JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

POPOFF

Observations sur la théorie du son

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 15 (1850), p. 78-102.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1850_1_15__78_0>

OBSERVATIONS
SUR LA THÉORIE DU SON;

Par M. POPOFF,
Professeur à l'Université de Kazan.

§ I.

Réduction des équations générales du mouvement des fluides.

1. La théorie des forces moléculaires a conduit M. Poisson aux équations générales du mouvement des fluides. Pour établir ces équations, on calcule les pressions dans l'intérieur de la masse fluide, d'après les formules données pour les corps solides élastiques, en supposant que l'inégalité des pressions autour de chaque point n'est que momentanée. Dans les cas ordinaires de l'ondulation de fluide, on peut supposer la masse homogène et partout également échauffée et les variations de densité très-petites pendant le mouvement des molécules; en excluant, de plus, le cas des vibrations très-rapides, auxquelles on attribue les phénomènes de la lumière, on trouve [*]

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \rho\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)&=\frac{d\varpi}{dx}+\beta\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right),\\ \rho\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)&=\frac{d\varpi}{dy}+\beta\left(\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}\right),\\ \rho\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)&=\frac{d\varpi}{dz}+\beta\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{d^2w}{dy^2}+\frac{d^2w}{dz^2}\right);\end{aligned}\right.$$

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2}&=\frac{du}{dt}+u\frac{du}{dx}+v\frac{du}{dy}+w\frac{du}{dz},\\ \frac{d^2y}{dt^2}&=\frac{dv}{dt}+u\frac{dv}{dx}+v\frac{dv}{dy}+w\frac{dv}{dz},\\ \frac{d^2z}{dt^2}&=\frac{dw}{dt}+u\frac{dw}{dx}+v\frac{dw}{dy}+w\frac{dw}{dz};\end{aligned}\right.$$

$$(3)\qquad \frac{dx}{dt}=u,\quad \frac{dy}{dt}=v,\quad \frac{dz}{dt}=w;$$

[*] *Voyez* le *Journal de l'École Polytechnique,* xx^e cahier.

$$\varpi = p + h\left(\frac{dp}{dt} + u\frac{dp}{dx} + v\frac{dp}{dy} + w\frac{dp}{dz}\right); \tag{4}$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{d.\rho u}{dx} + \frac{d.\rho v}{dy} + \frac{d.\rho w}{dz} = 0. \tag{5}$$

Toutes les dérivées, dans les équations (1), (2), (4), (5), sont partielles et prises par rapport aux variables qui sont écrites au dénominateur; x, y, z sont les coordonnées rectangulaires d'une particule du fluide en mouvement; u, v, w les vitesses suivant la direction des axes des coordonnées, au bout du temps t; X, Y, Z les composantes parallèles aux mêmes axes de la force rapportée à l'unité de masse et agissant sur le point matériel (x, y, z); p la pression et ρ la densité au même point; β et h des constantes qui dépendent de la nature du fluide. On ajoute l'équation (5) comme une condition particulière qui exprime que la masse du fluide reste continue pendant le mouvement. Au lieu de l'équation (4), M. Poisson donne la suivante

$$\varpi = p - \alpha\frac{\mathrm{d}p}{dt} - 2\alpha\frac{k\,\mathrm{d}\rho}{\rho\,dt}, \tag*{[4]}$$

où les différentielles $\mathrm{d}p$, $\mathrm{d}\rho$ se rapportent à toutes les variables qui dépendent de t. Les valeurs des constantes α, k, β se déterminent au moyen des équations suivantes:

$$\alpha = \int_0^\infty \varphi t.dt, \quad \beta = \alpha(k + \mathrm{K}),$$

$$\mathrm{K} = p = \frac{1}{6\varepsilon^3}\sum rfr, \quad k = \frac{1}{30\varepsilon^3}\sum r^3\,\frac{d.\frac{1}{r}fr}{dr},$$

les sommes s'étendant à toutes les molécules qui entourent le point (x, y, z) et dont la position est déterminée par les coordonnées x', y', z' relatives à ce même point. La fonction φt est égale à l'unité pour $t = 0$, elle varie très-rapidement et devient nulle ou insensible pour les valeurs de t tant soit peu sensibles. La fonction fr représente la force moléculaire, ou l'action mutuelle des deux molécules M et M' situées à la distance r; cette fonction étant positive ou négative, selon que la force sera répulsive ou attractive et n'ayant d'ailleurs des valeurs sensibles que pour des valeurs insensibles de r. Enfin, on désigne par ε l'intervalle moyen des molécules autour du point M. Toutes ces quantités, aussi bien que les équations précédentes, se rapportent au temps t. Les quantités α, β, k devraient être regardées comme des fonctions de x, y, z, t; mais nous les supposerons constantes, vu que les dilatations ou les contractions du fluide et les vitesses des molécules sont très-petites. Les sommes désignées par k et K ne se réduisent pas à des intégrales, parce que la fonction fr, dans les limites de la sommation, peut changer plusieurs fois de signe. Nous ajouterons à cette remarque importante de M. Poisson, que pour les fluides aériformes, où la fonction fr représente constamment la force répulsive, la réduction des sommes précédentes à des intégrales est aussi inadmissible. Pour démontrer notre assertion, nous désignerons par θ l'angle que fait l'axe des z avec le rayon vecteur r mené du point (x, y, z), et par ψ l'angle de la projection de r sur le plan (x, y) avec l'axe des x, ce qui nous donnera

$$z' = r\cos\theta, \quad y' = r\sin\theta\sin\psi, \quad x' = r\sin\theta\cos\psi.$$

Décrivons maintenant du point M comme centre, et avec le rayon r, une surface sphérique, et partageons cette surface en un très-grand nombre de petits éléments ds, nous aurons

$$ds = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\psi.$$

En supposant que les sommes K et k soient réductibles à des intégrales, la fonction fr pour les molécules situées à la surface ds sera constante, et la valeur de la somme $\sum rfr$, étendue à toutes ces molécules, sera proportionnelle à leur nombre, c'est-à-dire à $\frac{ds}{\varepsilon^2}$. On trouve de cette manière

$$K = \frac{1}{6\varepsilon^6}\int_0^\infty dr . \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^3 fr \sin\theta\, d\theta\, d\psi = \frac{2\pi}{3\varepsilon^6}\int_0^\infty r^3 fr\, dr,$$

$$k = \frac{1}{30\varepsilon^6}\int_0^\infty dr . \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^5 \frac{d\left(\frac{1}{r} fr\right)}{dr} \sin\theta\, d\theta\, d\psi = \frac{2\pi}{15\varepsilon^6}\int_0^\infty r^5 d . \frac{1}{r} fr,$$

d'où l'on tire

$$k = -K,$$

et, par suite,

$$\beta = 0.$$

La réduction des sommes K et k à des intégrales fait donc disparaître les termes essentiels dans les équations (1). Pour montrer maintenant l'identité des équations (4) et [4], nous observons d'abord que la fonction φt et la quantité α dans tous les cas peuvent être supposées positives, de sorte qu'il est superflu d'attribuer à la fonction φt la généralité des valeurs que M. Poisson lui suppose. (*Journal de l'École Polytechnique,* XX^e cahier, page 148.) De plus, pour les liquides, M. Poisson trouve (Mémoire déjà cité, page 159)

$$\frac{k\,d\rho}{\rho\,dt} = -\frac{3}{5}\frac{dp}{dt},$$

et, par suite, l'équation [4] revient à

$$\varpi = p + \frac{\alpha}{5}\frac{dp}{dt},$$

ce qui est identique avec l'équation (4), en y supposant h essentiellement positive.

Pour les fluides aériformes, il existe l'équation

$$\frac{d\rho}{\rho\,dt} = \gamma\frac{dp}{p\,dt}, \tag{6}$$

où γ désigne le rapport de la chaleur spécifique sous une pression constante, à la chaleur spécifique sous un volume constant; par suite, l'équation [4] revient à

$$\varpi = p - \alpha\frac{dp}{dt}\left(1 + \frac{2\gamma.k}{p}\right),$$

ce qui est de nouveau identique avec l'équation (4), en y supposant

$$h = -\alpha\left(1 + \frac{2\gamma.k}{p}\right).$$

Mais à présent il n'est pas facile de voir si la constante h est positive ou négative.

