JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J.-M.-C. DUHAMEL

Mémoire sur les vibrations des gaz dans des tuyaux cylindriques, coniques, etc.

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 14 (1849), p. 49-110.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1849_1_14__49_0>

MÉMOIRE

Sur les vibrations des gaz dans des tuyaux cylindriques, coniques, etc.;

Par M. J.-M. C. DUHAMEL.

(Présenté à l'Académie des Sciences, le 8 avril 1839.)

Les diverses questions traitées dans ce Mémoire se rapportent principalement au mouvement vibratoire des gaz renfermés dans des tuyaux cylindriques ou coniques.

L'objet que je m'étais proposé d'abord, en commençant ces recherches, avait été de lever quelques doutes exprimés par M. Dulong, sur la vitesse de propagation du son dans les gaz renfermés dans des tuyaux, et sur l'influence que pouvait avoir sur le ton le mouvement des molécules dans le sens perpendiculaire à l'axe du tuyau. Ces questions en ont amené d'autres que je vais indiquer succinctement, ainsi que les conséquences principales auxquelles elles m'ont conduit.

Les équations dont j'ai fait usage sont celles que l'on emploie ordinairement dans l'hydrodynamique, modifiées, comme on le sait, par la chaleur développée par la condensation.

Je les ai d'abord appliquées au mouvement de l'air dans un tuyau cylindrique, indéfini dans les deux sens, et de forme quelconque. M. Poisson, dans son premier Mémoire sur la propagation du son dans l'air indéfini, considère, au lieu du mouvement de chaque molécule, le mouvement moyen de celles qui composent une même couche sphérique, ayant son centre en l'un des points de la partie très-limitée du fluide, que l'on suppose primitivement ébranlé. Dans le cas d'un tuyau cylindrique, c'est le mouvement moyen dans une section droite que je considère; mais il y a ici une difficulté de plus, provenant de la paroi du tuyau, qui oblige les molécules en contact avec elle à ne pas s'en séparer pendant tout le mouvement. En introduisant cette condition, et supposant une forme arbitraire à la section droite du tuyau, j'ai démontré que le mouvement se propagera dans l'air qui y est renfermé avec la même vitesse que dans l'air libre. D'où il résulte évidemment que la vitesse de propagation n'est pour rien dans la différence observée entre les résultats de l'expérience et ceux du calcul.

La même analyse conduit à une autre conséquence qui mérite d'être remarquée.

Lorsque l'ébranlement primitif, supposé d'une très-petite étendue, s'est propagé jusqu'à la paroi du tuyau, il s'y réfléchit, revient sur lui-même, se réfléchit de nouveau, et ainsi de suite indéfiniment. La propagation a lieu en même temps dans le sens de la longueur, et le mouvement va en s'affaiblissant constamment sans s'éteindre complétement dans aucune des sections par lesquelles il a passé. Or il est à remarquer qu'à partir de l'instant où une section quelconque est atteinte par le mouvement, la vitesse moyenne des molécules qu'elle renferme, estimée dans le sens de la longueur du tuyau, conserve une valeur différente de zéro, pendant un temps déterminé qui est le même pour toutes les sections; et qu'ensuite cette vitesse moyenne reste nulle indéfiniment, quoique le mouvement ne soit pas anéanti dans la section. Cet intervalle constant est égal au temps que l'épaisseur de l'ébranlement primitif met à traverser la section; il a pour valeur cette épaisseur divisée par la vitesse de propagation du mouvement.

Après avoir déterminé la vitesse de propagation du mouvement, j'ai calculé le mouvement même de chaque molécule en particulier, en supposant que la section droite du cylindre indéfini soit un cercle, et que, pour les points d'une même section, l'état initial ne dépende que de la distance à l'axe. La solution est donnée par deux séries d'intégrales définies doubles. J'ai examiné, en particulier, le cas où le mouvement est le même dans toutes les sections, et dirigé dans le sens des rayons. Le système repasse périodiquement par les mêmes états quand on ne considère que l'un des mouvements simples, dont la superposition forme le mouvement le plus général. Les nombres de vibrations exécutées pendant un même temps, dans ces différents mouvements simples, sont proportionnels aux racines d'une équation transcendante. Les surfaces nodales correspondantes à chacun de ces mouvements sont déterminées très-simplement au moyen des racines de cette même équation. Les distances de ces surfaces consécutives ne sont pas les mêmes, et elles conservent les mêmes rapports entre elles quand on fait varier le diamètre du tuyau; elles sont proportionnelles à ce diamètre, ainsi que la durée des vibrations.

Je passe ensuite au cas d'une application plus immédiate, où le tuyau est limité dans les deux sens, et je cherche l'influence que les mouvements perpendiculaires à l'axe peuvent avoir sur le son produit.

Le mouvement le plus général est représenté par des séries de mouvements simples superposés, qui correspondent chacun à un son unique. Le plus grave de tous est celui que la théorie connue avait donné, et qui diffère très-peu de celui que donne l'expérience dans des tuyaux dont la largeur est très-petite par rapport à la longueur.

Le plus grave après celui-ci est tellement élevé au-dessus de lui, quand il y a des mouvements perpendiculaires à l'axe, que l'on peut affirmer que *de pareils mouvements ne sont pour rien dans la différence qui existe entre l'expérience et la théorie qu'on lui a comparée.*

Je suis parvenu à des conséquences semblables en considérant un tuyau prismatique au lieu d'un tuyau circulaire.

Je passe ensuite au mouvement de l'air dans des tuyaux coniques.

La première question que je traite est celle de la vitesse de propagation du mouvement, en supposant l'ébranlement primitif entièrement arbitraire. La surface conique a pour directrice une courbe fermée quelconque, et la question se trouve ainsi traitée de la manière la plus générale. La difficulté était plus grande dans ce cas que dans celui du cylindre. Mais je suis parvenu à la surmonter, et j'ai démontré que, dans ce cas général, la vitesse de propagation était la même que dans un milieu indéfini. On retrouve encore d'autres résultats analogues à ceux qu'avaient offerts les tuyaux cylindriques indéfinis.

J'ai encore cherché cette vitesse de propagation pour l'air compris entre deux plans indéfinis, en partant d'un ébranlement arbitraire. Le résultat a encore été le même.

J'étudie ensuite les sons rendus par des tuyaux d'une grandeur finie, ouverts ou fermés aux deux extrémités, ou bien ouverts à l'une quelconque des deux, et fermés à l'autre.

Daniel Bernoulli s'était occupé de cette question dans l'important Mémoire que tous les physiciens connaissent. Mais il n'a fait le calcul que dans le cas particulier où la plus petite base est nulle, et où, par conséquent, le tuyau a la forme d'un cône entier. Il reconnaît ne pouvoir appliquer son analyse au cas général; toutefois il considère certains troncs de cône particuliers. Ce sont ceux que l'on pourrait détacher du cône entier, en le coupant soit à un ventre, soit à un nœud, suivant que l'extrémité devra être ouverte ou fermée. Mais quoiqu'il ait soupçonné que certains résultats devaient avoir lieu pour tous les troncs de cône, il ne l'a pas démontré; et, pour la plupart des conséquences, elles n'étaient pas susceptibles d'être étendues par analogie, parce que leurs lois n'étaient pas assez simples.

Enfin, je considère en dernier lieu les sons que rendrait un tuyau formé par quatre faces planes, dont deux seulement seraient parallèles. Les surfaces nodales et les ventres dépendent alors de la résolution d'équations plus compliquées que dans les cas précédents. Lorsque des expériences exactes auront été faites sur les points nouveaux traités dans ce Mémoire, je m'empresserai de les comparer aux résultats indiqués par mon analyse.

Équations générales.

1. *Cas des gaz.* — Soient, dans l'état d'équilibre, D la densité du gaz, qui sera, par exemple, l'air atmosphérique, celle du mercure étant prise pour unité; p_0 sa force élastique, g la gravité et h la hauteur barométrique; on aura

$$p_0 = gh.$$

Désignons par ρ la densité variable de l'air en un point quelconque, par p sa pression, et par γ sa condensation; de sorte que l'on ait, pour une température égale à celle de l'état naturel,

$$p = gh(1+\gamma).$$

La condensation positive ou négative développe une quantité de chaleur positive ou négative, qui élève la température d'une quantité de même signe, que l'on peut regarder comme proportionnelle à la condensation, du moins quand elle n'est pas trop considérable. Cette élévation de température produit, dans la force élastique p de l'air, une augmentation qu'il n'est pas permis de négliger. En désignant par θ le nombre de degrés centésimaux dont la température ν s'est élevée, et par α le coefficient 0,00366 de la dilatation de l'air, on aura la proportion

$$p : gh :: \mathrm{D}(1+\gamma)[1+\alpha(\nu+\theta)] : \mathrm{D}(1+\alpha\nu),$$

d'où

$$p = gh(1+\gamma)\frac{1+\alpha\nu+\alpha\theta}{1+\alpha\nu},$$

ou, en se bornant à la première puissance de α,

$$p = gh(1+\gamma)(1+\alpha\theta);$$

et enfin, en négligeant le produit $\gamma\theta$,

$$p = gh(1+\gamma+\alpha\theta).$$

Si l'on remplaçait $\alpha\theta$, qui est sensiblement proportionnel à γ, par $k\gamma$, on aurait la formule employée par M. Poisson dans le Mémoire où il a calculé le premier le changement produit dans la vitesse du son par l'élévation de température, qui résulte du rapprochement des molécules en mouvement.

On sait que θ peut s'exprimer au moyen des deux chaleurs spécifiques c et c' de l'air, la première se rapportant à une pression constante, et la seconde à un volume constant pour la même masse; et l'on a

$$\alpha\theta = \gamma\left(\frac{c}{c'} - 1\right),$$

d'où résulte

$$p = gh\left(1+\gamma\frac{c}{c'}\right).$$

Cela posé, nous supposerons que les vitesses, estimées suivant la direction des trois axes rectangulaires, soient les dérivées partielles d'une même fonction φ par rapport aux coordonnées x, y, z. On obtient ainsi, en posant

$$\frac{gh}{D}\cdot\frac{c}{c'}=a^2,$$

les deux équations suivantes :

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right), \tag{1}$$

$$\gamma=-\frac{1}{a^2}\frac{d\varphi}{dt}; \tag{2}$$

et quand la fonction φ sera déterminée, on connaîtra, à chaque instant et en chaque point, la condensation $-\frac{1}{a^2}\frac{d\varphi}{dt}$, et les composantes de la vitesse, qui seront $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$, et, par suite, la vitesse $\frac{d\varphi}{dr}$, estimée suivant la direction du rayon vecteur r, mené de l'origine au point que l'on considère.

Cas des liquides. — Soient D et p_0 la densité et la pression initiale, $D(1+h)$ et p_0+k ce que sont ces deux quantités à une même température, h et k étant deux accroissements simultanés, connus pour le liquide en question, et tous les petits accroissements simultanés de ces quantités étant supposés proportionnels à h et k, de sorte qu'on ait en même temps, à cette même température,

$$\rho=D(1+s),\quad p=p_0+\frac{ks}{h}.$$

Soit θ l'élévation de température produite par la condensation s, et δ la dilatation cubique du liquide; on aura

$$\theta\delta=s\left(\frac{c}{c'}-1\right).$$

Pour calculer l'augmentation de pression produite par l'élévation θ de la température, sans variation de densité, soit D' la densité, elle deviendrait $D'(1-\theta\delta)$ par l'accroissement de température θ, sans changement de pression; produisons maintenant une condensation $\theta\delta$, sans changer la température, ce qui ramène la densité à sa valeur D', il en résultera une augmentation de pression $\frac{k}{h}\theta\delta$. L'ajoutant avec p, on aura la pression produite par la condensation s, en tenant compte du dégagement de chaleur. Ainsi,

$$p = p_0 + \frac{k}{h}\frac{c}{c'}s.$$

Les équations de l'hydrodynamique conduisent alors à

$$s = -\frac{1}{a^2}\frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right),$$

en posant

$$a^2 = \frac{1}{D}\frac{k}{h}\cdot\frac{c}{c'}.$$

Les équations sont donc de même forme pour les liquides et pour les gaz.

On retomberait dans le cas des gaz, en supposant

$$k = p_0 h,$$

et alors

$$a^2 = \frac{p_0}{D}\cdot\frac{c}{c'}.$$

Vitesse de propagation du mouvement de l'air dans un tuyau cylindrique quelconque.

