont toutes les plus courtes distances sont nulles, et dont l'arête de rebroussement correspond à la ligne de striction, il s'ensuit que *la surface asymptotique d'une surface développable est cette surface elle-même.*