A la vérité, des expressions pour k et K l'on tire

$$k = -\frac{1}{5}p + \frac{1}{30\,\varepsilon^3}\sum r^2 f'(r),$$

et, par suite,

$$\left(1 + \frac{2\gamma.k}{p}\right) = 1 - \frac{2}{5}\gamma\left[1 - \frac{\sum r^2 f'(r)}{\sum rfr}\right].$$

La condition de h positive se réduit donc à

$$1 - \frac{\sum r^2 f'(r)}{\sum rfr} > \frac{5}{2\gamma},$$

ce qui est très-difficile à résoudre sans connaître la forme de la fonction fr. Néanmoins, si la réduction des sommes k et K à des intégrales peut être admise pour les corps aériformes comme première approximation, on aura aussi

$$k = -K = -p,$$

et, par suite,

$$h > 0.$$

2. Pour intégrer les équations (1), (2), (3), (4), (5), il faut établir une relation entre la densité et la pression. En raisonnant sur cette relation, on observe une différence essentielle entre le cas du mouvement des corps solides et celui des corps fluides. Pour les corps solides élastiques, la position de chaque point matériel pendant le mouvement est toujours déterminée en fonction des coordonnées initiales de ce point; pour les fluides, cet expédient ne présenterait pas le même avantage, puisque dans le mouvement de ces corps l'arrangement des particules autour de chaque point change avec sa position dans l'espace. Ainsi les quantités p et ρ doivent être exprimées en fonctions des coordonnées du point de l'espace où la particule arrive au bout du temps t; de sorte que ces fonctions contiendront en partie les expressions de p et ρ, qui appartient à ce point pendant l'équilibre du fluide. Pour des températures assez éloignées de l'ébullition et de la congélation, on admet la compression des liquides proportionnelle à l'accroissement de pression. Pour les corps aériformes, du moins pour les pressions possibles à l'air libre, cette loi est bien démontrée: on peut donc poser, en général, pour un fluide en équilibre,

$$d\rho' = \eta\, dp', \tag{7}$$

où ρ' désigne la densité du fluide et p' la pression correspondante; la constante η est la compression produite par une atmosphère. D'un autre côté, en faisant, dans les équations (1),

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \frac{dp}{dt} = 0,$$

on obtient, pour l'état d'équilibre,

$$\rho' X = \frac{dp'}{dx}, \quad \rho' Y = \frac{dp'}{dy}, \quad \rho' Z = \frac{dp'}{dz}.$$

Ces conditions étant combinées avec l'équation (7) donneront

(8) $$\rho' = D e^{\eta\zeta},$$

(9) $$p' = \frac{D}{\eta} e^{\eta\zeta} + H,$$

où

$$\zeta = \int (X dx + Y dy + Z dz)$$

D est la densité du fluide pour $\zeta = 0$, e la base des logarithmes népériens, H la constante introduite par l'intégration. En ne considérant que le mouvement ondulatoire où les molécules d'un fluide s'écartent très-peu de leur position d'équilibre, il suffit de supposer

(10) $$\rho = \rho'(1 - s),$$

s désignant une fonction de x, y, z, t inconnue, mais dont la valeur est toujours très-petite. En même temps, on peut admettre

(11) $$p = p' - \frac{\lambda}{\eta} \rho' s,$$

où λ est une constante. Cette équation suppose la variation de l'élasticité au point (x, y, z) proportionnelle à la compression ou à la dilatation au même point. Nous exprimons cette proportionnalité par $\frac{\lambda}{\eta}$ et non par $\frac{1}{\eta}$, comme cela a été fait dans l'équation (7). Pour justifier l'expression (11), il suffit de remarquer qu'elle résulte de l'équation (6), qui est vraie même pour des variations très-rapides de la densité, et qui nous donne

$$\rho = \left(\frac{p}{A}\right)^{\gamma},$$

A étant la constante de l'intégration. En y substituant l'expression de ρ donnée par l'équation (10) et négligeant les termes proportionnels au carré et aux puissances supérieures de s, on aura

$$p = (\rho')^{\frac{1}{\gamma} - 1} \left(A\rho' - \frac{A}{\gamma} \rho' s\right).$$

Le coefficient $(\rho')^{\frac{1}{\gamma} - 1}$, ou, ce qui est la même chose, $e^{\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)\eta\zeta}$, peut être regardé comme une quantité constante; par suite, on retombera sur l'équation (11).

3. Dans la théorie de l'ondulation des liquides et des fluides aériformes, on suppose ordinairement les vitesses u, v, w et leurs dérivées partielles très-petites, et c'est pourquoi on néglige les carrés et les produits de ces quantités. Admettant cette supposition et substituant dans les équations (1), (4), (5) les valeurs de ρ et p données par les équations (10) et (11), on aura

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= \frac{\lambda}{\eta}\left(\frac{ds}{dx} + h\frac{d\cdot\frac{ds}{dx}}{dt}\right) - sX + \lambda X\left(s + h\frac{ds}{dt}\right) \\
&\qquad - \frac{\beta}{\rho'}\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right), \\
\frac{dv}{dt} &= \frac{\lambda}{\eta}\left(\frac{ds}{dy} + h\frac{d\cdot\frac{ds}{dy}}{dt}\right) - sY + \lambda Y\left(s + h\frac{ds}{dt}\right) \\
&\qquad - \frac{\beta}{\rho'}\left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}\right), \\
\frac{dw}{dt} &= \frac{\lambda}{\eta}\left(\frac{ds}{dz} + h\frac{d\cdot\frac{ds}{dz}}{dt}\right) - sZ + \lambda Z\left(s + h\frac{ds}{dt}\right) \\
&\qquad - \frac{\beta}{\rho'}\left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2}\right);
\end{aligned}\right.$$

$$(13)\qquad \frac{ds}{dt} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} + \eta(uX + vY + wZ),$$

où l'on peut considérer la quantité ρ' comme constante. Dans les cas ordinaires de la théorie des ondes, il suffit de supposer

$$X = 0,\quad Y = 0,\quad Z = g,$$

en désignant par g l'intensité de la pesanteur qui agit dans la direction de l'axe positif des Z. Si l'on rejette les termes proportionnels à la quantité β et qu'on remplace la fonction s par une autre fonction φ, telle que

$$(14)\qquad s = \varphi e^{-g\eta z},$$

on aura, au lieu des équations (12) et (13), les suivantes :

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\lambda}{\eta}\left(\frac{d\varphi}{dx} + h\frac{d\cdot\frac{d\varphi}{dx}}{dt}\right)e^{-g\eta z},\\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\lambda}{\eta}\left(\frac{d\varphi}{dy} + h\frac{d\cdot\frac{d\varphi}{dy}}{dt}\right)e^{-g\eta z},\\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\lambda}{\eta}\left(\frac{d\varphi}{dz} + h\frac{d\cdot\frac{d\varphi}{dz}}{dt}\right)e^{-g\eta z} - g\varphi e^{-g\eta z}; \end{aligned}\right.$$

$$(16)\quad \frac{d\varphi}{dt} = e^{g\eta z}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} + \eta g w\right).$$

Enfin, si l'on différentie les équations (15) et (16) par rapport à x, y, z, t, et qu'on les ajoute, il en résultera

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + g\frac{d\varphi}{dz} &= \frac{\lambda}{\eta}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right)\\ &+ \frac{h\lambda}{\eta}\left(\frac{d\cdot\frac{d^2\varphi}{dx^2}}{dt} + \frac{d\cdot\frac{d^2\varphi}{dy^2}}{dt} + \frac{d\cdot\frac{d^2\varphi}{dz^2}}{dt}\right), \end{aligned}\right.$$

et, au lieu des équations (10) et (11), on aura

$$\rho = \rho' - \Delta, \quad p = p' - \frac{\lambda}{\eta}\Delta,$$

où l'on fait

$$\Delta = \rho'\varphi e^{-g\eta z}.$$

§ II.

Sur la propagation des ondes dans une atmosphère indéfinie.