11. Considérons un tuyau cylindrique inébranlable, rempli d'air ou d'un autre gaz quelconque, s'étendant indéfiniment dans les deux sens, et ayant pour section perpendiculaire à ses arêtes une courbe d'une forme quelconque. Supposons que, dans une très-petite partie du fluide, on ait produit en chaque point une certaine condensation, et imprimé certaines vitesses; lorsqu'on abandonnera le fluide à lui-même, le mouvement se propagera d'un point à un autre, et nous nous proposons ici de déterminer la vitesse de cette propagation: ce qui revient à connaître au bout de quel temps un point situé à une distance donnée de la partie ébranlée, commencera à se mettre en mouvement. On pourrait tirer quelques inductions à ce sujet de la considération de la superposition des petits mouvements; mais on ne peut réellement en tirer aucune conséquence, et il est indispensable, pour la solution rigoureuse de la question, d'employer les

équations générales avec les conditions spéciales qui se rapportent au cas actuel.

Les vitesses et la condensation initiales étant données,

$$\frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{d\varphi}{dx}, \quad \frac{d\varphi}{dy}, \quad \frac{d\varphi}{dz}, \quad \frac{d\varphi}{dr}, \quad \text{pour} \quad t = \text{o},$$

sont des fonctions connues de x, y, z qui ne sont différentes de zéro que pour les valeurs de x, y, z correspondantes aux points compris dans une portion de tuyau, très-peu étendue dans tous les sens. On connaît ainsi, à une constante arbitraire près, la valeur de φ, pour $t = \text{o}$.

Cela posé, prenons pour inconnue la valeur moyenne de φ, relative aux points d'une même section quelconque, perpendiculaire aux arêtes. L'ébranlement initial étant tout à fait arbitraire, cette valeur moyenne cessera d'être nulle pour une section en dehors de cet ébranlement, au moment même où le mouvement atteindra cette section L'expression de cette moyenne sera

$$\frac{\int\int \varphi\, dy\, dz}{\int\int dy\, dz},$$

ces intégrales se rapportant à l'aire entière de la section. Le diviseur $\int\int dy\, dz$ étant constant, il suffit de déterminer le numérateur, et nous poserons

$$\int\int \varphi\, dy\, dz = u,$$

d'où il résultera

$$\int\int \frac{d^2\varphi}{dx^2}\, dy\, dz = \frac{d^2 u}{dx^2}, \quad \int\int \frac{d^2\varphi}{dt^2}\, dy\, dz = \frac{d^2 u}{dt^2},$$

les intégrales étant toujours prises dans toute l'étendue de la surface de la section.

Cherchons maintenant à évaluer

$$\int\int \left(\frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) dy\, dz.$$

Intégrons d'abord $\frac{d^2\varphi}{dy^2}\, dy$ entre les deux valeurs de y correspondantes au même z, BC, *fig.* 1. Nous aurons ainsi

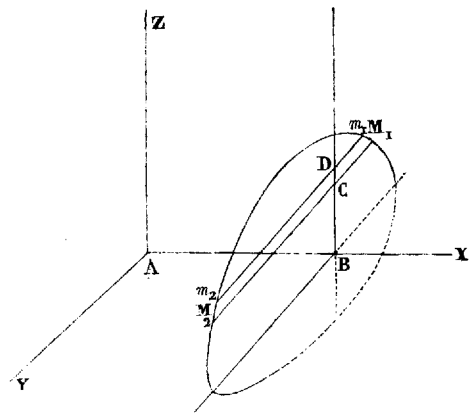
$$\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_2 - \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_1,$$

ces deux valeurs de $\frac{d\varphi}{dy}$ se rapportant respectivement aux deux points M_2, M_1. Il reste maintenant à former l'intégrale

$$\int\left[\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_2 - \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_1\right] dz$$

entre les deux valeurs extrêmes de z qui se rapportent aux points de la section où la tangente est parallèle à l'axe des y.

Fig. 1.



Si nous désignons, en général, par β, γ les angles formés avec les directions positives des y et z, par la direction extérieure de la normale à la surface du cylindre, que nous supposerons, pour plus de simplicité, sans inflexions; nous aurons, au point M_2,

$$dz = ds_2 \cos\beta_2,$$

et au point M_1,

$$dz = -\,ds_1 \cos\beta_1,$$

ds_1 et ds_2 étant les arcs infiniment petits $M_1 m_1$, $M_2 m_2$ considérés comme essentiellement positifs.

On a ainsi

$$\left[\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_2 - \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_1\right] dz = \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_2 ds_2 \cos\beta_2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_1 ds_1 \cos\beta_1.$$

Donc l'intégrale

$$\int\left[\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_2 - \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)_1\right] dz$$

peut être remplacée par la suivante

$$\int \frac{d\varphi}{dy}\, ds \cos 6,$$

étendue au périmètre entier de la section.

Opérant de la même manière sur $\frac{d^2\varphi}{dz^2}\, dz\, dy$, et réunissant les deux résultats, on obtient

$$\int\int\left(\frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) dy\, dz = \int\left(\frac{d\varphi}{dy}\cos 6 + \frac{d\varphi}{dz}\cos\gamma\right) ds,$$

cette dernière intégrale s'étendant au périmètre entier de la section.

Mais $\frac{d\varphi}{dy}$ et $\frac{d\varphi}{dz}$ étant les composantes de la vitesse, parallèlement aux axes des y et des z, la composante suivant la normale aura pour expression

$$\frac{d\varphi}{dy}\cos 6 + \frac{d\varphi}{dz}\cos\gamma,$$

et comme cette composante est nulle, puisque, par hypothèse, le tuyau est complétement immobile, on a, pour tous les points du contour,

$$\frac{d\varphi}{dy}\cos 6 + \frac{d\varphi}{dz}\cos\gamma = 0,$$

soit que les points du fluide y soient en repos, ou en mouvement. Tous les éléments de l'intégrale étant nuls, on a

$$\int\int\left(\frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) dy\, dz = 0.$$

Cela posé, si l'on intègre tous les termes de l'équation (1), multipliés par $db\, dc$, et qu'on étende ces intégrales à l'aire entière de la section correspondante à une valeur quelconque de x, on aura

$$\frac{d^2u}{dt^2} = a^2\frac{d^2u}{dx^2}. \tag{3}$$

Multipliant de même par $dy\, dz$ les termes de l'équation (2), on obtient

$$(4)\qquad \iint \gamma\, dy\, dz = -\frac{1}{a^2}\iint \frac{d\varphi}{dt}\, dy\, dz = -\frac{1}{a^2}\frac{du}{dt}.$$

Les équations (3) et (4) feront connaître les valeurs moyennes de φ et de γ. La valeur moyenne de la vitesse $\frac{d\varphi}{dx}$, parallèle à l'axe des x, sera donnée par $\frac{du}{dx}$, et l'on connaîtra ainsi la vitesse et la condensation moyenne à un instant quelconque, et pour une section quelconque.

III. L'intégrale de l'équation (3) est

$$u = F(x + at) + f(x - at),$$

et il ne reste qu'à déterminer les fonctions arbitraires F et f d'après l'état initial. Supposons que l'ébranlement initial soit renfermé entre deux valeurs de x très-peu différentes, o et l, et ne s'étende pas nécessairement jusqu'aux parois du tube. Les condensations et les vitesses étant connues à cet instant, on connaît les valeurs de $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dx}$ pour $t = 0$, et, par conséquent, aussi celles de $\frac{du}{dt}$, $\frac{du}{dx}$ pour $t = 0$.

En différentiant la valeur générale de u par rapport à t et x, on obtient

$$\frac{du}{dx} = F'(x + at) + f'(x - at),$$
$$\frac{du}{dt} = a\,[F'(x + at) - f'(x - at)].$$

Soient $\chi(x)$ et $a\chi_1(x)$ les valeurs connues de $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dt}$ pour $t = 0$, on aura

$$F'(x) + f'(x) = \chi(x),$$
$$F'(x) - f'(x) = \chi_1(x);$$

d'où

$$F'(x) = \frac{\chi(x) + \chi_1(x)}{2}, \quad f'(x) = \frac{\chi(x) - \chi_1(x)}{2},$$

et, par suite,

$$(5)\qquad \frac{du}{dx} = \frac{\chi(x+at) + \chi_1(x+at)}{2} + \frac{\chi(x-at) - \chi_1(x-at)}{2},$$

$$(6)\qquad \frac{1}{a}\frac{du}{dt} = \frac{\chi(x+at) + \chi_1(x+at)}{2} - \frac{\chi(x-at) - \chi_1(x-at)}{2}.$$

Ces équations (5) et (6) feront connaître à chaque instant la condensation moyenne et la vitesse moyenne parallèle à l'axe des x, des points qui se trouvaient primitivement dans une même section quelconque.

IV. Les fonctions $\chi(\omega)$, $\chi_1(\omega)$ sont nulles pour toutes les valeurs de ω qui ne sont pas comprises entre o et l. Si donc on considère une section correspondante à une valeur de x plus grande que l, $\chi(x+at)$ et $\chi_1(x+at)$ seront nuls, quel que soit t; et, par conséquent, pour toute section située en dehors de l'ébranlement primitif, on aura

$$\frac{du}{dx}=\frac{\chi(x-at)-\chi_1(x-at)}{2}, \tag{7}$$

$$\frac{1}{a}\frac{du}{dt}=\frac{\chi_1(x-at)-\chi(x-at)}{2}, \tag{8}$$

d'où résulte

$$\frac{du}{dx}=-\frac{1}{a}\frac{du}{dt}:$$

ce qui montre que la vitesse moyenne d'une section est le produit de la vitesse de propagation par sa condensation moyenne.

Les équations (7) et (8) montrent que $\frac{du}{dx}$ et $\frac{du}{dt}$ sont nuls tant que l'on a $x-at>l$; ils cessent de l'être quand $x-at=l$; et ils redeviennent nuls quand $x-at<0$. Ainsi la vitesse moyenne dans le sens des x et la condensation moyenne commencent à acquérir des valeurs différentes de zéro après le temps $t=\frac{x-l}{a}$; elles reprennent la valeur zéro lorsque $t=\frac{x}{a}$, et la conservent indéfiniment, et, par conséquent, n'ont d'existence que pendant l'intervalle de temps $\frac{l}{a}$.

La propagation de la vitesse et de la condensation moyennes se fait donc avec une vitesse égale à a, c'est-à-dire avec la même vitesse que se propagerait le mouvement dans le fluide indéfini en tous sens.

On peut donc dire aussi que *le mouvement se propage dans le tube avec la même vitesse que dans le fluide indéfini.*

V. La partie primitivement ébranlée, et que nous avons supposée très-petite en tous sens, s'étend et communique le mouvement au fluide, comme s'il était indéfini, jusqu'à ce que l'onde vienne en contact avec la paroi. Elle se réfléchit alors successivement et produit un mouvement rétrograde qui se réfléchira de nouveau, et ainsi de suite. Or, sans rechercher pour le moment la loi de ces réflexions, on voit que le mouvement se propagera dans les deux sens suivant la longueur du tuyau, mais ne s'anéantira pas dans les parties de cette longueur par lesquelles il aura passé.

Or il résulte de ce qui précède cette conséquence remarquable, que lorsqu'une section est atteinte par le mouvement, la vitesse moyenne et la condensation moyenne de ses points sont différentes de zéro pendant un intervalle de temps égal à $\frac{l}{a}$, et qu'ensuite elles restent constamment nulles, bien que le mouvement continue à avoir lieu dans cette même section.

Mouvement de l'air dans un tuyau cylindrique indéfini à base circulaire.

VI. Nous allons chercher maintenant, non pas seulement la vitesse avec laquelle se propage le mouvement, mais le mouvement même de chacun des points du fluide renfermé dans un tuyau cylindrique indéfini dans les deux sens. Nous supposerons que la section de ce cylindre par un plan perpendiculaire aux arêtes soit un cercle, et que l'ébranlement primitif soit semblable autour de l'axe : de sorte que le mouvement et la condensation en chaque point ne dépendent que du temps t, de l'abscisse x parallèle à l'axe du cylindre, et de la distance r à cet axe. En introduisant cette dernière variable au lieu de y et z dans l'équation aux différentielles partielles, précédemment écrite, on obtient

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} + \frac{d^2\varphi}{dx^2}\right).$$

La composante de la vitesse suivant le rayon r sera

$$\frac{y}{r}\frac{d\varphi}{dy} + \frac{z}{r}\frac{d\varphi}{dz} \quad \text{ou} \quad \frac{d\varphi}{dr}:$$

$\frac{d\varphi}{dx}$ sera toujours la composante parallèle à l'axe des x, et la vitesse résultante sera

$$\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2}.$$

Les molécules situées primitivement à la surface intérieure du tuyau devront y rester constamment; leur vitesse dans le sens du rayon sera donc nulle à chaque instant. Il en sera de même des points situés dans l'axe. Si donc on désigne par l le rayon de la section circulaire, on devra avoir

$$\frac{d\varphi}{dr} = 0 \quad \text{pour} \quad r = 0 \quad \text{et pour} \quad r = l,$$

quels que soient x et t.