1. Dans ce paragraphe, nous supposerons les forces X, Y, Z égales à zéro, afin que la densité du fluide dans son état d'équilibre soit constante. De plus, nous négligerons, dans les équations (12), les termes proportionnels à la quantité β, soit qu'on supposera les différences $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$, etc., des quantités très-petites du second ordre, ou qu'on admettra par approximation $\beta = 0$. Il s'agit donc d'intégrer les

équations aux différences partielles

$$(a)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = n^2 \dfrac{ds}{dx} + \varkappa \dfrac{d.\dfrac{ds}{dx}}{dt}, \\[2ex] \dfrac{dv}{dt} = n^2 \dfrac{ds}{dy} + \varkappa \dfrac{d.\dfrac{ds}{dy}}{dt}; \\[2ex] \dfrac{dw}{dt} = n^2 \dfrac{ds}{dz} + \varkappa \dfrac{d.\dfrac{ds}{dz}}{dt}, \end{cases}$$

$$(b)\qquad \frac{ds}{dt} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz},$$

où l'on a fait

$$n^2 = \frac{\lambda}{\eta}, \qquad \varkappa = \frac{h\lambda}{\eta}.$$

Mais, par une combinaison toute simple des équations (a) et (b), on déduit encore celle-ci,

$$(1)\qquad \frac{d^2 s}{dt^2} = n^2 \left(\frac{d^2 s}{dx^2} + \frac{d^2 s}{dy^2} + \frac{d^2 s}{dz^2}\right) + \varkappa \left(\frac{d.\dfrac{d^2 s}{dx^2}}{dt} + \frac{d.\dfrac{d^2 s}{dy^2}}{dt} + \frac{d.\dfrac{d^2 s}{dz^2}}{dt}\right).$$

On n'a donc qu'à intégrer cette équation (1), et mettre ensuite la valeur trouvée de s dans les équations (a) pour déterminer, au moyen d'une intégration, les valeurs de u, v, w, de manière que leurs expressions deviennent des fonctions arbitraires pour $t = 0$:

$$(2)\qquad u_0 = \psi(x, y, z), \quad v_0 = \varphi(x, y, z), \quad w_0 = \chi(x, y, z).$$

Il faut y ajouter encore une quatrième fonction arbitraire pour exprimer la valeur de s, correspondante à $t = 0$, et que nous exprimerons ainsi :

$$(3)\qquad s_0 = \mathrm{F}(x, y, z).$$

Quant à la quantité $\frac{ds}{dt}$, pour $t = 0$, on a

$$(4)\qquad \left(\frac{ds}{dt}\right)_0 = \frac{du_0}{dx} + \frac{dv_0}{dy} + \frac{dw_0}{dz}.$$

On satisfait à l'équation (1) en posant

$$s = \sum (\mathrm{A}e^{\xi' t} + \mathrm{B}e^{\xi'' t}) \cos a(x - \alpha) \cos b(y - \beta) \cos c(z - \gamma),$$

$a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$, A, B étant des constantes arbitraires, dont les deux dernières peuvent être considérées comme des fonctions arbitraires des autres; ξ' et ξ'' sont les racines de l'équation

$$\xi^2 + (a^2 + b^2 + c^2)(\varkappa\xi + n^2) = 0.$$

Si l'on néglige le carré et les puissances supérieures de la quantité $\varkappa$, et que l'on pose

$$\mu^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

on aura

$$\xi' = -\frac{\varkappa\mu^2}{2} + n\mu\sqrt{-1},$$

$$\xi'' = -\frac{\varkappa\mu^2}{2} - n\mu\sqrt{-1};$$

par conséquent,

$$s = \sum e^{-\frac{1}{2}\varkappa\mu^2 t}(\mathrm{A}\cos n\mu t + \mathrm{B}\sin n\mu t)\,\mathrm{Q},$$

où l'on a fait

$$\mathrm{Q} = \cos a(x-\alpha)\cos b(y-\beta)\cos c(z-\gamma),$$

et où l'on a écrit A et B au lieu de A + B et de $(\mathrm{A}-\mathrm{B})\sqrt{-1}$.

Les sommes se rapportent aux constantes arbitraires, et, pour une masse indéfinie, elles peuvent être remplacées par les intégrales

$$s = \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int e^{-\frac{1}{2}\varkappa\mu^2 t}(\mathrm{A}\cos n\mu t + \mathrm{B}\sin n\mu t)\,\mathrm{Q}\,\overset{\infty}{\underset{0}{da}}\,\overset{\infty}{\underset{0}{db}}\,\overset{\infty}{\underset{0}{dc}}\,\overset{+}{\underset{-}{d\alpha}}\,\overset{+}{\underset{-}{d\beta}}\,\overset{+}{\underset{-}{d\gamma}}.$$

Enfin, si l'on détermine A et B de manière à satisfaire aux équations (2), (3), (4), et qu'on écrive, pour abréger, un seul signe d'intégration, on aura

$$\begin{aligned}
s = {} & \frac{1}{\pi^3}\int \mathrm{F}(\alpha,\beta,\gamma)\,e^{-\frac{1}{2}\varkappa\mu^2 t}\left(\cos n\mu t + \frac{\varkappa\mu^2}{2}\,\frac{\sin n\mu t}{n\mu}\right)\mathrm{Q}\,\overset{\infty}{\underset{0}{da}}\,\overset{\infty}{\underset{0}{db}}\,\overset{\infty}{\underset{0}{dc}}\,\overset{+}{\underset{-}{d\alpha}}\,\overset{+}{\underset{-}{d\beta}}\,\overset{+}{\underset{-}{d\gamma}},\\
& + \frac{d}{dx}\int \frac{\psi(\alpha,\beta,\gamma)}{\pi^3}\,e^{-\frac{1}{2}\varkappa\mu^2 t}\,\frac{\sin n\mu t}{n\mu}\,\mathrm{Q}\,\overset{\infty}{\underset{0}{da}}\,\overset{\infty}{\underset{0}{db}}\,\overset{\infty}{\underset{0}{dc}}\,\overset{+}{\underset{-}{d\alpha}}\,\overset{+}{\underset{-}{d\beta}}\,\overset{+}{\underset{-}{d\gamma}},\\
& + \frac{d}{dy}\int \frac{\varphi(\alpha,\beta,\gamma)}{\pi^3}\,e^{-\frac{1}{2}\varkappa\mu^2 t}\,\frac{\sin n\mu t}{n\mu}\,\mathrm{Q}\,\overset{\infty}{\underset{0}{da}}\,\overset{\infty}{\underset{0}{db}}\,\overset{\infty}{\underset{0}{dc}}\,\overset{+}{\underset{-}{d\alpha}}\,\overset{+}{\underset{-}{d\beta}}\,\overset{+}{\underset{-}{d\gamma}},\\
& + \frac{d}{dz}\int \frac{\chi(\alpha,\beta,\gamma)}{\pi^3}\,e^{-\frac{1}{2}\varkappa\mu^2 t}\,\frac{\sin n\mu t}{n\mu}\,\mathrm{Q}\,\overset{\infty}{\underset{0}{da}}\,\overset{\infty}{\underset{0}{db}}\,\overset{\infty}{\underset{0}{dc}}\,\overset{+}{\underset{-}{d\alpha}}\,\overset{+}{\underset{-}{d\beta}}\,\overset{+}{\underset{-}{d\gamma}}.
\end{aligned}$$

2. Occupons-nous maintenant de la réduction de l'intégrale

$$\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \frac{\psi(\alpha,\beta,\gamma)}{\pi^3}\, e^{-\frac{1}{2}\varkappa\mu^2 t}\,\frac{\sin n\mu t}{n\mu}\cdot Q\, \underset{0}{\overset{\infty}{da}}\, \underset{0}{\overset{\infty}{db}}\, \underset{0}{\overset{\infty}{dc}}\, \underset{-}{\overset{+}{d\alpha}}\, \underset{-}{\overset{+}{d\beta}}\, \underset{-}{\overset{+}{d\gamma}} = X.$$

Les indéterminées a, b, c peuvent être regardées comme trois coordonnées indépendantes; en les changeant en trois autres, μ, θ, ω, telles, que $a = \mu\cos\theta$, $b = \mu\sin\theta\sin\omega$, $c = \mu\sin\theta\cos\omega$, nous aurons

$$X = \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \frac{\psi(a,\beta,\gamma)}{8\pi^3}\, e^{-\frac{1}{2}\varkappa\mu^2 t}\,\frac{\sin n\mu t}{n\mu}\cos\mu R\,\sin\theta\,\mu^2\, \underset{0}{\overset{\infty}{d\mu}}\, \underset{0}{\overset{\pi}{d\theta}}\, \underset{0}{\overset{2\pi}{d\omega}}\, \underset{-}{\overset{+}{d\alpha}}\, \underset{-}{\overset{+}{d\beta}}\, \underset{-}{\overset{+}{d\gamma}},$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$R = (x-\alpha)\cos\theta + (y-\beta)\sin\theta\sin\omega + (z-\gamma)\sin\theta\cos\omega.$$

Mais, d'après les formules connues, on a

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\cos\mu R\,\sin\theta\, d\theta\, d\omega = \frac{4\pi\sin\mu\rho}{\mu\rho},$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\varkappa\mu^2 t}\sin n\mu t\,\sin\mu\rho\, d\mu = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2\pi}{\varkappa t}}\cdot e^{-\frac{n^2 t}{2\varkappa}-\frac{\rho^2}{2\varkappa t}}\left(e^{\frac{\rho n}{\varkappa}} - e^{-\frac{\rho n}{\varkappa}}\right),$$

en posant, pour abréger, $\rho^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2$; par conséquent,

$$\text{(X)}\quad X = \frac{e^{-\frac{n^2 t}{2\varkappa}}}{4n\pi\sqrt{\pi}\sqrt{2\varkappa t}}\int\!\!\int\!\!\int \frac{\psi(\alpha,\beta,\gamma)}{\rho}\, e^{-\frac{\rho^2}{2\varkappa t}}\left(e^{\frac{\rho n}{\varkappa}} - e^{-\frac{\rho n}{\varkappa}}\right) d\alpha\, d\beta\, d\gamma.$$

Les termes qui contiennent les fonctions φ et χ admettent des réductions pareilles, de sorte que si l'on fait, pour abréger,

$$\text{(Y)}\quad Y = \frac{e^{-\frac{n^2 t}{2\varkappa}}}{4n\pi\sqrt{\pi}\sqrt{2\varkappa t}}\int\!\!\int\!\!\int \frac{\varphi(\alpha,\beta,\gamma)}{\rho}\, e^{-\frac{\rho^2}{2\varkappa t}}\left(e^{\frac{\rho n}{\varkappa}} - e^{-\frac{\rho n}{\varkappa}}\right) d\alpha\, d\beta\, d\gamma,$$

$$\text{(Z)}\quad Z = \frac{e^{-\frac{n^2 t}{2\varkappa}}}{4n\pi\sqrt{\pi}\sqrt{2\varkappa t}}\int\!\!\int\!\!\int \frac{\chi(\alpha,\beta,\gamma)}{\rho}\, e^{-\frac{\rho^2}{2\varkappa t}}\left(e^{\frac{\rho n}{\varkappa}} - e^{-\frac{\rho n}{\varkappa}}\right) d\alpha\, d\beta\, d\gamma,$$

$$\text{(T)}\quad T = \frac{e^{-\frac{n^2 t}{2\varkappa}}}{4n\pi\sqrt{\pi}\sqrt{2\varkappa t}}\int\!\!\int\!\!\int \frac{F(\alpha,\beta,\gamma)}{\rho}\, e^{-\frac{\rho^2}{2\varkappa t}}\left(e^{\frac{\rho n}{\varkappa}} - e^{-\frac{\rho n}{\varkappa}}\right) d\alpha\, d\beta\, d\gamma,$$

$$T' = \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \frac{F(\alpha,\beta,\gamma)}{\pi^3}\, e^{-\frac{1}{2}\varkappa\mu^2 t'}\,\frac{\sin n\mu t}{n\mu}\, Q\, da\, db\, dc\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma,$$

on aura

$$(s) \qquad s = \frac{dT}{dt} - 2\frac{dT'}{dt'} + \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz},$$

où l'on fera $t' = t$ après avoir exécuté la différentiation sur la fonction T'. Cette fonction T' donnera, après la réduction,

$$(\mathrm{T}') \quad \mathrm{T}' = \frac{e^{-\frac{n^2 t^2}{2\varkappa t'}}}{2n\pi\sqrt{\pi}\sqrt{2\varkappa t'}} \int\!\!\int\!\!\int \frac{\mathrm{F}(\alpha,\beta,\gamma)}{\rho} e^{-\frac{\rho^2}{2\varkappa t'}} \left(e^{\frac{n\rho t}{\varkappa t'}} - e^{-\frac{n\rho t}{\varkappa t'}}\right) d\alpha\, d\beta\, d\gamma.$$

en observant que

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\varkappa\mu^2 t'} \sin n\mu t \sin \mu\rho\, d\mu = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2\pi}{\varkappa t'}}\, e^{-\frac{n^2 t^2}{2\varkappa t'} - \frac{\rho^2}{2\varkappa t'}} \left(e^{\frac{n\rho t}{\varkappa t'}} - e^{-\frac{n\rho t'}{\varkappa t'}}\right).$$

Si les fonctions $\mathrm{F}(x,y,z)$, $\psi(x,y,z)$, $\chi(x,y,z)$ sont développables en série de Taylor, il est facile de réduire les expressions de X, Y, Z, T aux intégrales doubles. Nous allons exécuter les calculs pour la fonction T. En posant

$$\alpha = x + \rho\cos p, \quad \beta = y + \rho \sin p \sin q, \quad \gamma = z + \rho \sin p \cos q;$$

on aura

$$d\alpha\, d\beta\, d\gamma = \rho^2 \sin p\, d\rho\, dp\, dq,$$

$$\mathrm{T} = \frac{e^{-\frac{n^2 t}{2\varkappa}}}{4n\pi\sqrt{\pi}\sqrt{2\varkappa t}} \int\!\!\int\!\!\int \mathrm{F}(x+\rho\cos p,\ y+\rho\sin p\sin q,\ z+\rho\sin p\cos q)\, e^{-\frac{\rho^2}{2\varkappa t}} \left(e^{\frac{\rho n}{\varkappa}} - e^{-\frac{\rho n}{\varkappa}}\right) \rho \sin p \, d\rho_0^{\infty}\, dp_0^{\pi}\, dq_0^{2\pi}.$$

La fonction sous le signe d'intégration est formée de deux termes différents T_1 et T_2, dont le premier contient la fonction exponentielle $e^{\frac{\rho n}{\varkappa}}$, et le second la fonction $e^{-\frac{\rho n}{\varkappa}}$, de sorte que

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2.$$

En posant pour le premier terme,

$$\rho = nt + \omega\sqrt{2\varkappa t},$$

ce qui donnera

$$\omega = -a \text{ pour } \rho = 0, \quad a = \frac{nt}{\sqrt{2\varkappa t}};$$

$$\omega = \infty \quad \text{pour } \rho = \infty,$$

nous aurons

$$\mathrm{T}_1 = \frac{1}{4n\pi\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\omega^2} \rho\, d\omega \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi \sin p\, dp\, dq$$
$$- \frac{1}{4n\pi\sqrt{\pi}} \int_0^{-a} e^{-\omega^2} \rho\, d\omega \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi \sin p\, dp\, dq,$$

où l'on a fait

$$\Psi = \mathrm{F}(x + \rho \cos p, \quad y + \rho \sin p \sin q, \quad z + \rho \sin p \cos q).$$

Mais, en vertu des limites de l'intégration par rapport à p et q, on peut, dans la fonction Ψ, poser $-\rho$ au lieu de ρ; après quoi l'expression de T_2 se déduira de T_1 par le changement de la limite $\omega = \infty$ en $\omega = -\infty$; par conséquent,

$$\mathrm{T}_2 = \frac{1}{4n\pi\sqrt{\pi}} \int_0^{-\infty} e^{-\omega^2} \rho\, d\omega \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi \sin p\, dp\, dq$$
$$- \frac{1}{4n\pi\sqrt{\pi}} \int_0^{-a} e^{-\omega^2} \rho\, d\omega \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi \sin p\, dp\, dq,$$

et, définitivement,

$$(5)\quad \mathrm{T} = \frac{1}{4n\pi\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2} \rho\, d\omega \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{F}(x + \rho \cos p,\ y + \rho \sin p \sin q,\ z + \rho \sin p \cos q) \sin p\, dp\, dq,$$

en faisant

$$\rho = nt + \omega\sqrt{2\varkappa t}.$$

Si l'on développe la fonction F en série de Taylor, suivant les puissances de la quantité $\omega\sqrt{2\varkappa t}$, et qu'on pose, pour abréger,

$$\mathrm{L} = \mathrm{F}(x + nt \cos p, \quad y + nt \sin p \sin q, \quad z + nt \sin p \cos q),$$

on aura

$$(6)\ \mathrm{T} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} t \mathrm{L} \sin p\, dp\, dq + \frac{\varkappa}{8\pi n^2} \frac{d}{dt} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} t^2 \left(\frac{d\mathrm{L}}{dt}\right) \sin p\, dp\, dq,$$

en négligeant les termes proportionnels au carré de la quantité $\varkappa$, et en ayant égard aux formules