L'état initial du fluide étant donné, on connaîtra les composantes de la vitesse en chaque point, ainsi que la condensation, pour la valeur zéro de t. Ce seront des fonctions arbitraires de r et x; et la question consiste à déterminer la valeur de φ qui satisfait à l'équation aux différences partielles, et aux conditions particulières que nous venons d'indiquer.

On a ainsi à satisfaire au système des équations suivantes :

$$(1) \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} + \frac{d^2\varphi}{dx^2}\right),$$

$$(2) \qquad \frac{d\varphi}{dr} = 0 \quad \text{pour} \quad r = 0 \quad \text{et pour} \quad r = l,$$

$$(3) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= \mathrm{F}(x, r) \quad \text{pour} \quad t = 0, \\ \frac{d\varphi}{dr} &= f(x, r) \quad \text{pour} \quad t = 0, \end{aligned}\right.$$

$$(4) \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \psi(x, r) \quad \text{pour} \quad t = 0.$$

Les deux équations (3) déterminent, à une constante arbitraire pres, la valeur de φ pour $t = 0$. En y joignant l'équation (4), on connaît donc les valeurs de $\varphi + c$ et de $\frac{d\varphi}{dt}$ ou $\frac{d(\varphi + c)}{dt}$, correspondantes à $t = 0$. On pourra d'ailleurs prendre pour c la valeur qu'on voudra; elle n'influera en rien sur l'état du fluide en chaque point, puisqu'il ne dépend que des dérivées de φ par rapport à r, x et t.

Posons d'abord

$$\varphi = u\theta,$$

u étant une fonction de r seulement, et θ une fonction de x et t.

L'équation (1) deviendra

$$u\frac{d^2\theta}{dt^2} = a^2\left(\theta\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{\theta}{r}\frac{du}{dr} + u\frac{d^2\theta}{dx^2}\right). \tag{5}$$

Déterminons u par l'équation

$$a^2\left(\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr}\right) = -\alpha^2 u, \tag{6}$$

α étant une constante indéterminée. L'équation (5) deviendra

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = a^2\frac{d^2\theta}{dx^2} - \alpha^2\theta. \tag{7}$$

La valeur la plus générale de u, qui satisfait à l'équation (6), est

$$u = \mathrm{M}\int_0^\pi \cos\left(\frac{\alpha r}{a}\cos\omega\right)d\omega + \mathrm{N}\int_0^\pi \cos\left(\frac{\alpha r}{a}\cos\omega\right)\log(r\sin^2\omega)\,d\omega,$$

M et N étant des constantes arbitraires. On en tire

$$\begin{aligned}\frac{du}{dr} = &-\frac{\mathrm{M}\alpha}{a}\int_0^\pi \sin\left(\frac{\alpha r}{a}\cos\omega\right)\cos\omega\,d\omega \\ &-\frac{\mathrm{N}\alpha}{a}\int_0^\pi \sin\left(\frac{\alpha r}{a}\cos\omega\right)\cos\omega\log(r\sin^2\omega)\,d\omega \\ &+\frac{\mathrm{N}}{r}\int^\pi \cos\left(\frac{\alpha r}{a}\cos\omega\right)d\omega,\end{aligned}$$

et il faut que cette expression devienne égale à zéro pour $r = 0$ et $r = l$, afin que les équations (2) soient satisfaites. Il résulte de là que la constante N ne peut être que zéro, sans quoi $\frac{du}{dr}$ serait infini pour $r = 0$. Cette supposition réduit $\frac{du}{dr}$ à son premier terme, qui devient nul pour $r = 0$. Si l'on y fait $r = l$, il faudra que l'on ait

$$\alpha\int_0^\pi \sin\left(\frac{\alpha l}{a}\cos\omega\right)\cos\omega\,d\omega = 0,$$

ou, en supprimant le facteur α, ce qui n'enlève aucune solution,

$$\int_0^\pi \sin\left(\frac{\alpha l}{a}\cos\omega\right)\cos\omega\,d\omega = 0.$$

Cette équation déterminera les valeurs de α qu'il est nécessaire de prendre pour que les équations (2) soient satisfaites. En intégrant par parties, on lui donne la forme suivante

$$(8)\qquad \alpha \int_0^{\pi} \cos\left(\frac{\alpha l}{a}\cos\omega\right) \sin^2\omega\, d\omega = 0,$$

et cette équation se décompose dans les deux suivantes

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} &\alpha = 0,\\ &\int_0^{\pi} \cos\left(\frac{\alpha l}{a}\cos\omega\right) \sin^2\omega\, d\omega = 0.\end{aligned}\right.$$

Les racines de cette équation sont égales et de signes contraires, puisque le premier membre reste le même quand on change α de signe. Mais comme la valeur de u, qui se réduit, en supprimant le facteur constant, à

$$(10)\qquad u = \int_0^{\pi} \cos\left(\frac{\alpha r}{a}\cos\omega\right) d\omega,$$

ne change pas non plus de signe ni de valeur quand on change α de signe, les racines négatives de l'équation (9) ne donneraient pas de nouvelles valeurs de u, et l'on peut, par conséquent, se borner aux racines positives.

Supposons donc que l'on prenne une quelconque d'entre elles pour valeur de α, et intégrons l'équation (7).

Si nous faisons pour cela

$$\theta = \cos\mu\,(x - 6)\cos mt,$$

il faudra que l'on ait

$$M^2 = a^2\mu^2 + \alpha^2;$$

d'où résultera

$$\theta = A\cos\mu\,(x - 6)\cos t\sqrt{a^2\mu^2 + \alpha^2},$$

A, μ, 6 désignant des quantités quelconques indépendantes de x et t.

Nous aurons encore une solution de l'équation (7) en prenant

$$A = \frac{1}{2\pi}\chi(6)\, d6\, d\mu,$$

et intégrant la valeur de θ par rapport à 6 et μ entre les limites $-\infty$ et $+\infty$; car ce n'est autre chose qu'ajouter des intégrales particulieres. On aura ainsi

$$(11)\quad \theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\chi(\beta)\cos\mu(x-\beta)\cos t\sqrt{a^2\mu^2+\alpha^2}\,d\beta\,d\mu,$$

et, pour $t = 0$, cette valeur de θ se réduira à la fonction arbitraire $\chi(x)$, tandis que sa dérivée par rapport à t deviendra nulle.

On aura une autre solution de l'équation (7) en intégrant l'expression (11) par rapport à t à partir de $t = 0$, et remplaçant la fonction χ par une autre fonction arbitraire χ_1; on obtient ainsi

$$(12)\quad \theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\chi_1(\beta)}{\sqrt{a^2\mu^2+\alpha^2}}\cos\mu(x-\beta)\sin t\sqrt{a^2\mu^2+\alpha^2}\,d\beta\,d\mu.$$

Cette expression devient nulle pour $t = 0$, et sa dérivée par rapport à t devient $\chi_1(x)$ dans cette même hypothèse. Si donc on ajoute les solutions (11) et (12), on obtiendra cette autre solution

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\chi(\beta)\cos\mu(x-\beta)\cos t\sqrt{a^2\mu^2+\alpha^2}\,d\beta\,d\mu \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\chi_1(\beta)}{\sqrt{a^2\mu^2+\alpha^2}}\cos\mu(x-\beta)\sin t\sqrt{a^2\mu^2+\alpha^2}\,d\beta\,d\mu,\end{aligned}\right.$$

et l'on trouvera, pour $t = 0$,

$$\theta = \chi(x),\quad \frac{d\theta}{dt} = \chi_1(x).$$

En faisant le produit des valeurs de u et θ données par les équations (10) et (13), on aura une valeur de φ; et si l'on ajoute toutes celles que fourniraient ainsi les différentes valeurs de α tirées de l'équation (9), on aura une valeur plus générale

$$(14)\qquad \varphi = \sum u\theta,$$

qui satisfera aux équations (1) et (2).

Il ne reste donc plus qu'à satisfaire aux équations (3) et (4), qui font connaître, comme nous l'avons déjà dit, les fonctions de x et r auxquelles se réduisent $\varphi + c$ et $\frac{d(\varphi+c)}{dt}$ pour $t = 0$; ou encore celles de φ et $\frac{d\varphi}{dt}$ pour $t = 0$, puisqu'on peut supposer nulle cette constante indéterminée. On sait comment la valeur de φ se déduira des fonctions $F(x, r)$, $f(x, r)$ par de simples quadratures.

Supposons ce calcul effectué, et soit

$$\varphi = \Pi(x, r) \quad \text{pour} \quad t = 0.$$

La valeur de φ donnée par l'équation (14) conduit, pour $t = 0$, aux deux équations

$$(15) \qquad \sum u\chi(x) = \Pi(x, r), \quad \sum u\chi_1(x) = \psi(x, r),$$

d'après lesquelles il faut déterminer les fonctions arbitraires $\chi(x)$, $\chi_1(x)$.

Considérons d'abord la première d'entre elles, et désignons par

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \ldots, \quad \alpha_n$$

toutes les racines positives en nombre infini de l'équation (9), dont la première α_0 est zéro. La fonction θ dépendant de α, les deux fonctions $\chi(x)$, $\chi_1(x)$ en dépendront aussi, et nous représenterons par $\chi^{(n)}(x)$, $\chi_1^{(n)}(x)$ leurs valeurs correspondantes à la racine α_n. D'après cela, la première équation (15) peut être mise sous la forme suivante

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} & u_0\chi^{(0)}(x) + u_1\chi^{(1)}(x) + u_2\chi^{(2)}(x) + \ldots \\ & \qquad + u_n\chi^{(n)}(x) + \ldots = \Pi(x, r). \end{aligned} \right.$$

Or on sait que les intégrales désignées par u, qui satisfont à l'équation (6) et aux conditions (2), satisfont aussi à la suivante

$$\int_0^l u_m u_n \, r dr = 0,$$

toutes les fois que les indices m, n sont différents.

Si donc on multiplie les deux membres de l'équation (16) par $u_n r dr$ et qu'on les intègre entre 0 et l, on obtiendra

$$\chi^{(n)}(x) \int_0^l r u_n^2 \, dr = \int_0^l \Pi(x, r) \, u_n r dr,$$

d'où l'on tire

$$\chi^{(n)}(x) = \frac{\int_0^l \Pi(x, r)\, u_n\, r\, dr}{\int_0^l u_n^2\, r\, dr},$$

et l'on trouvera de même

$$\chi_1^{(n)}(x) = \frac{\int_0^l \psi(x, r)\, u_n\, r\, dr}{\int_0^l u_n^2\, r\, dr}.$$

La valeur de φ qui satisfera à toutes les conditions de la question sera donc

$$(17)\quad \varphi = \frac{1}{2\pi}\left\{\begin{aligned} &\sum u_n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\beta\, d\mu \cos\mu(x-\beta)\cos t\sqrt{a^2\mu^2+\alpha_n^2}\;\frac{\int_0^l \Pi(\beta, r)\, u_n\, r\, dr}{\int_0^l u_n^2\, r\, dr} \\ &+\sum u_n \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\beta\, d\mu\cos\mu(x-\beta)}{\sqrt{a^2\mu^2+\alpha_n^2}}\sin t\sqrt{a^2\mu^2+\alpha_n^2}\;\frac{\int_0^l \psi(\beta, r)\, u_n\, r\, dr}{\int_0^l u_n^2\, r\, dr}\end{aligned}\right\}$$

VII. On peut, au moyen de cette valeur de φ, vérifier le résultat obtenu dans le n° IV. En effet, l'équation

$$\int_0^l u_m u_n\, r\, dr = 0$$

prouve que l'on a

$$\int_0^l u_n\, r\, dr = 0,$$

excepté pour $n = 0$. Si donc on multiplie les deux membres de l'équation (17) par $2\pi r\, dr$ et qu'on les intègre entre les limites 0 et l, il suffira de considérer, dans le second membre, les deux termes correspondants à $n = 0$. Si l'on remplace u_0 par sa valeur π, on obtiendra ainsi, en observant que $\alpha_0 = 0$,

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} \int_0^l 2\pi r\varphi\, dr &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\mathrm{\beta}\, d\mu \cos\mu(x-\mathrm{\beta})\cos\mu at \int_0^l \Pi(\mathrm{\beta}, r)\, r\, dr \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mathrm{\beta}\, d\mu \cos\mu(x-\mathrm{\beta})}{\mu a}\sin\mu at \int_0^l \psi(\mathrm{\beta}, r)\, r\, dr. \end{aligned}\right.$$