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2} \omega^{2n}\, d\omega = \frac{1.3.5..(2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2} \omega^{2n+1}\, d\omega = 0.$$

Les fonctions X, Y, Z admettent aussi une pareille réduction; T′ se déduit de T par le changement de $\varkappa$ en $\frac{\varkappa t'}{t}$, par conséquent,

$$(7)\quad \mathrm{T}' = \frac{1}{4n\pi\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2} \rho' d\omega \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{F}(x + \rho'\cos p,\ y + \rho'\sin p \sin q,\ z + \rho' \sin p \cos q) \sin p\, dp\, dq,$$

où

$$\rho' = nt + \omega\sqrt{2\varkappa t'}.$$

De plus, le développement de la fonction F suivant les puissances de $\omega\sqrt{2\varkappa t'}$, donnera

$$\mathrm{T}' = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} t\mathrm{L}\sin p\, dp\, dq + \frac{\varkappa t'}{8\pi n^2 t}\frac{d}{dt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} t^2\left(\frac{d\mathrm{L}}{dt}\right)\sin p\, dp\, dq\,;$$

par conséquent,

$$(8)\qquad \left(\frac{d\mathrm{T}'}{dt'}\right) = \frac{\varkappa}{8\pi n^2 t}\frac{d}{dt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} t^2\left(\frac{d\mathrm{L}}{dt}\right)\sin p\, dp\, dq.$$

3. Ainsi nous avons réduit les intégrales des équations (a) et (b) aux suivantes :

$$s = \frac{d\mathrm{T}}{dt} - 2\frac{d\mathrm{T}'}{dt'} + \frac{d\mathrm{X}}{dx} + \frac{d\mathrm{Y}}{dy} + \frac{d\mathrm{Z}}{dz},$$

$$u = \psi(x, y, z) + n^2\int_0^t \left(\frac{ds}{dx} + h\frac{d\cdot\frac{ds}{dx}}{dt}\right)dt,$$

$$v = \varphi(x, y, z) + n^2\int_0^t \left(\frac{ds}{dy} + h\frac{d\cdot\frac{ds}{dy}}{dt}\right)dt,$$

$$w = \chi(x, y, z) + n^2\int_0^t \left(\frac{ds}{dz} + h\frac{d\cdot\frac{ds}{dz}}{dt}\right)dt,$$

où les valeurs des X, Y, Z, T, T' sont données par les formules (X), (Y), (Z), (T), (T'). L'expression pour X, par exemple, sera

$$\mathrm{X} = \frac{e^{-\frac{n^2 t}{2\varkappa}}}{4n\pi\sqrt{\pi}\sqrt{2\varkappa t}}\int\int\int \frac{\psi(\alpha,\beta,\gamma)}{\rho} e^{-\frac{\rho^2}{2\varkappa t}}\left(e^{\frac{\rho n}{\varkappa}} - e^{-\frac{\rho n}{\varkappa}}\right) d\alpha\, d\beta\, d\gamma,$$

en posant

$$\rho^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2,$$

ou, sous cette autre forme,

$$X = \frac{1}{4n\pi\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2} \rho\, d\omega \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x + \rho\cos p,\ y + \rho\sin p \sin q,\ z + \rho\sin p\cos q)\sin p\, dp\, dq,$$

en posant

$$\rho = nt + \omega\sqrt{2\varkappa t}.$$

De même, l'expression de T′ sera

$$T' = \frac{1}{4n\pi\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2} \rho\, d\omega \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} F(x + \rho'\cos p,\ y + \rho'\sin p \sin q,\ z + \rho'\sin p\cos q)\sin p\, dp\, dq,$$

où

$$\rho' = nt + \omega\sqrt{2\varkappa t'}.$$

Il est facile de vérifier que les expressions de s, u, v, w, pour $t = 0$, sont identiques avec les fonctions arbitraires données.

En faisant, en effet, $t = 0$, on aura $X = 0$,

$$\frac{dX}{dt} = \psi(x, y, z)$$

$$+ \frac{1}{8n\pi\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2} \omega \sqrt{\frac{2\varkappa}{t}}\, d\omega \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x + \rho\cos p,\ y + \rho\sin p\sin q,\ z + \rho\sin p\cos q)\sin p\, dp\, dq;$$

et si l'on remplace dans le dernier terme ω par $\omega\sqrt{t}$, on obtiendra

$$\frac{dX}{dt} = \psi(x, y, z).$$

On trouve de la même manière

$$\frac{dT'}{dt'} = 0, \quad \text{pour} \quad t = 0,$$

de sorte que les équations

$$s_0 = F(x, y, z), \quad u_0 = \psi(x, y, z), \quad v_0 = \varphi(x, y, z), \quad w_0 = \chi(x, y, z),$$

et les équations (4) sont satisfaites.

Les fonctions F, ψ, φ, χ peuvent être continues ou discontinues, mais elles restent finies pour des valeurs finies de x, y, z et s'anéantissent pour

$$x = \pm\infty, \quad y = \pm\infty, \quad z = \pm\infty.$$

Quand ces fonctions ne sont différentes de zéro que pour les valeurs très-petites des variables; alors, dans les expressions des X, Y, Z, T, T′ pour un point (x, y, z) très-éloigné de l'origine des coordonnées, on pourra poser

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

et, par suite,

$$X = \frac{B e^{-\frac{n^2 t}{2\varkappa} - \frac{r^2}{2\varkappa t}}}{\sqrt{t}}, \tag{9}$$

où B représente une fonction de x, y, z, qui ne dépend pas de t. On conclut de l'équation (9) que la fonction X varie, suivant la même loi, pour tous les points (x, y, z) qui sont également éloignés de l'origine des coordonnées, et qu'elle a des valeurs réelles pour tous les points de la masse indéfinie, quelque petit que soit t.

En observant que

$$\frac{dX}{dt} = \frac{X}{2\varkappa t^2}(r^2 - n^2 t^2 - \varkappa t),$$

nous aurons, pour déterminer le temps t correspondant à la valeur maximum de X,

$$n^2 t^2 + \varkappa t - r^2 = 0,$$

d'où l'on tire, en négligeant les quantités proportionnelles au carré de $\varkappa$,

$$r = nt + \frac{\varkappa}{2n}. \tag{10}$$

Les mêmes conclusions se rapportent aussi aux fonctions Y, Z. Observons encore qu'en posant $\rho = r$, et changeant t' en θ, on pourra écrire, au lieu de l'équation (T′), celle-ci :

$$T' = \frac{A e^{-\frac{\alpha}{\theta}}}{\sqrt{\theta}} - \frac{A e^{-\frac{\beta}{\theta}}}{\sqrt{\theta}},$$

où l'on a fait

$$\alpha = \frac{n^2 t^2}{2\varkappa} + \frac{r^2}{2\varkappa} - \frac{nrt}{\varkappa},$$

$$\beta = \frac{n^2 t^2}{2\varkappa} + \frac{r^2}{2\varkappa} + \frac{nrt}{\varkappa},$$

$$A = \int\int\int \frac{F(\alpha, \beta, \gamma)}{4n\pi\sqrt{2\varkappa\pi}} \cdot \frac{d\alpha\, d\beta\, d\gamma}{r}.$$

En différentiant cette formule, nous aurons

$$\frac{d\mathrm{T}'}{d\theta} = \frac{\mathrm{A}e^{-\frac{\alpha}{\theta}}}{\sqrt{\theta}}\left(\frac{\alpha}{\theta^2} - \frac{1}{2\theta}\right) - \frac{\mathrm{A}e^{-\frac{\beta}{\theta}}}{\sqrt{\theta}}\left(\frac{\beta}{\theta^2} - \frac{1}{2\theta}\right);$$

et si l'on fait $\theta = t$, comme l'exige l'équation (s), on a

$$\frac{d\mathrm{T}'}{d\theta} = \frac{\mathrm{A}\varepsilon}{2\varkappa t^2\sqrt{t}}(n^2t^2 + r^2 - \varkappa t)\,\psi r - \frac{\mathrm{A}\varepsilon}{\varkappa t\sqrt{t}}\cdot nr\varphi r,$$

en faisant, pour abréger,

$$\psi r = e^{\frac{nr}{\varkappa}} - e^{-\frac{nr}{\varkappa}}, \quad \varphi r = e^{\frac{nr}{\varkappa}} + e^{-\frac{nr}{\varkappa}}, \quad \varepsilon = e^{-\frac{n^2t}{2\varkappa} - \frac{r^2}{2\varkappa t}}.$$

En différentiant de nouveau par rapport à t, on a

$$\frac{d\frac{d\mathrm{T}'}{d\theta}}{dt} = \frac{\mathrm{A}\varepsilon}{2\varkappa t^3\sqrt{t}}\left[(n^2t^2 - r^2 + 3\varkappa t)\frac{nr}{\varkappa}\varphi r + (n^2t^2 - r^2)\,\psi r - \psi r(n^2t^2 - r^2 + 3\varkappa t)\frac{n^2t^2 + r^2 - \varkappa t}{2\varkappa t}\right].$$

Mais la différentiation immédiate nous donnera aussi

$$\frac{d^2\mathrm{T}}{dt^2} = \frac{\mathrm{A}\varepsilon}{2\varkappa t^3\sqrt{t}}\left[\psi r\,(n^2t^2 - r^2 + 3\varkappa t)\left(\frac{n^2t^2 - r^2 + \varkappa t}{2\varkappa t}\right) - \psi r(n^2t^2 + r^2)\right];$$

par conséquent, la condition du maximum de la fonction

$$\frac{d\mathrm{T}}{dt} - 2\frac{d\mathrm{T}'}{dt'},$$

qui est égale à

$$\frac{\mathrm{A}\varepsilon\psi r}{2\varkappa t^2\sqrt{t}}\left(\varkappa t - 3n^2t^2 - r^2 + 4nt\frac{r\varphi r}{\psi r}\right),$$

sera

$$\left(r^2 - 4nt\frac{r\varphi r}{\psi r} + 3n^2t^2 - \varkappa t\right)(n^2t^2 - r^2 + 3\varkappa t) + 2\varkappa t(r^2 - 3n^2t^2) = 0.$$

Pour $\varkappa = 0$, cette équation donnera deux racines positives $r = nt$ et $r = 3nt$. Ayant admis la première de ces racines, nous poserons, pour la seconde approximation,

$$r = nt - \frac{\varkappa}{2nt};$$

et, en observant que

$$\frac{\psi r}{\varphi r} = 4\varkappa \cdot \int_0^\infty \frac{\sin(2nr\theta)d\theta}{e^{\pi\varkappa\theta} - e^{-\pi\varkappa\theta}},$$

ou, si l'on néglige les termes proportionnels à $\varkappa^2$,

$$\frac{\psi r}{\varphi r} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin(2nru)}{u}\,du = 1,$$

on aura

$$\left(\frac{\alpha^2}{4n^2t^2} - 3\varkappa t\right)^2 - \alpha^2 + 2\varkappa t . 2n^2t^2 - 6\varkappa^2 t^2 = 0;$$

par suite, la relation définitive entre r et t sera

$$(11) \qquad r = nt \pm \sqrt{\varkappa t},$$

en négligeant les termes très-petits du second ordre. Nous ne discuterons pas l'autre racine de l'équation précédente, parce que l'expérience n'a pas prouvé, jusqu'à présent, l'existence d'une onde sonore douée de la vitesse $3n$. Il est donc démontré, par l'analyse précédente, que, dans une atmosphère élastique et indéfinie, le mouvement ondulatoire commence aussitôt pour tous les points de la masse, quelque petit que soit le rayon de l'onde initiale. Mais la variation de la densité et les vitesses, étant insensibles en dehors de l'onde initiale pour les premiers instants du mouvement, acquièrent des valeurs *maxima* après un intervalle déterminé du temps, et s'annulent peu à peu après cette époque. La propagation de l'onde douée de la plus grande variation de densité dépend des causes initiales d'ébranlement. Si les vitesses initiales sont communiquées immédiatement à quelques molécules du milieu, sans que la densité de ce milieu ait subi une variation quelconque, l'expression de s ne renfermera que les fonctions X, Y, Z. Dans ce cas, la propagation de l'onde sera uniforme, mais l'expression de l'espace parcouru contiendra un terme constant et proportionnel à la quantité $\varkappa$, qui, étant déterminée par l'expérience, donnera la valeur de la constante h introduite dans les équations générales (a) et (b). Si l'ondulation est produite par une variation de la densité dans quelques endroits de l'atmosphère, et si les vitesses initiales des molécules sont nulles, il y aura deux ondes à *maximum* de la variation de densité : la première se propagera avec une vitesse qui croît proportionnellement à la racine carrée du temps; la seconde se propagera avec une vitesse décroissante dans la même raison, de sorte qu'au bout du temps t ces deux ondes s'éloigneront à la distance $2\sqrt{\varkappa t}$. Mais cette distance, aussi bien que la valeur de la fonction même

$$\frac{d\mathrm{T}}{dt} - 2\frac{d\mathrm{T}'}{dt'},$$

diminuent indéfiniment avec la quantité $\varkappa$, et deviennent égales à zéro pour $\varkappa = 0$. Donc, pour les points qui sont très-éloignés de l'onde initiale, la fonction $\mathrm{F}(x, y, z)$ ne contribue pour rien à la variation de la densité; de sorte qu'il restera

$$s = \frac{d\mathrm{X}}{dx} + \frac{d\mathrm{Y}}{dy} + \frac{d\mathrm{Z}}{dz}.$$

Nous avons vu que les fonctions X, Y, Z, T, T' s'expriment par des intégrales définies triples. Le même nombre de signes intégrals entrera dans l'expression de s, tandis que u, v, w s'exprimeront par des intégrales quadruples.

En supposant $\varkappa = 0$, on obtiendra

$$u = \psi(x, y, z) + n^2 \int_0^t \frac{ds}{dx}\,dt,$$

$$v = \varphi(x, y, z) + n^2 \int_0^t \frac{ds}{dy}\,dt,$$

$$w = \chi(x, y, z) + n^2 \int_0^t \frac{ds}{dz}\,dt;$$

$$s = \frac{d.}{dt}\,\frac{1}{4\pi}\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathrm{F}(x + nt\cos p,\ \ y + nt\sin p \sin q,\ \ z + nt\sin p\cos q)\, t\sin p\, dp\, dq$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Psi(x + nt\cos p,\ \ y + nt\sin p\sin q,\ \ z + nt\sin p\cos q)\, t\sin p\, dp\, dq,$$

où, en place de

$$\frac{d\psi(x, y, z)}{dx} + \frac{d\varphi(x, y, z)}{dy} + \frac{d\chi(x, y, z)}{dz},$$

on a écrit, pour abréger, $\Psi(x, y, z)$. Ces équations sont identiques avec celles que M. Poisson a données dans les *Mémoires de l'Institut* (tome X).

4. La supposition $\rho = r$, que nous avons admise pour simplifier les expressions de X, Y, Z, T, T', réduit l'onde initiale à une sphère très-petite, ou, pour ainsi dire, à un point; c'est par cette raison que les termes dépendants des dimensions de l'onde initiale ne sont pas entrés dans les équations (10) et (11). Pour conserver ces termes, il faut transformer les expressions citées de X, Y, Z, T, T' de manière que la position de l'onde initiale soit déterminée relativement au point (x, y, z). Transportons l'origine des coordonnées dans ce point et remplaçons les coordonnées rectilignes par les coordonnées polaires, en posant

$$\alpha = x + \rho\cos p,$$
$$\beta = y + \rho\sin p\sin q,$$
$$\gamma = z + \rho\sin p\cos q,$$

où p désigne l'angle que fait l'axe des x avec la ligne ρ menée du point (x, y, z) au point (α, β, γ), q est l'angle formé par la projection de ρ sur le plan (yz) avec l'axe des z. Passons à un autre système d'axes rectangulaires, et désignons par a, a_1, a_2 les cosinus des angles que le nouvel axe des x fait avec les axes initiaux; b, b_1, b_2 et c, c_1, c_2 ont des valeurs correspondantes pour les nouveaux axes des y et des z; soient de même p' et q' les nouveaux angles polaires, on aura

$$\cos p = a\cos p' + b\sin p'\sin q' + c\sin p'\cos q',$$
$$\sin p\sin q = a_1\cos p' + b_1\sin p'\sin q' + c_1\sin p'\cos q',$$
$$\sin p\cos q = a_2\cos p' + b_2\sin p'\sin q' + c_2\sin p'\cos q',$$
$$d\alpha\, d\beta\, d\gamma = \rho^2\sin p'\, dp'\, dq'\, d\rho.$$