Posons

$$\int_0^l \Pi(\mathrm{\beta}, r)\, r\, dr = \varphi_1(\mathrm{\beta}),$$

et remplaçons

$$\cos\mu(x-\mathrm{\beta})\cos\mu at$$

par

$$\frac{\cos\mu(x+at-\mathrm{\beta}) + \cos\mu(x-at-\mathrm{\beta})}{2},$$

la première partie du second membre de l'équation (18) deviendra

$$\pi[\varphi_1(x+at) + \varphi_1(x-at)].$$

Quant à la seconde partie, elle peut être mise sous la forme

$$\int_0^t dt \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\mathrm{\beta}\, d\mu \cos\mu(x-\mathrm{\beta})\cos\mu at \int_0^l \psi(\mathrm{\beta}, r)\, r\, dr,$$

et, si nous posons

$$\int_0^l \psi(\mathrm{\beta}, r)\, r\, dr = \varphi_2(\mathrm{\beta}),$$

elle devient

$$\pi\int_0^t [\varphi_2(x+at) + \varphi_2(x-at)]\, dt,$$

et peut se mettre sous la forme

$$\pi\left[\frac{\psi_1(x+at) - \psi_1(x-at)}{a}\right],$$

en posant

$$\int \varphi_2(\mathrm{\beta})\, a\mathrm{\beta} = \psi_1(\mathrm{\beta}).$$

D'après cela, l'équation (18) devient

$$(19)\quad \int_0^l r\varphi\, dr = \frac{\varphi_1(x+at) + \varphi_1(x-at)}{2} + \frac{\psi_1(x+at) - \psi_1(x-at)}{2a}:$$

si l'on différentie les deux membres de cette équation par rapport à x et à t, et que l'on observe que l'on a

$$\varphi_1'(6) = \int_0^l \mathrm{F}(6, r)\, r\,dr, \quad \psi_1'(6) = \varphi_2(6) = \int_0^l \psi(6, r)\, r\,dr,$$

on obtiendra

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^l \frac{d\varphi}{dx} r\,dr = \frac{1}{2}\int_0^l [\mathrm{F}(x+at, r) + \mathrm{F}(x-at, r)]\, r\,dr \\ + \frac{1}{2a}\int_0^l [\psi(x+at, r) - \psi(x-at, r)]\, r\,dr. \end{aligned} \right.$$

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^l \frac{d\varphi}{dt} r\,dr = \frac{a}{2}\int_0^l [\mathrm{F}(x+at, r) - \mathrm{F}(x-at, r)]\, r\,dr \\ + \frac{1}{2}\int_0^l [\psi(x+at, r) + \psi(x-at, r)]\, r\,dr. \end{aligned} \right.$$

En faisant $t = 0$ dans ces équations, on trouve, comme cela devait être,

$$\int_0^l \frac{d\varphi}{dx} r\,dr = \int_0^l \mathrm{F}(x, r)\, r\,dr, \quad \int_0^l \frac{d\varphi}{dt} r\,dr = \int_0^l \psi(x, r)\, r\,dr.$$

Comparons maintenant les équations (20), (21) aux équations (5) et (6) du n° III, en observant que l'on devra poser

$$u = 2\pi\int_0^l \varphi . r\,dr, \quad \frac{du}{dx} = 2\pi\int_0^l \frac{d\varphi}{dx} r\,dr, \quad \frac{du}{dt} = 2\pi\int_0^l \frac{d\varphi}{dt} r\,dr,$$

et, par conséquent,

$$\chi(x) = 2\pi\int_0^l \mathrm{F}(x, r)\, r\,dr, \quad a\chi_1(x) = 2\pi\int_0^l \psi(x, r)\, r\,dr.$$

D'où l'on voit que les équations (5) et (6) coïncident avec les équations (20), (21); *ce que nous voulions vérifier.*

Cas où le mouvement n'a lieu que dans la direction du rayon.

VIII. Supposons que, dans l'état initial, les points ne soient pas sortis de la section dans laquelle ils se trouvaient dans l'état naturel d'équilibre, et que cet état initial soit le même pour tous les points également distants de l'axe. La fonction φ ne dépendra alors que de r et t, et, par conséquent, on aura

$$F(x, r) = 0.$$

Les fonctions connues $f(x, r)$, $\psi(x, r)$ seront remplacées par $f(r)$ que nous désignerons par $\frac{d\Pi(r)}{dr}$, et par $\psi(r)$; et la fonction $\Pi(x, r)$ sera remplacée par $\Pi(r)$. Les équations du problème seront donc

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}\right),$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = 0 \quad \text{pour } r = 0 \quad \text{et} \quad r = l,$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \Pi(r) \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \psi(r) \end{aligned}\right\} \quad \text{pour} \quad t = 0.$$

On peut traiter directement ces équations comme celles du n° VI, et poser d'abord

$$\varphi = u\theta,$$

$$u = \int_0^l \cos\left(\frac{\alpha r}{a}\cos\omega\right) d\omega, \qquad \alpha\int_0^l \cos\left(\frac{\alpha l}{a}\cos\omega\right)\sin^2\omega\, d\omega = 0,$$

nous verrons tout à l'heure qu'on peut négliger la racine $\alpha = 0$. Il résulte de ces équations

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\alpha^2\theta, \quad \theta = A\cos\alpha t + B\sin\alpha t,$$

$$\varphi = \sum A_n u_n \cos\alpha_n t + \sum B_n u_n \sin\alpha_n t.$$

A_n et B_n seront déterminés par les conditions

$$\sum A_n u_n = \Pi(r), \quad \sum \alpha_n B_n u_n = \psi(r),$$

d'où

$$A_n = \frac{\int_0^l u_n r\Pi(r)\, dr}{\int_0^l u_n^2 r\, dr}, \quad B_n = \frac{\int_0^l u_n r\psi(r)\, dr}{\alpha_n \int_0^l u_n^2 r\, dr},$$

et, par conséquent,

$$(22)\quad \varphi = \sum u_n \left\{ \cos \alpha_n t \cdot \frac{\int_0^l \Pi(r)\, u_n\, r\, dr}{\int_0^l u_n^2\, r\, dr} + \frac{\sin \alpha_n t}{\alpha_n} \cdot \frac{\int_0^l \psi(r)\, u_n\, r\, dr}{\int_0^l u_n^2\, r\, dr} \right\}.$$

Quoique cette formule ait été très-facile à trouver directement, il n'est pas inutile de reconnaître comment elle peut être déduite de la formule (17), en supposant qu'on y remplace les fonctions $\Pi(\mathit{6}, r)$, $\psi(\mathit{6}, r)$ par $\Pi(r)$, $\psi(r)$. Pour cela, nous considérerons d'abord l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathit{6}\, d\mu \cos \mu (x - \mathit{6}) \cos t \sqrt{a^2 \mu^2 + \alpha_n^2}\,;$$

intégrant par rapport à $\mathit{6}$, entre x et une limite positive très-grande, il faudra calculer ensuite

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\mu \frac{\sin \mu (\mathit{6} - x)}{\mu} \cos t \sqrt{a^2 \mu^2 + \alpha_n^2},$$

puis, supposer $\mathit{6} = \infty$.

Il est facile de voir que lorsque $\mathit{6}$ est très-grand, il suffit de considérer les valeurs de μ très-voisines de zéro; ce qui réduit $\cos t \sqrt{a^2 \mu^2 + \alpha_n^2}$ sensiblement à $\cos \alpha_n t$. Quant à l'intégrale

$$\int \frac{\sin \mu (\mathit{6} - x)}{\mu}\, d\mu,$$

qui devait être prise entre des limites très-voisines de zéro, il n'y a aucun inconvénient à la prendre entre $-\infty$ et $+\infty$, ce qui donne π pour sa valeur. La partie de l'intégrale double qui vient d'être calculée est donc égale à $\pi \cos \alpha_n t$.

On verrait de même que la partie correspondante aux valeurs de $\mathit{6}$ comprises entre $-\infty$ et x, est encore égale à $\pi \cos \alpha_n t$. D'où il suit que l'on doit remplacer

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathit{6}\, d\mu \cos \mu (x - \mathit{6}) \cos t \sqrt{a^2 \mu^2 + \alpha_n^2}$$

par $2\pi \cos \alpha_n t$.

Un calcul semblable donnera

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d6\, d\mu \cos\mu\,(x-6)}{\sqrt{a^2\mu^2+\alpha_n^2}}\sin t\sqrt{a^2\mu^2+\alpha_n^2}=\frac{2\pi\sin\alpha_n t}{\alpha_n}.$$

La formule (17) devient donc

$$\varphi=\sum u_n\cos\alpha_n t\,\frac{\int_0^l \Pi(r)\,u_n\,r\,dr}{\int_0^l u_n^2\,r\,dr}+\sum\frac{u_n\sin\alpha_n t}{\alpha_n}\,\frac{\int_0^l \psi(r)\,u_n\,r\,dr}{\int_0^l u_n^2\,r\,dr},$$

ce qui coïncide avec la formule (22).

Il est bon d'observer que, dans l'équation (22), il est inutile de tenir compte de la racine $\alpha_0=0$; car la première partie du second membre donnerait un terme constant, qui disparaîtra dans $\frac{d\varphi}{dt}$ et $\frac{d\varphi}{dr}$; et la seconde partie donnera un terme nul, vu que

$$\int_0^l \psi(r)\,r\,dr=0,$$

puisque la masse du fluide n'a pas varié.

IX. Considérons dans la valeur de φ les termes correspondants à une même valeur de α; ils seront de la forme

$$u_n(\mathrm{A}\cos\alpha_n t+\mathrm{B}\sin\alpha_n t).$$

En supposant φ réduit à ces seuls termes, on aurait

$$\frac{d\varphi}{dr}=\frac{du_n}{dr}(\mathrm{A}\cos\alpha_n t+\mathrm{B}\sin\alpha_n t),$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=\alpha_n u_n(-\mathrm{A}\sin\alpha_n t+\mathrm{B}\cos\alpha_n t),$$

d'où l'on conclut que, dans ce mouvement partiel, les vitesses et les condensations en chaque point redeviendraient les mêmes après un intervalle de temps T, ayant pour expression

$$\mathrm{T}=\frac{2\pi}{\alpha_n}.$$

Ainsi *les nombres de vibrations exécutées pendant un même temps,* *dans les divers mouvements élémentaires qui peuvent avoir lieu dans le même tuyau, sont directement proportionnels aux racines correspondantes de l'équation* (9).

Pour déterminer les surfaces nodales correspondantes à une racine quelconque α_n, il faut poser

$$\frac{du_n}{dr} = 0,$$

ou

$$r \int_0^\pi \cos\left(\frac{\alpha_n r}{a} \cos \omega\right) \sin^2 \omega \, d\omega = 0,$$

ce qui donne, dans tous les cas, $r = 0$; et, en effet, tous les points de l'axe restent nécessairement immobiles. Les autres valeurs de r se déduisent immédiatement de la comparaison de cette équation avec l'équation (9), et l'on obtient

$$\alpha_n r = \alpha l, \quad r = \frac{\alpha}{\alpha_n} l.$$

Dans cette équation, on donnera à α toutes les valeurs tirées de l'équation (9); et les valeurs de r qui seront moindres que l détermineront des surfaces cylindriques ayant même axe que le tuyau, et dont tous les points seront sans vitesse : ce seront les surfaces nodales correspondantes à ce mouvement particulier. La condensation n'y sera pas nulle, parce que u_n n'étant pas zéro, $\frac{d\varphi}{dt}$ ne le sera pas non plus généralement.

Les différents rayons des surfaces nodales seront donc, en ne considérant pas l'axe ni la surface du tuyau,

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_n} l, \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_n} l, \ldots, \quad \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} l;$$

leur nombre est le même que celui des racines moindres que celle que l'on considère.

Les numérateurs α_1, α_2, etc., étant les mêmes pour deux racines quelconques α_n, α_m, les rayons des surfaces nodales du même rang, dans deux mouvements simples différents, sont en raison inverse des deux racines correspondantes à ces mouvements. *Les intervalles entre* *ces surfaces sont donc dans des rapports invariables, quel que soit ce mouvement.*

M. Poisson a eu occasion de considérer une équation semblable à l'équation (9), dans le mouvement vibratoire d'une membrane circulaire, qui offre beaucoup d'analogie avec celui que nous examinons ici. Il ramène sa résolution à celle de l'équation suivante dont les racines sont entièrement numériques, et ne dépendent d'aucune des données particulières de la question,

$$\int_0^l \cos(2\sqrt{x}\cos\omega)\sin^2\omega\, d\omega = 0.$$

Les deux plus petites racines de cette dernière équation, calculées par cet illustre géomètre, sont

$$x_1 = 3{,}55, \quad x_2 = 12{,}41;$$

d'où nous concluons

$$\alpha_1 = \frac{2a\sqrt{3{,}55}}{l}, \quad \alpha_2 = \frac{2a\sqrt{12{,}41}}{l},$$

et généralement

$$\alpha_n = \frac{2a\sqrt{x_n}}{l}.$$

Le temps T, pendant lequel s'opère une vibration, devient

$$\mathrm{T} = \frac{\pi l}{a\sqrt{x_n}}.$$

La quantité a, qui est la vitesse de propagation du son dans le gaz, sera égale à 333, si ce gaz n'est autre chose que l'air atmosphérique à la température 0°, en prenant le mètre pour unité; la formule précédente devient alors

$$\mathrm{T} = \frac{\pi l}{333\sqrt{x_n}}.$$

Dans la valeur de T, il n'y a que le facteur l qui dépende du tuyau, puisque x_n est racine d'une équation qui n'en dépend pas, d'où l'on conclut que *dans des tuyaux de largeurs différentes, le ton correspondant au même nombre de surfaces nodales est en raison inverse du diamètre du tuyau.*

L'expression $\frac{\alpha}{\alpha_n} l$ des rayons des surfaces nodales relatives au mouvement simple correspondant à la racine α_n, devient, en introduisant les racines de l'équation en x,

$$r = l\sqrt{\frac{x}{x_n}}.$$

Ces valeurs sont proportionnelles à l, et, par conséquent, *les surfaces nodales forment des systèmes semblables dans des tuyaux différents.*

On peut remarquer que les valeurs de α n'étant pas en progression arithmétique, les parties qui sont comprises entre deux surfaces nodales consécutives, et qui effectuent dans le même temps leurs vibrations dans le sens du rayon, n'ont pas la même épaisseur.