L'intégrale X prendra la forme suivante :

$$X = \frac{e^{-\frac{n^2 t}{2\varkappa}}}{4n\pi\sqrt{\pi}\sqrt{2\varkappa t}}\int_{r_1}^{r_2} e^{-\frac{\rho^2}{2\varkappa t}}\left(e^{\frac{\rho n}{\varkappa}} - e^{-\frac{\rho n}{\varkappa}}\right)\rho\, d\rho\int_0^{2\pi} dq'\int_0^{\sigma}\varphi(x+\rho\cos p,\ y+\rho\sin p\sin q,\ z+\rho\sin p\cos q)\sin p'\, dp',$$

où σ désigne la plus grande valeur de p'; r_1 et r_2 sont la plus grande et la plus petite valeurs de ρ, pour lesquelles la fonction φ n'est pas nulle. La fonction $e^{-\frac{\rho^2}{2\varkappa t}}.\,\rho$ ne change pas de signe entre les limites d'intégration, par conséquent,

$$\mathrm{X} = \frac{\mathrm{M} e^{-\frac{n^2 t}{2\varkappa}}}{\sqrt{t}} \int_{r_1}^{r_2} e^{-\frac{\rho^2}{2\varkappa t}} \rho \, d\rho,$$

où M représente la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{4 n \varkappa \sqrt{\pi}\sqrt{2\varkappa}} \int_0^{2\pi} dq' \int_0^{\pi} \left(e^{\frac{\rho n}{\varkappa}} - e^{-\frac{\rho n}{\varkappa}} \right) \varphi(x + \rho\cos p,\ y + \rho \sin p \sin q,\ z + \rho \sin p \cos q) \sin p' \, dp',$$

pour la valeur moyenne de ρ entre r_1 et r_2. De plus, comme

$$\int_{r_1}^{r_2} e^{-\frac{\rho^2}{2\varkappa t}} \rho \, d\rho = \varkappa t \left[e^{-\frac{r_1^2}{2\varkappa t}} - e^{-\frac{r_2^2}{2\varkappa t}} \right],$$

on aura l'équation

$$\text{(M)} \qquad \mathrm{X} = \varkappa \mathrm{M} \left[e^{-\frac{r_1^2}{2\varkappa t}} - e^{-\frac{r_2^2}{2\varkappa t}} \right] e^{-\frac{n^2 t}{2\varkappa}} \sqrt{t},$$

et sa différentielle

$$\frac{d\mathrm{X}}{dt} = \frac{\mathrm{M} e^{-\frac{n^2 t}{2\varkappa}}}{2t\sqrt{t}} \left[e^{-\frac{r_1^2}{2\varkappa t}} (r_1^2 - n^2 t^2 + \varkappa t) - e^{-\frac{r_2^2}{2\varkappa t}} (r_2^2 - n^2 t^2 + \varkappa t) \right],$$

d'où l'on tire, pour la valeur maximum de la fonction X, la condition suivante :

$$(12) \qquad e^{\frac{2\varepsilon r + \varepsilon^2}{2\varkappa t}} = 1 + \frac{2\varepsilon r_1 + \varepsilon^2}{r_1^2 - n^2 t^2 + \varkappa t},$$

où

$$r_2 = r_1 + \varepsilon,$$

ce qui est identique avec l'équation (10), si l'on néglige les quantités proportionnelles au carré de ε. En retenant les quatre premiers termes du développement de la fonction exponentielle dans l'équation précédente, et supprimant le signe de r_1, nous aurons

$$2\varkappa t = r^2 - n^2 t^2 + \varkappa t + \frac{2\varepsilon r + \varepsilon^2}{4\varkappa t}(r^2 - n^2 t^2 + \varkappa t) + \frac{2\varepsilon r + \varepsilon^2}{2\varkappa t}\left(\frac{r^2 - n^2 t^2 + \varkappa t}{6}\right):$$

et si, dans les termes ajoutés, on pose, par approximation,

$$r^2 = n^2 t^2 + \varkappa t,$$

on obtiendra

$$(\varepsilon) \qquad r = nt + \frac{\varkappa}{2n} - \frac{\varepsilon}{2} - \varepsilon^2\left(\frac{n}{6\varkappa} + \frac{1}{3nt}\right),$$

ce qui nous conduit de nouveau à un mouvement uniforme de l'onde, du moins pour des valeurs de t très-considérables. Si le nouvel axe des x passe par l'onde initiale, et si le point (x, y, z) est assez éloigné de cette onde, de sorte que l'angle σ reste toujours très-petit, on aura

$$\cos p = a, \quad \sin p \sin q = a_1, \quad \sin p \cos q = a_2;$$

et la valeur de l'intégrale M sera

$$\frac{\sigma^2}{4n\sqrt{2\varkappa\pi}}\left(e^{\frac{\rho n}{\varkappa}} e^{-\frac{\rho n}{\varkappa}}\right)\psi(x + a\rho, \quad y + a_1\rho, \quad z + a_2\rho).$$

La valeur de la fonction X est donc proportionnelle à σ^2, c'est-à-dire à la base du cône qui enveloppe l'onde initiale. Différentiant la fonction X deux fois de suite, nous aurons

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = \frac{\mathrm{M}\, e^{-\frac{n^2 t}{2\varkappa} - \frac{r_1^2}{2\varkappa t}}}{4\varkappa t^3\sqrt{t}}\left[(r_1^2 - n^2 t^2 + \varkappa t)^2 - 4\varkappa t(r_1^2 - n^2 t^2 + \varkappa t) + 2\varkappa t^2(\varkappa - 2n^2 t)\right],$$

$$- \frac{\mathrm{M}\, e^{-\frac{n^2 t}{2\varkappa} - \frac{r_2^2}{2\varkappa t}}}{4\varkappa t^3\sqrt{t}}\left[(r_2^2 - n^2 t^2 + \varkappa t)^2 - 4\varkappa t) r_2^2 - n^2 t^2 + \varkappa t) + 2\varkappa t^2(\varkappa - 2n^2 t)\right].$$

La condition pour le maximum et le minimum de X.

$$e^{-\frac{r_1^2}{2\varkappa t}}(r_1^2 - n^2 t^2 + \varkappa t) = e^{-\frac{r_2^2}{2\varkappa t}}(r_2^2 - n^2 t^2 + \varkappa t).$$

étant combinée avec l'inégalité

$$e^{-r_1^2} > e^{-r_2}$$

donne

$$r_1^2 - n^2 t^2 + \varkappa t < r_2^2 - n^2 t^2 + \varkappa t.$$

et, par suite,

$$\frac{d^2X}{dt^2} < 0;$$

d'où il résulte que la condition précédente se rapporte nécessairement au cas du *maximum*. Il nous resterait à trouver la condition du *maximum* de la fonction

$$\frac{dT}{dt} - 2\frac{d'T}{dt'},$$

en y conservant les termes proportionnels à ε et ε^2; mais cette discussion, il nous semble, serait trop longue pour avoir sa place ici.

§ III.

Réflexion du son sur le plan.