X. Pour que l'air renfermé dans le tuyau rende un son unique, il faut qu'il n'existe qu'un seul de ces mouvements simples. Le plus grave que l'on puisse obtenir correspond à α_1; il n'y a alors aucune surface nodale entre l'axe et la paroi du tuyau; la durée de l'oscillation totale est

$$T = \frac{2\pi l}{1254,84}.$$

Ainsi, pour un tuyau de 1 mètre de diamètre, le son le plus grave correspondrait à un nombre de vibrations égal à

$$\frac{1254,84}{\pi} = 399.42.$$

Le plus grave après celui-ci correspond à α_2; la durée de l'oscillation est

$$T = \frac{2\pi l}{2346,17}.$$

Le nombre d'oscillations exécutées dans une seconde est donc

$$\frac{2346,17}{2\pi l}:$$

et, dans le cas où le diamètre $2l$ est 1 mètre, ce nombre est

$$746,8.$$

Ce ton n'est pas tout à fait l'octave du premier. Le rayon de la surface nodale qui lui correspond, et qui peut être regardée comme une paroi résistante, est aussi un peu plus grand que la moitié de celui qui répond au premier ton. Car il est $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}l$ ou $\frac{1254,84}{2346,17}l$, qui est un peu plus grand que $\frac{1}{2}l$.

En déterminant les diverses racines α_3, α_4, etc., on connaîtrait tous les sons uniques, correspondants aux différents mouvements simples dont le tuyau est susceptible.

Comparaison avec le mouvement longitudinal dans un tube fermé aux deux bouts.

XI. Les réflexions du mouvement, aux parties opposées du tuyau, conduisent à comparer le ton résultant à celui que produisent les réflexions aux deux extrémités d'un tuyau fermé des deux côtés; en admettant, comme on le fait ordinairement, que les molécules du fluide n'aient de mouvement que parallèlement à l'axe du tuyau, et que tous les points compris dans une même section, dans l'état d'équilibre, y restent constamment.

Les équations du mouvement sont, dans ce cas, en désignant par L la longueur du tuyau, et prenant une des extrémités pour origine des x,

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\frac{d^2\varphi}{dx^2},$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0 \quad \text{et pour} \quad x = \mathrm{L},$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= \mathrm{F}(x) \\ \frac{d\varphi}{dt} &= f(x) \end{aligned}\right\} \quad \text{pour} \quad t = 0.$$

On satisfera à la première équation et aux conditions des extrémités, en prenant

$$\varphi = \sum \cos\frac{n\pi x}{\mathrm{L}}\left(\mathrm{A}\cos\frac{n\pi at}{\mathrm{L}} + \mathrm{B}\sin\frac{n\pi at}{\mathrm{L}}\right),$$

la somme se rapportant à toutes les valeurs entières de n depuis o jusqu'à l'infini. Les coefficients A, B se déterminent, comme on le sait, au moyen des fonctions $F(x)$, $f(x)$; mais nous n'avons pas besoin de connaître leur forme, et nous nous bornerons à l'expression précédente de φ. On en tire

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{\pi}{L}\sum n \sin\frac{n\pi x}{L}\left(A\cos\frac{n\pi at}{L} + B\sin\frac{n\pi at}{L}\right),$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\pi a}{L}\sum n \cos\frac{n\pi x}{L}\left(-A\sin\frac{n\pi at}{L} + B\cos\frac{n\pi at}{L}\right).$$

Si l'on considère le mouvement simple correspondant à une seule valeur de n, on voit que la durée de sa période est, pour tous les points,

$$T = \frac{2L}{na},$$

et que les valeurs de x pour lesquelles la vitesse est constamment nulle, sont données par l'équation

$$\sin\frac{n\pi x}{L} = 0,$$

d'où

$$x = \frac{iL}{n},$$

i désignant un nombre entier. Les surfaces nodales sont donc les sections perpendiculaires à l'axe, aux points qui le partagent en n parties égales.

Si $n = 1$, on a le son le plus grave; le nombre de vibrations effectuées dans une seconde est $\frac{a}{2L}$; et l'on voit qu'en multipliant ce nombre par le double de la longueur du tuyau, on aurait la vitesse a de propagation du son. Dans ce cas de $n = 1$, il n'y a pas de surface nodale entre les extrémités.

Si l'on prend $n = 2$, il y aura une surface nodale au milieu; et c'est ce mouvement qu'il est le plus naturel de comparer au mouvement suivant les rayons du cylindre, dans lequel il y a de même un nœud au milieu de l'intervalle compris entre les deux parties où ont lieu les réflexions. On a alors

$$T = \frac{L}{a}.$$

Supposons que la distance L des deux faces réfléchissantes soit égale à la distance correspondante $2l$ dans le mouvement suivant les rayons; la valeur de T devient

$$T = \frac{2l}{a},$$

et celle que nous avons trouvée pour l'autre cas est

$$T = \frac{2\pi l}{1254,84}.$$

Le second son du tuyau fermé et le premier du tuyau indéfini correspondent donc à des nombres de vibrations qui sont à très peu près dans le rapport de $a : \frac{1254,84}{\pi}$ ou de $1 : 1,2$, ou encore de $5 : 6$.

Mouvement de l'air dans un tuyau cylindrique d'une longueur finie.

XII. Notre objet principal étant d'apprécier l'influence des mouvements perpendiculaires à l'axe, sur le son produit, nous admettrons, comme on le fait ordinairement, que la condensation du fluide est nulle aux parties qui sont en communication avec l'air environnant. M. Poisson, au moyen d'une hypothèse particulière, a eu égard aux petits changements de densité qui peuvent avoir lieu en ces points, et a expliqué ainsi les petites différences que présentaient le calcul et l'expérience. Mais ces considérations nous écarteraient de notre objet présent, et nous remettrons à un autre temps cette discussion plus approfondie.

Soit l le rayon de la section perpendiculaire aux arêtes, et b la longueur du tuyau. Nous prendrons l'une des extrémités de l'axe pour origine des abscisses. L'état initial étant donné, on connaît les valeurs de

$$\frac{d\varphi}{dt},\ \frac{d\varphi}{dx},\ \frac{d\varphi}{dr}\quad \text{pour}\quad t = 0.$$

Ainsi, on connaît les valeurs de φ et $\frac{d\varphi}{dt}$ pour $t = 0$, la valeur de φ pouvant être augmentée d'une constante arbitraire, qui n'influera en rien sur les diverses circonstances du mouvement, qui ne dépendent que des dérivées de φ.

On aura donc à satisfaire aux équations suivantes :

$$(a)\qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} + \frac{d^2\varphi}{dx^2}\right),$$

$$(b)\qquad \frac{d\varphi}{dr} = 0 \quad \text{pour} \quad r = 0 \quad \text{et} \quad r = l,$$

$$(c)\qquad \frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0 \quad \text{et} \quad x = b.$$

$$\begin{aligned}(d)\qquad & \varphi = \Pi(x, r) \\ (e)\qquad & \frac{d\varphi}{dt} = \psi(x, r)\end{aligned}\Bigg\} \quad \text{pour} \quad t = 0,$$

les fonctions Π et ψ n'étant données qu'entre les limites

$$x = 0, \quad x = b, \quad \text{et} \quad r = 0, \quad r = l.$$

Nous poserons, comme dans le cas du tuyau indéfini,

$$\varphi = u\theta, \quad u = \int_0^\pi \cos\left(\frac{\alpha r}{a}\cos\omega\right) d\omega,$$

$$(f)\qquad \alpha\int_0^\pi \cos\left(\frac{\alpha l}{a}\cos\omega\right)\sin^2\omega\, d\omega = 0,$$

et l'on satisfera ainsi aux équations (a) et (b), quelque racine de l'équation (f) que l'on considère.

L'équation qui détermine la fonction de x et t désignée par θ, est

$$(g)\qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = a^2\frac{d^2\theta}{dx^2} - \alpha^2\theta,$$

et l'on doit avoir

$$\frac{d\theta}{dt} = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0 \quad \text{et} \quad x = b.$$

On aura une intégrale particulière de l'équation (g) en posant

$$\theta = (A\sin\mu x + B\cos\mu x)\left(M\cos t\sqrt{a^2\mu^2 + \alpha^2} + N\sin t\sqrt{a^2\mu^2 + \alpha^2}\right).$$

Pour que l'on ait $\frac{d\theta}{dt} = 0$ pour $x = 0$ quel que soit t, il faut faire $B = 0$, et pour que la même condition ait lieu pour $x = b$, il faut faire $\mu = \frac{n\pi}{b}$, n étant un nombre entier quelconque qu'il suffira de prendre positif.

En faisant la somme des valeurs particulières de θ relatives à toutes les valeurs de n depuis $n = 1$ jusqu'à $n = \infty$, on aura l'expression plus générale

$$\theta = \sum \sin n\pi \frac{x}{b} \left(\mathrm{M} \cos . t \sqrt{\frac{n^2 a^2 \pi^2}{b^2} + \alpha^2} + \mathrm{N} \sin . t \sqrt{\frac{n^2 a^2 \pi^2}{b^2} + \alpha^2} \right),$$

les coefficients M et N pouvant varier arbitrairement pour les différentes valeurs de n et pour une même valeur de α.

En considérant une racine particulière quelconque α_m de l'équation (f), on aura la valeur particulière suivante pour φ,

$$\varphi = u_m \sum \sin n\pi \frac{x}{b} \left(\mathrm{M} \cos . t \sqrt{\frac{n^2 a^2 \pi^2}{b^2} + \alpha_m^2} + \mathrm{N} \sin . t \sqrt{\frac{n^2 a^2 \pi^2}{b^2} + \alpha_m^2} \right);$$

et faisant la somme des expressions de ce genre, relatives à toutes les racines α de l'équation (f), on aura une valeur plus générale de φ, qui pourra satisfaire à toutes les conditions de la question, en déterminant convenablement M et N en fonction des quantités n et α_m.

Cette valeur de φ sera exprimée comme il suit :

$$(h) \qquad \varphi = \sum_{m=0}^{m=\infty} u_m \sum_{n=1}^{n=\infty} \sin \frac{n\pi x}{b} \left(\mathrm{M} \cos . t \sqrt{\frac{n^2 a^2 \pi^2}{b^2} + \alpha_m^2} + \mathrm{N} \sin . t \sqrt{\frac{n^2 a^2 \pi^2}{b^2} + \alpha_m^2} \right).$$

Et il suffit, pour qu'elle résolve la question, qu'elle donne

$$\varphi = \Pi(x, r) \quad \text{et} \quad \frac{d\varphi}{dt} = \psi(x, r) \quad \text{pour} \quad t = 0.$$

Les coefficients M et N doivent donc être déterminés par les équations suivantes :

$$(k) \qquad \sum u_m \sum \mathrm{M} \sin \frac{n\pi x}{b} = \Pi(x, r),$$

$$(l) \qquad \sum u_m \sum \mathrm{N} \sqrt{\frac{n^2 a^2 \pi^2}{b^2} + \alpha_m^2} . \sin \frac{n\pi x}{b} = \psi(x, r).$$

Pour satisfaire à l'équation (k), observons que chaque valeur de u_m est multipliée par une série qui renferme x et la même racine α_m de l'équation (f). Le premier membre de l'équation (k) pourrait donc se mettre sous la forme

$$\sum u_m \mathrm{F}_m(x, \alpha_m) = \Pi(x, r),$$

et en ne considérant que la variable r, on tirera de là

$$\mathrm{F}_m(x, \alpha_m) = \frac{\int_0^l \Pi(x, \gamma)\, u_m \gamma\, d\gamma}{\int_0^l \gamma\, u_m^2\, d\gamma},$$

et, d'après la signification de la fonction $\mathrm{F}_m(x, \alpha_m)$, on devra avoir

$$\mathrm{F}_m(x, \alpha_m) = \sum \mathrm{M} \sin \frac{n\pi x}{b},$$

d'où

$$\mathrm{M} = \frac{2}{b}\int_0^b \mathrm{F}_m(6, \alpha_m) \sin \frac{n\pi 6}{b}\, d6,$$

ou

$$(m) \qquad \mathrm{M} = \frac{2}{b}\int_0^b \sin \frac{n\pi 6}{b}\, d6 \, \frac{\int_0^l \Pi(6, \gamma)\, u_m \gamma\, d\gamma}{\int_0^l \gamma\, u_m^2\, d\gamma}.$$

On déduira de même de l'équation (l),

$$(n) \qquad \mathrm{N} = \frac{2}{b\sqrt{\frac{n^2 a^2 \pi^2}{b^2} + \alpha_m^2}} \int_0^b \sin \frac{n\pi 6}{b}\, d6 \, \frac{\int_0^l \psi(6, \gamma)\, u_m \gamma\, d\gamma}{\int_0^l \gamma\, u_m^2\, d\gamma}.$$

Les valeurs de M et N données par les formules (m), (n) sont les fonctions cherchées de n et α_m, qui, substituées dans l'équation (h), donnent la solution complète de la question.

XIII. Si l'on considère d'abord la partie de φ qui correspond à la seule racine $\alpha_0 = 0$, on aura, en la désignant par φ_0,

$$(p) \quad \varphi_0 = \sum \sin \frac{n\pi x}{b} \left\{ \begin{aligned} & \frac{4}{b l^2} \cos \frac{n a \pi t}{b} \int_0^b \sin \frac{n\pi 6}{b}\, d6 \int_0^l \Pi(6, \gamma)\, \gamma\, d\gamma \\ & + \frac{4}{n a \pi l^2} \sin \frac{n a \pi t}{b} \int_0^b \sin \frac{n\pi 6}{b}\, d6 \int_0^l \psi(6, \gamma)\, \gamma\, d\gamma \end{aligned} \right\}.$$

Cette valeur est celle que l'on trouverait pour φ, si l'état initial était indépendant de r, et que les fonctions $\Pi(x, r)$, $\psi(x, r)$ fussent remplacées par

$$\frac{2}{l^2}\int_0^l \Pi(x, \gamma)\,\gamma\, d\gamma, \quad \frac{2}{l^2}\int_0^l \psi(x, \gamma)\,\gamma\, d\gamma,$$

qui se réduisent à $\Pi(x)$, $\psi(x)$ lorsque les fonctions Π, ψ ne renferment pas r.

Le son simple le plus grave, fourni par la formule (p), correspond à $n = 1$, et les vibrations ont pour durée

$$T = \frac{2b}{a};$$

il y a une seule surface nodale qui est la section également distante des bases.

Tous les autres sons simples fournis par la même formule sont les harmoniques du premier, et la position des surfaces nodales correspondantes est connue depuis longtemps.

Examinons maintenant l'expression de φ_1, c'est-à-dire de la partie de φ qui provient de la racine α_1.

Si nous désignons par M_1, N_1 les valeurs de M, N que fournissent les équations (m), (n) quand on considère la racine

$$\alpha_1 = \frac{2a\sqrt{3,55}}{l},$$

et la seule valeur $n = 1$, nous aurons, en désignant par φ'_1 cette partie de φ_1,

$$\varphi_1 = \int_0^\pi \cos\left(\frac{\alpha_1 r}{a}\cos\omega\right) d\omega \,.\, \sin\frac{\pi x}{b}\left(M_1 \cos . t\sqrt{\frac{a^2\pi^2}{b^2} + \alpha_1^2} + N_1 \sin . t\sqrt{\frac{a^2\pi^2}{b^2} + \alpha_1^2}\right).$$

L'état initial qui correspond à cette valeur de φ est celui qui donnera le son le plus grave que puisse rendre le tuyau, lorsque les points du fluide ont un mouvement dans le sens des rayons.

Tous les points situés dans l'axe n'ont de mouvement que dans le sens de cet axe, et sont les seuls dans ce cas.

Tous les points situés dans la section également distante des deux bases n'ont, au contraire, aucun mouvement dans le sens de l'axe;

mais ils en ont dans le sens des rayons, excepté toutefois ceux qui sont situés à la circonférence ou au centre.

L'intervalle de temps après lequel a lieu le retour de tous les points à leur première position, ou la durée de la vibration, est

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{a^2\pi^2}{b^2} + \alpha_1^2}} = \frac{2b}{a\sqrt{1 + \frac{14,2.b^2}{\pi^2 l^2}}},$$

au lieu de $\frac{2b}{a}$ que nous avons trouvé dans le même cas, lorsqu'il n'y a aucun mouvement dans le sens des rayons. Ce mouvement produit un son plus aigu, dans le rapport de

$$\sqrt{1 + \frac{14,2.b^2}{\pi^2 l^2}} : 1,$$

qui est d'autant plus grand que le tuyau est plus étroit par rapport à sa longueur. Ce rapport peut même être regardé comme proportionnel à $\frac{b}{l}$, dès que la longueur b est égale à plusieurs fois la largeur $2l$.

Pour donner une idée de l'influence des mouvements perpendiculaires à l'axe, considérons un tuyau dont la longueur soit égale à dix fois la largeur; il faudra faire alors $\frac{b}{l} = 20$, et le rapport précédent devient à très-peu près

$$24 : 1,$$

ce qui correspond à la quadruple octave de la quinte au-dessus du ton que l'on obtiendrait s'il n'y avait pas de mouvement dans le sens des rayons, et dont l'expérience s'éloigne très peu.

Il me semble donc que l'on est en droit de conclure de là que, dans les sons rendus par les tuyaux cylindriques, les molécules du fluide doivent être regardées comme n'ayant que des mouvements parallèles à l'axe; du moins lorsque l'ébranlement qui le produit est le même pour tous les points également distants de l'axe.

Les légères différences que présente l'expérience et la théorie fondée sur l'hypothèse des mouvements parallèles à l'axe, ne peuvent tenir à l'inexactitude de cette hypothèse; puisqu'en introduisant les mouvements perpendiculaires on obtient un son extrêmement éloigné de ceux que fournit l'expérience, et que, par conséquent, ces derniers mouvements ne sont pour rien dans l'effet observé. Ce n'est pas à dire qu'on ne pourrait réellement les produire; mais je ne connais sur ce point aucune expérience qui puisse servir à vérifier les indications du calcul. La formule précédente montre qu'ils seront d'autant plus aigus, et, par conséquent, d'autant plus difficiles à produire, que le tuyau sera plus étroit par rapport à sa longueur.

Quant aux causes qui peuvent produire la différence qui a lieu entre la théorie et le calcul, on en a indiqué plusieurs qu'il n'entre pas dans mon objet de discuter en ce moment.

On arriverait à des conséquences analogues en considérant un tuyau prismatique. Nous allons en indiquer rapidement le calcul, en supposant que la base soit un rectangle quelconque.

Mouvement de l'air dans un tuyau fini à base rectangulaire.

XIV. Désignons par $2m$, $2n$ les côtés de la base, et par l la longueur du tuyau, qui est ouvert aux deux bouts. On devra avoir les conditions suivantes, en supposant que l'axe des x soit l'axe du tuyau, l'origine à une de ses extrémités, et les axes des y et des z parallèles aux deux côtés de la base,

$$\frac{d\varphi}{dy} = 0 \quad \text{pour} \quad y = \pm m,$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = 0 \quad \text{pour} \quad z = \pm n,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0 \quad \text{et} \quad x = l.$$

On satisfait à l'équation aux différentielles partielles et à ces conditions particulières au moyen de la valeur suivante

$$\varphi = \sum \sin\frac{p\pi x}{l}\cos\frac{q\pi y}{m}\cos\frac{r\pi z}{n}\left(\mathrm{M}\sin\pi at\sqrt{\frac{p^2}{l^2}+\frac{q^2}{m^2}+\frac{r^2}{n^2}} + \mathrm{N}\cos\pi at\sqrt{\frac{p^2}{l^2}+\frac{q^2}{m^2}+\frac{r^2}{n^2}}\right),$$

cette somme s'étendant à toutes les valeurs entières et positives de p, q, r; et les coefficients M et N étant des fonctions de ces quantités, qu'on déterminera sans difficulté d'après l'état initial.

Pour un même système de valeurs de p, q, r, on aura un mouvement simple correspondant à un état initial particulier, et la durée de la vibration aura pour expression

$$T = \frac{2}{a\sqrt{\frac{p^2}{l^2} + \frac{q^2}{m^2} + \frac{r^2}{n^2}}}.$$

Si l'on prend $q = 0$, $r = 0$, le mouvement est le même pour tous les points d'une même section, et on retombe sur la formule ordinaire

$$T = \frac{2l}{pa}.$$

Les vibrations sont plus rapides s'il y a des mouvements perpendiculaires à l'axe; parce que q et r étant différents de zéro, le dénominateur de T est plus grand, et T plus petit. On voit même qu'elles sont d'autant plus rapides, toutes choses égales d'ailleurs, que les dimensions de la base sont plus petites.

Le son le plus grave que le tuyau puisse rendre lorsque les composantes de la vitesse parallèlement aux arêtes de la base ne sont pas nulles, correspond à $p = 1$, $q = 1$, $r = 1$, et la durée de la vibration est alors

$$T = \frac{2}{a\sqrt{\frac{1}{l^2} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}}}.$$

Si les mouvements étaient tous parallèles à l'axe, on aurait pour le son le plus grave

$$T = \frac{2l}{a}.$$

Les nombres de vibrations correspondants à ces deux sons sont dans le rapport de

$$\sqrt{1 + \frac{l^2}{m^2} + \frac{l^2}{n^2}} : 1.$$

Si les cotés $2m$, $2n$ de la base sont suffisamment petits par rapport à la longueur du tuyau, on peut supprimer l'unité sous le radical; il y aurait à peine quelques millièmes d'erreur, si la longueur était seulement égale à cinq fois la largeur. En faisant cette simplification, le rapport des nombres de vibrations devient

$$\sqrt{\frac{l^2}{m^2} + \frac{l^2}{n^2}} : 1,$$

ou

$$\frac{l\sqrt{m^2+n^2}}{mn} : 1.$$

Ce rapport est donc proportionnel à la longueur du tuyau, à la diagonale de sa base, et en raison inverse de la surface de cette base.

XV. Supposons, par exemple, un tuyau à base carrée, et dont la longueur soit égale à dix fois la largeur; le rapport en question deviendra

$$28,28 : 1,$$

et le premier son serait presque la cinquième octave au-dessus du second, qui est sensiblement celui que donne l'expérience.

D'où l'on peut encore conclure que ce ne sont pas les mouvements paralleles aux côtés de la base qui produisent les petites différences qui ont lieu entre l'observation et le calcul.

Dans ce tuyau cylindrique dont la longueur est égale à dix fois la largeur, comme dans cet exemple, nous avons trouvé, entre les deux sons dont il est question, le rapport très-approché

$$24 : 1;$$

il est moindre que pour le tuyau à base carrée, dans le rapport de

$$6 : 7,07.$$

XVI. Les valeurs de T données dans les n^os XIII et XIV, s'accordent avec une loi générale annoncée par M. Savart, démontrée ensuite analytiquement par M. Cauchy, et que M. Savart a retrouvée plus tard dans les ouvrages du P. Mersenne.

Cette loi consiste en ce que les vibrations de corps semblables considérés dans des circonstances semblables, ont des durées proportionnelles aux dimensions homologues de ces corps. Or la valeur

$$T = \frac{2b}{a\sqrt{1+\frac{14,2}{\pi^2}\cdot\frac{b^2}{l^2}}},$$

est proportionnelle à b, si $\frac{b}{l}$ reste constant, c'est-à-dire si les tubes sont semblables. De même, la valeur

$$T = \frac{2}{a\sqrt{\frac{p^2}{l^2}+\frac{q^2}{m^2}+\frac{r^2}{n^2}}},$$

donnée dans le n° XIV, est proportionnelle aux dimensions l, m, n, si elles varient proportionnellement, ou, en d'autres termes, si l'on considère des tuyaux semblables; car elle peut se mettre sous la forme

$$T = \frac{2l}{a\sqrt{p^2 + q^2\frac{l^2}{m^2} + r^2\frac{l^2}{n^2}}},$$

et l'on voit qu'elle varie proportionnellement à l si $\frac{l}{m}$, $\frac{l}{n}$ sont constants. Ces résultats vérifient donc la loi en question.

Propagation du mouvement de l'air dans un tuyau conique.