Lorsque l'atmosphère élastique est terminée d'un côté par un plan fixe, ce plan réfléchit l'onde sonore, de manière que la normale à la surface de l'onde, avant la réflexion, et la normale à la surface de cette onde, après la réflexion, font, avec le plan réfléchissant, deux angles égaux. Pour donner une démonstration générale de cette loi d'acoustique, prenons le plan réfléchissant pour le plan des coordonnées (xy); la condition que le mouvement normal à ce plan s'annule au contact avec lui sera

$$w = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{ds}{dz} = 0, \quad \text{pour} \quad z = 0.$$

L'expression de s ne changera pas de forme, et l'on aura

$$s = \frac{dT}{dt} - 2\frac{d'T}{dt'} + \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz};$$

mais, pour que les fonctions T, T', X, Y, Z satisfassent aux équations

$$\frac{d^2s}{dt^2} = n^2\left(\frac{d^2s}{dx^2} + \frac{d^2s}{dy^2} + \frac{d^2s}{dz^2}\right) + \varkappa\left(\frac{d.\frac{d^2s}{dx^2}}{dt} + \frac{d.\frac{d^2s}{dy^2}}{dt} + \frac{d.\frac{d^2s}{dz^2}}{dt}\right),$$

$$\frac{ds}{dz} = 0, \quad \text{pour} \quad z = 0,$$

et se convertissent en fonctions arbitraires qui sont données pour toutes les valeurs des variables, comprises entre $x = -\infty$, $y = -\infty$ et $x = \infty$, $y = \infty$, et seulement entre $z = 0$ et $z = \infty$, par les équations

$$s_0 = \mathrm{F}(x, y, z), \quad \mathrm{X}_0 = 0, \quad \mathrm{Y}_0 = 0, \quad \mathrm{Z}_0 = 0,$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)_0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathrm{X}}{dx} + \frac{d\mathrm{Y}}{dy} + \frac{d\mathrm{Z}}{dz}\right),$$

$$\left(\frac{d\mathrm{X}}{dt}\right)_0 = \psi(x, y, z), \quad \left(\frac{d\mathrm{Y}}{dt}\right)_0 = \varphi(x, y, z), \quad \left(\frac{d\mathrm{Z}}{dt}\right)_0 = \chi(x, y, z),$$

il faut supposer

$$\Gamma = \frac{2}{\pi^3}\int \mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma)\, e^{-\frac{1}{2}\kappa\mu^2 t}\,\frac{\sin n\mu t}{n\mu}\cos a(x-\alpha)\cos b(y-\beta)\cos cz\cos c\gamma \underset{0}{\overset{\infty}{da}}\,\underset{0}{\overset{\infty}{db}}\,\underset{0}{\overset{\infty}{dc}}\,\underset{-}{\overset{+}{d\alpha}}\,\underset{-}{\overset{+}{d\beta}}\,\underset{0}{\overset{+}{d\gamma}},$$

$$\Gamma' = \frac{2}{\pi^3}\int \mathrm{F}'(\alpha, \beta, \gamma)\, e^{-\frac{1}{2}\kappa\mu^2 t}\,\frac{\sin n\mu t}{n\mu}\cos a(x-\alpha)\cos b(y-\beta)\cos cz\cos c\gamma \underset{0}{\overset{\infty}{da}}\,\underset{0}{\overset{\infty}{db}}\,\underset{0}{\overset{\infty}{dc}}\,\underset{-}{\overset{+}{d\alpha}}\,\underset{-}{\overset{+}{d\beta}}\,\underset{0}{\overset{-}{d\gamma}},$$

$$\mathrm{X} = \frac{2}{\pi^3}\int \psi(\alpha, \beta, \gamma)\, e^{-\frac{1}{2}\kappa\mu^2 t}\,\frac{\sin n\mu t}{n\mu}\cos a(x-\alpha)\cos b(y-\beta)\cos cz\cos c\gamma \underset{0}{\overset{\infty}{da}}\,\underset{0}{\overset{\infty}{db}}\,\underset{0}{\overset{\infty}{dc}}\,\underset{-}{\overset{+}{d\alpha}}\,\underset{-}{\overset{+}{d\beta}}\,\underset{0}{\overset{-}{d\gamma}},$$

$$\mathrm{Y} = \frac{2}{\pi^3}\int \varphi(\alpha, \beta, \gamma)\, e^{-\frac{1}{2}\kappa\mu^2 t}\,\frac{\sin n\mu t}{n\mu}\cos a(x-\alpha)\cos b(y-\beta)\cos cz\cos c\gamma \underset{0}{\overset{\infty}{da}}\,\underset{0}{\overset{\infty}{db}}\,\underset{0}{\overset{\infty}{dc}}\,\underset{-}{\overset{+}{d\alpha}}\,\underset{-}{\overset{+}{d\beta}}\,\underset{0}{\overset{-}{d\gamma}},$$

$$\mathrm{Z} = \frac{2}{\pi^3}\int \chi(\alpha, \beta, \gamma)\, e^{-\frac{1}{2}\kappa\mu^2 t}\,\frac{\sin n\mu t}{n\mu}\cos a(x-\alpha)\cos b(y-\beta)\sin cz\sin c\gamma \underset{0}{\overset{\infty}{da}}\,\underset{0}{\overset{\infty}{db}}\,\underset{0}{\overset{\infty}{dc}}\,\underset{-}{\overset{+}{d\alpha}}\,\underset{-}{\overset{-}{d\beta}}\,\underset{0}{\overset{+}{d\gamma}},$$

où l'on a désigné, pour abréger, les limites arbitraires des α, β, γ par les signes $-$ et $+$.

En observant que

$$\cos cz\cos c\gamma = \frac{1}{2}\cos c(z-\gamma) + \frac{1}{2}\cos c(z+\gamma),$$

$$\sin cz\sin c\gamma = \frac{1}{2}\cos c(z-\gamma) - \frac{1}{2}\cos c(z+\gamma),$$

et faisant usage de l'analyse des paragraphes précédents, on aura

$$\Gamma = \frac{e^{-\frac{n^2 t}{2\kappa}}}{4n\pi\sqrt{\pi}\sqrt{2\kappa t}}\iiint \mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma)\left[e^{-\frac{\rho^2}{2\kappa t}}\left(\frac{e^{\frac{\rho n}{\kappa}} - e^{-\frac{\rho n}{\kappa}}}{\rho}\right) + e^{-\frac{\rho_1^2}{2\kappa t}}\left(\frac{e^{\frac{\rho_1 n}{\kappa}} - e^{-\frac{\rho_1 n}{\kappa}}}{\rho_1}\right)\right]\underset{-}{\overset{+}{d\alpha}}\,\underset{-}{\overset{+}{d\beta}}\,\underset{0}{\overset{+}{d\gamma}},$$

où

$$\rho^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2.$$
$$\rho_1^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2.$$

Pour X et Y on obtient des expressions pareilles. On trouve de même

$$T' = \frac{e^{-\frac{n^2 t^2}{2\kappa t'}}}{4 n\pi \sqrt{\pi}\sqrt{2\kappa t'}} \int\int\int F(\alpha, \beta, \gamma)\left[e^{-\frac{\rho^2}{2\kappa t'}}\left(\frac{e^{\frac{\rho n t}{\kappa t'}} - e^{-\frac{\rho n t}{\kappa t'}}}{\rho}\right) + e^{-\frac{\rho_1^2}{2\kappa t'}}\left(\frac{e^{\frac{\rho_1 n t}{\kappa t'}} - e^{-\frac{\rho_1 n t}{\kappa t'}}}{\rho_1}\right)\right] \overset{+}{\underset{-}{d\alpha}}\,\overset{+}{\underset{-}{d\beta}}\,\overset{+}{\underset{0}{d\gamma}},$$

si l'on écrit, pour abréger, l'expression de T sous la forme suivante :

$$T = \int F(\alpha, \beta, \gamma)\, K\, \overset{+}{\underset{-}{d\alpha}}\,\overset{+}{\underset{-}{d\beta}}\,\overset{+}{\underset{0}{d\gamma}} + \int F(\alpha, \beta, \gamma)\, K_1\, \overset{+}{\underset{-}{d\alpha}}\,\overset{+}{\underset{-}{d\beta}}\,\overset{+}{\underset{0}{d\gamma}},$$

où K représente le terme qui contient ρ, et K_1 le terme qui contient ρ_1, et qu'on remplace dans ce dernier γ par $-\gamma$, on aura

$$T = \int F(\alpha, \beta, \gamma)\, K\, \overset{+}{\underset{-}{d\alpha}}\,\overset{+}{\underset{-}{d\beta}}\,\overset{+}{\underset{0}{d\gamma}} - \int F(\alpha, \beta, -\gamma)\, K\, \overset{+}{\underset{-}{d\alpha}}\,\overset{+}{\underset{-}{d\beta}}\,\overset{-}{\underset{0}{d\gamma}},$$

en observant que $K = K_1$ pour $\rho = \rho_1$.

Donc la fonction F contribue deux fois à l'ondulation dans le même point (x, y, z). La première ondulation se propage suivant les lois des ondes dans une atmosphère illimitée de tous côtés : c'est l'ondulation directe. La seconde ondulation, ou l'ondulation réfléchie, produit des ondes dont les formes et les lois de la propagation sont celles qui ont lieu pour des ondes provenant d'une onde initiale identique par la forme et les dimensions, avec l'onde initiale réelle, mais située de l'autre côté du plan réfléchissant et symétrique avec cette dernière.

Des conclusions pareilles se rapportent aux fonctions X, Y, Z.