XVII. Considérons maintenant un tuyau conique indéfini, d'une forme quelconque. Prenons son sommet pour origine, et une direction quelconque dans son intérieur, pour axe des x. Soient u le cosinus de l'angle formé par le rayon vecteur r avec cet axe, ω l'angle formé avec l'axe des y par sa projection sur le plan (y, z); on aura, comme on le sait,

$$(1)\qquad \frac{d^2 . r\varphi}{dt^2} = a^2 \left\{ \frac{d^2 . r\varphi}{dr^2} + \frac{d\left[(1-u^2)\frac{d . r\varphi}{du}\right]}{r^2 du} + \frac{1}{r^2(1-u^2)}\frac{d^2 . r\varphi}{d\omega^2} \right\}.$$

On donne pour $t = 0$ les valeurs de φ et $\frac{d\varphi}{dt}$ pour tous les points du fluide compris entre deux sphères ayant leurs centres à l'origine, et des rayons égaux respectivement à b et $b + l$. Ces valeurs seront exprimées par deux fonctions de r, u, ω, qui seront nulles pour toute valeur de r non comprise entre b et $b + l$. Les limites des valeurs de u pour lesquelles ces fonctions sont données, varient avec ω; elles partent de 1 et s'étendent, pour chaque valeur de ω, jusqu'à la valeur correspondante à la génératrice du cône qui est située dans le plan passant par l'axe des x et faisant l'angle ω avec l'axe des y. Quant aux valeurs de ω, elles passent de zéro à 2π pour les valeurs de u comprises entre 1 et la plus petite de celles qui déterminent des cônes de révolution autour de l'axe des x, compris entièrement dans le cône donné. A partir de là, les valeurs de ω auront des solutions de continuité entre zéro et 2π, qui dépendront des intersections du cône donné avec les cônes de révolution, déterminés par les valeurs successives de u.

Cela posé, nous allons chercher la valeur moyenne de $r\varphi$ pour les points situés à la distance r de l'origine; elle aura pour expression

$$\frac{\int\int r^2\, du\, d\omega \,.\, \varphi r}{r^2 s} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{s}\int\int r\varphi\, du\, d\omega,$$

les intégrales se rapportant à tout l'intérieur du tuyau, et s désignant l'aire que ce tuyau intercepte sur la sphère décrite de l'origine avec l'unité pour rayon.

Posons

$$\int\int r\varphi\, du\, d\omega = v,$$

et intégrons les deux membres de l'équation (1) entre les mêmes limites que v, après les avoir multipliés par $du\, d\omega$.

Les deux termes

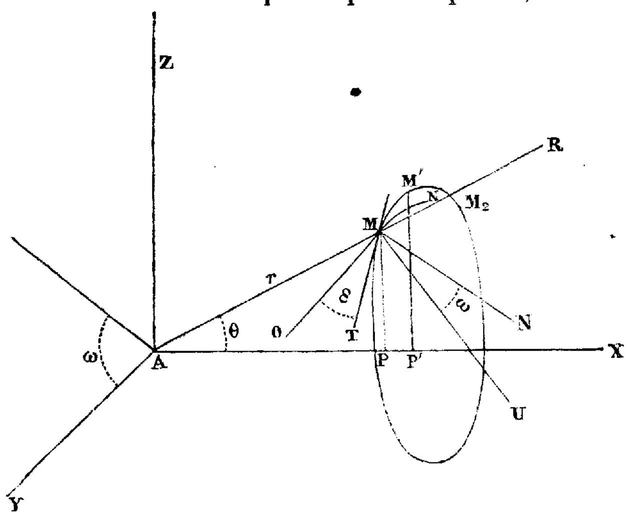
$$\frac{d^2 r\varphi}{dt^2}, \quad \frac{d^2 r\varphi}{dr^2}$$

donneront

$$\frac{d^2 v}{dt^2}, \quad \frac{d^2 v}{dr^2}.$$

Avant d'intégrer les deux autres, nous chercherons l'expression des composantes de la vitesse d'un point quelconque M, suivant trois nou-

Fig. 2.



velles directions rectangulaires; la première MR sera celle du rayon vecteur r; la seconde MO, celle de la perpendiculaire au plan passant par l'axe des x et le point que l'on considère et du côté opposé au sens de ω croissant; enfin, la troisième MU sera dans ce dernier plan, et perpendiculaire au rayon vecteur, en sens opposé à celui de θ croissant.

L'expression de la première a été donnée par M. Poisson; elle est $\frac{d\varphi}{dr}$. Nous ne rapporterons pas ici le calcul des deux autres; nous nous bornerons à en donner les valeurs, qui sont respectivement, en grandeurs et en signes,

$$\frac{-\frac{d\varphi}{d\omega}}{r\sqrt{1-u^2}} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{1-u^2}}{r}\frac{d\varphi}{du}.$$

De ces trois expressions, il est facile de déduire la composante normale à la surface du cône, pour une molécule en contact avec cette surface.

En effet, soit ε l'angle de cette normale avec MU, M étant considéré maintenant comme un point de la surface conique; cet angle sera le même que celui de MO avec la tangente MT à la section sphérique, vu que les quatre droites MO, MT, MU, MN sont dans le plan perpendiculaire à AM. Pour avoir la composante de la vitesse suivant MN, il faut projeter les trois composantes rectangulaires de cette vitesse sur cette direction. Celle qui est dirigée suivant MR donnera zéro, et les deux autres donneront

$$(2) \qquad \frac{\sqrt{1-u^2}}{r}\frac{d\varphi}{du}\cos\varepsilon + \frac{1}{r\sqrt{1-u^2}}\frac{d\varphi}{d\omega}\sin\varepsilon,$$

si le point M est tel, que la distance MP à l'axe des x augmente avec ω. Dans le cas contraire, la composante normale de la vitesse aurait pour expression

$$(3) \qquad \frac{\sqrt{1-u^2}}{r}\frac{d\varphi}{du}\cos\varepsilon - \frac{1}{r\sqrt{1-u^2}}\frac{d\varphi}{d\omega}\sin\varepsilon.$$

Cela posé, intégrons d'abord par rapport à u le terme

$$\frac{d\left[(1-u^2)\frac{d.r\varphi}{du}\right]}{r^2du}du\,d\omega \quad \text{ou} \quad \frac{d\left[(1-u^2)\frac{d\varphi}{du}\right]}{r\,du}du\,d\omega,$$

et considérons toujours les différentielles indépendantes du, $d\omega$ comme ayant un signe constant et positif. Nous obtiendrons par cette première intégration

$$\frac{(1-u^2)}{r}\frac{d\varphi}{du}\,d\omega,$$

qu'il faudra prendre entre les limites u_1 et 1, u_1 étant la valeur de u relative au point M du contour. On a ainsi

$$(4)\qquad -\frac{(1-u_1^2)}{r}\left(\frac{d\varphi}{du}\right)_1 d\omega,$$

qu'il faut intégrer entre $\omega = 0$ et $\omega = 2\pi$. Mais il est nécessaire de commencer par lui donner une autre forme.

Pour cela, décrivons du point P comme centre un arc de cercle partant de M et terminé en N au plan mené par AX, en faisant un angle $d\omega$ avec le plan MAX; cet arc MN sera tangent à MO, et, par conséquent, fera avec le contour de la section sphérique le même angle ε que la ligne MO avec la tangente MT à ce contour. Désignons par ds l'arc infiniment petit de cette courbe compris entre les deux plans qui font entre eux l'angle $d\omega$, nous aurons

$$d\omega = \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{MP}} = \frac{\mathrm{MN}}{r\sqrt{1-u^2}},\quad \mathrm{MN} = ds\cos\varepsilon,$$

et l'expression (4) devient la suivante

$$(5)\qquad -\frac{\sqrt{1-u_1^2}}{r^2}\left(\frac{d\varphi}{du}\right)_1 ds\cos\varepsilon,$$

qu'il faudra intégrer dans toute l'étendue du contour de la section. Mais avant d'opérer cette intégration, il faut en opérer une première sur le dernier terme de l'équation (1), et réunir ces deux résultats.

Ce terme, multiplié par $du\,d\omega$, devient

$$\frac{1}{r^2(1-u^2)}\frac{d^2r\varphi}{d\omega^2}\,du\,d\omega \quad\text{ou}\quad \frac{1}{r(1-u^2)}\frac{d^2\varphi}{d\omega^2}\,du\,d\omega\,;$$

intégrons-le d'abord par rapport à ω, en laissant u constant, nous obtiendrons

$$(6)\qquad \frac{du}{r(1-u^2)}\cdot\frac{d\varphi}{d\omega}.$$

Or, pour les valeurs de u qui donneront des points de l'intérieur du tuyau, quel que soit ω, il y a continuité dans les éléments de cette intégrale depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = 2\pi$; et comme, à ces deux limites, $\frac{d\varphi}{d\omega}$ a la même valeur, l'intégrale est nulle. Il suffit donc de considérer les valeurs de u pour lesquelles la surface conique qu'elles déterminent autour de AX coupe le contour de la section. On aura alors plusieurs intégrales ayant pour limites ces points d'intersection, considérés deux à deux; et l'on devra retrancher les valeurs de l'expression (6) qui se rapportent aux points où la distance MP croît avec ω, des valeurs relatives aux points où MP décroît quand ω augmente.

Supposons, par exemple, que les deux points M, M_2 correspondent à une même valeur de u; que MP augmente avec ω, et que le contraire ait lieu pour M_2 : alors ces deux points donneront, pour l'expression (6),

$$\frac{du}{r(1-u_2^2)}\left(\frac{d\varphi}{d\omega}\right)_2 - \frac{du}{r(1-u_1^2)}\left(\frac{d\varphi}{d\omega}\right)_1, \tag{7}$$

où l'on regarde toujours du comme positif; et il en serait de même pour les autres couples d'intersections, de la section sphérique avec le cône droit déterminé par la même valeur de u.

Transformons l'expression (7), et, au lieu de du, introduisons ds, auquel nous supposerons la même valeur que précédemment. On a

$$\text{MP} = r\sqrt{1-u^2}, \quad d.\text{MP} = \frac{-r u\, du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Soit M' le point du contour qui correspond à l'accroissement du; M'P' une perpendiculaire sur AX, qui fera avec MP un angle infiniment petit : la différence M'P' — MP ou d.MP pourra être regardée comme la projection de MM' ou ds sur M'P'; elle sera donc égale à ds multiplié par le cosinus de l'angle de la tangente MT avec M'P' ou avec MP; on peut donc poser

$$d.\text{MP} = ds \cos \text{TMP}.$$

Or, dans l'angle trièdre formé par les lignes MO, MT, MP, l'angle OMP est droit, l'angle OMT est égal à ε, et l'angle des faces OMP, OMT est égal à PMU ou θ. Donc on a

$$\cos \mathrm{TMP} = \sin \varepsilon \cos \theta = u \sin \varepsilon,$$

donc

$$d.\mathrm{MP} = u\,ds.\sin \varepsilon,$$

et enfin

$$\frac{-r u\,du}{\sqrt{1-u^2}} = u\,ds \sin \varepsilon;$$

d'où, en observant que du et ds sont toujours pris positivement,

$$\frac{r\,du}{\sqrt{1-u^2}} = ds \sin \varepsilon.$$

L'expression (7) devient donc

$$(8) \qquad \frac{ds.\sin \varepsilon_2}{r^2\sqrt{1-u_2^2}}\left(\frac{d\varphi}{d\omega}\right)_2 - \frac{ds.\sin \varepsilon_1}{r^2\sqrt{1-u_1^2}}\left(\frac{d\varphi}{d\omega}\right)_1.$$

Le second terme, réuni à l'expression (5) qui se rapporte au même point M, donne

$$\frac{-\sqrt{1-u_1^2}}{r^2}\left(\frac{d\varphi}{du}\right)_1 ds \cos \varepsilon_1 - \frac{1}{r^2\sqrt{1-u_1^2}}\left(\frac{d\varphi}{d\omega}\right)_1 ds \sin \varepsilon_1,$$

ce qui n'est autre chose que l'expression (2) multipliée par $\frac{ds}{r}$; et comme cette dernière est la valeur de la composante de la vitesse dans le sens de la normale au tuyau, elle est constamment nulle. Donc tous les termes des intégrales qui se rapportent aux points tels que M, où la distance MP croît avec ω, se détruisent en chacun de ces points.

Passons aux points tels que M_2, où MP décroît quand ω augmente. Pour cela, il faut réunir le premier terme de l'expression (8) à l'expression (5) prise pour le point M_2, ce qui donne

$$\frac{-\sqrt{1-u_2^2}}{r^2}\left(\frac{d\varphi}{du}\right)_2 ds \cos \varepsilon_2 + \frac{ds.\sin \varepsilon_2}{r^2\sqrt{1-u_2^2}}\left(\frac{d\varphi}{d\omega}\right)_2,$$

quantité égale à zéro, puisqu'elle ne diffère que par le facteur $\frac{ds}{r}$ de l'expression (3) qui est nulle au point M_2.

D'où il résulte que les intégrales des deux derniers termes de l'équation (1), prises par rapport à u et ω dans toute la surface interceptée par le tuyau sur la sphère de rayon r, sont nulles; et que, par conséquent, l'équation (1), multipliée par $du\,d\omega$ et intégrée dans toute l'étendue de cette même surface, conduit à la suivante

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2 \frac{d^2\varphi}{dr^2}.$$

En appliquant à cette équation la discussion du n° III, on parviendra à des conséquences analogues; et entre autres choses, on reconnaîtra encore que *le mouvement se propage avec la vitesse* a *dans le tuyau conique, de forme quelconque;* vitesse *qui est encore la même que si le milieu gazeux était indéfini dans tous les sens.*

Propagation du mouvement entre deux plans indéfinis qui se coupent.

XVIII. Nous supposerons que l'ébranlement primitif soit le même dans tous les plans perpendiculaires à l'intersection des deux plans dont il s'agit; nous prendrons cette ligne pour axe des z, et nous déterminerons un point quelconque par sa distance r à cet axe, et par l'angle θ formé par ce point avec le plan zx, qui sera, par exemple, l'un des deux plans donnés.

L'équation (1) du n° I devient alors

$$(1) \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2 \left(\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2\varphi}{d\theta^2}\right).$$

La composante de la vitesse dans le plan méridien et perpendiculaire au rayon est $\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{d\theta}$. Désignons par ϵ l'angle des deux plans; on devra avoir

$$(2) \qquad \frac{d\varphi}{d\theta} = 0 \quad \text{pour} \quad \theta = 0 \quad \text{et pour} \quad \theta = \epsilon.$$

Les deux composantes de la vitesse initiale étant connues pour chaque point, ainsi que la condensation, on devra encore satisfaire aux conditions suivantes:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dr} &= \mathrm{F}(r, \theta) \\ \frac{d\varphi}{d\theta} &= f(r, \theta) \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \psi(r, \theta) \end{aligned}\right\} \quad \text{pour} \quad t = 0.$$

Les deux premières font connaître la valeur initiale de φ à une constante arbitraire près, qui n'influera en rien sur les résultats : de sorte qu'on connaît les valeurs de φ et $\frac{d\varphi}{dt}$ pour $t = 0$. Nous pourrons ainsi remplacer les trois dernières conditions par les deux suivantes :

$$(3) \qquad \left.\begin{aligned} \varphi &= \chi(r, \theta) \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \psi(r, \theta) \end{aligned}\right\} \quad \text{pour} \quad t = 0.$$

Multiplions les deux membres de l'équation (1) par $d\theta$, et intégrons-les entre les limites zéro et 6; $\int_0^6 \frac{d^2\varphi}{d\theta^2}\,d\theta$ sera nulle, en vertu des équations (2). Si donc nous posons

$$\int_0^6 \varphi\,d\theta = v,$$

nous aurons

$$(4) \qquad \frac{d^2 v}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr}\right),$$

équation dont on connaît la solution générale au moyen d'intégrales définies simples. Mais il nous sera plus commode ici d'employer des intégrales définies doubles. Pour cela, nous poserons $r^2 = x^2 + y^2$, et l'équation (4) deviendra

$$(5) \qquad \frac{d^2 v}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2}\right).$$

Les valeurs de v et $\frac{dv}{dt}$, relatives à $t = 0$, seront des fonctions de r ou de $\sqrt{x^2 + y^2}$ déterminées par les équations (3); et v sera une fonction de t et $\sqrt{x^2 + y^2}$ exprimée par des intégrales définies doubles, au moyen d'une formule très-connue, donnée par M. Poisson. Et l'on conclut, comme on le sait, de la forme de cette intégrale, que la valeur de v, et, par suite, l'ébranlement du gaz compris entre les deux plans fixes, se propage avec une vitesse égale à a; c'est-à-dire avec la même vitesse que si le milieu était indéfini et libre de tous côtés.

Mouvement de l'air dans un tuyau conique fini.

XIX. Les mouvements des molécules du gaz, dans le sens perpendiculaire à la longueur, n'ayant pas lieu dans les cas ordinaires, comme nous l'avons reconnu dans une discussion précédente, il serait suffisant de considérer les mouvements dans le sens des rayons partant du sommet du cône droit à base circulaire dont une portion finie quelconque forme le tuyau en question. Nous indiquerons néanmoins la marche à suivre pour la solution complète du problème, en supposant l'ébranlement symétrique autour de l'axe du tuyau. On aura, dans ce cas,

$$(1)\qquad \frac{d^2.r\varphi}{dt^2} = a^2\left\{\frac{d^2.r\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r^2}\,\frac{d\left[(1-u^2)\dfrac{d.r\varphi}{du}\right]}{du}\right\}.$$

Désignons par 6 la valeur de u relative aux génératrices de la surface intérieure du tuyau; la vitesse estimée perpendiculairement au rayon vecteur et dans le plan méridien devant être nulle pour les points de cette surface, nous aurons

$$(2)\qquad \frac{d\varphi}{du} = 0 \quad \text{pour} \quad u = 1 \quad \text{et pour} \quad u = 6.$$

Soit $\varphi r = \mathrm{U}\theta$, U étant fonction de u seulement, et θ une fonction de r et t; l'équation (1) deviendra par cette substitution

$$\frac{1}{\theta}\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{a^2}{\theta}\,\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{a^2}{r^2}\,\frac{d\left[(1-u^2)\dfrac{d\mathrm{U}}{du}\right]}{\mathrm{U}\,du},$$

et il faut que $\dfrac{d\left[(1-u^2)\dfrac{d\mathrm{U}}{du}\right]}{\mathrm{U}\,du}$ soit indépendant de u, sans quoi θ en dépendrait. On devra donc avoir

$$(3)\qquad \frac{d\left[(1-u^2)\dfrac{d\mathrm{U}}{du}\right]}{du} = -\,\alpha^2\mathrm{U},$$

α désignant une constante arbitraire; d'où résulte

$$(4)\qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\theta}{dr^2} - \frac{\alpha^2\theta}{r^2}\right).$$

L'équation (2) devient alors

$$\frac{dU}{du} = 0 \quad \text{pour} \quad u = 1 \quad \text{et} \quad u = 6. \tag{5}$$

Si l'on représente par U_1, U_2 deux intégrales particulières de l'équation (3), son intégrale générale sera

$$U = AU_1 + BU_2,$$

A et B étant des constantes arbitraires, et, en vertu de l'équation (5), on devra avoir

$$A\frac{dU_1}{du} + B\frac{dU_2}{du} = 0 \quad \text{pour} \quad u = 1,$$

$$A\frac{dU_1}{du} + B\frac{dU_2}{du} = 0 \quad \text{pour} \quad u = 6.$$

L'une de ces deux équations détermine $\frac{A}{B}$, et substituant sa valeur dans l'autre, on a une équation qui ne renfermera d'indéterminée que la constante α, et donnera pour elle une infinité de valeurs réelles.

Passons maintenant à l'équation (4), et posons

$$\theta = z(M \cos amt + N \sin amt).$$

z ne dépendant que de r; on obtiendra ainsi

$$\frac{d^2 z}{dr^2} + z\left(m^2 - \frac{\alpha^2}{r^2}\right) = 0.$$

On peut satisfaire à cette équation au moyen de l'expression suivante

$$z = r^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4\alpha^2}} \int_0^\pi \cos(mr\cos\omega)\sin^{\sqrt{1+4\alpha^2}}\omega\, d\omega.$$

Connaissant une intégrale particulière, on en connaît facilement une seconde. Si on les désigne respectivement par z_1, z_2, la valeur générale de z sera

$$z = Pz_1 + Qz_2,$$

P et Q étant des constantes arbitraires.

En supposant toujours le tube ouvert aux deux bouts, et désignant par b et $b + l$ les valeurs de r correspondantes aux extrémités, on devra avoir $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ pour $r = b$ et $r = b + l$. On doit donc aussi avoir $\frac{d\theta}{dt} = 0$, et, par suite, $z = 0$ pour ces mêmes valeurs de r; ce qui donne

$$Pz_1 + Qz_2 = 0 \quad \text{pour} \quad r = b,$$
$$Pz_1 + Qz_2 = 0 \quad \text{pour} \quad r = b + l;$$

ce qui détermine encore $\frac{P}{Q}$, qui, éliminé entre ces deux équations, conduit à une équation entre α et m; d'où l'on tirera, pour chaque valeur de α, une infinité de valeurs réelles de m.

En ajoutant les solutions relatives à toutes ces valeurs de α et m, multipliées par des constantes arbitraires, on aura une valeur plus générale de $r\varphi$, et il ne restera plus qu'à satisfaire à l'état initial, qui détermine les valeurs de $r\varphi$ et $\frac{d.r\varphi}{dt}$ pour $t = 0$.

Si l'on pose

$$U_1 + \frac{B}{A} U_2 = v \quad \text{et} \quad z_1 + \frac{Q}{P} z_2 = \zeta,$$

$\frac{B}{A}$ et $\frac{Q}{P}$ étant des fonctions déterminées des constantes α et m, on aura

$$r\varphi = \sum A v \sum P\zeta \cos amt + \sum A_1 v \sum P_1 \zeta \sin amt.$$

Dans la somme relative à m, P varie arbitrairement d'une valeur de m à l'autre, et la somme s'étend à toutes les valeurs de m correspondantes à une même valeur de α. Cette sommation étant effectuée, on multipliera le résultat par Av, et l'on fera la somme des expressions semblables relatives à toutes les valeurs de α, la constante A changeant arbitrairement d'une valeur de α à l'autre. Il faut entendre de la même manière la seconde partie de $r\varphi$.

Cela posé, si l'on désigne par $F(r, u)$ et par $f(r, u)$ les valeurs initiales de $r\varphi$ et $\frac{dr\varphi}{dt}$, on devra avoir

$$\sum A v \sum P\zeta = F(r, u), \quad \sum A_1 u \sum P_1 \zeta m = \frac{1}{a} f(r, u),$$

équations qui détermineront les constantes A, P, A_1, P_2 par les méthodes ordinaires.

Nous allons considérer maintenant le cas particulier où φ est indépendant de u; ce qui revient à ne prendre que la valeur $\alpha = 0$, dans le calcul général que nous venons d'indiquer.

Tuyau conique ouvert par les deux bouts.

XX. La valeur de φ étant supposée indépendante de u, on a

$$\frac{d^2 r\varphi}{dt^2} = a^2 \frac{d^2(r\varphi)}{dr^2}. \tag{1}$$

Le tuyau étant en communication avec l'air extérieur, à ses deux extrémités, on aura

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad \text{pour} \quad r = b \quad \text{et pour} \quad r = b + l; \tag{2}$$

et, de plus, on aura, d'après l'état initial,

$$\varphi = \mathrm{F}(r), \quad \frac{d\varphi}{dt} = f(r) \quad \text{pour} \quad t = 0. \tag{3}$$

On satisfera à l'équation (1) en prenant

$$r\varphi = (\mathrm{A} \sin mat + \mathrm{B} \cos mat)(\sin mr + \mathrm{M} \cos mr),$$

et l'on devra avoir, en vertu de l'équation (2),

$$\sin mb + \mathrm{M} \cos mb = 0,$$
$$\sin(mb + ml) + \mathrm{M} \cos(mb + ml) = 0.$$

Éliminant M, on obtient

$$\sin ml = 0,$$

d'où

$$m = \frac{n\pi}{l},$$

n désignant un nombre entier quelconque.

La valeur de $r\varphi$ prendra ainsi la forme suivante, en remplaçant M par sa valeur $-\operatorname{tang} mb$,

$$r\varphi = \left(\mathrm{A} \sin \frac{n\pi at}{l} + \mathrm{B} \cos \frac{n\pi at}{l}\right) \sin \frac{n\pi(r-b)}{l},$$

A et B désignant des constantes arbitraires, qui changent avec les valeurs de n; et il suffira de considérer ces dernières comme positives.

car les valeurs négatives donneraient des expressions qui rentreraient dans les premières.

Ajoutant les intégrales particulières correspondantes à toutes les valeurs de n, on aura

$$(4)\qquad r\varphi = \sum \left(\mathrm{A}\sin\frac{n\pi at}{l} + \mathrm{B}\cos\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi(r-b)}{l},$$

et les coefficients A et B seront déterminés par les équations (3), qui donnent

$$\sum \mathrm{B}\sin\frac{n\pi(r-b)}{l} = r\mathrm{F}(r),$$

$$\sum n\mathrm{A}\sin\frac{n\pi(r-b)}{l} = \frac{rl}{\pi a}f(r).$$

On tire de là

$$\mathrm{A} = \frac{2}{n\pi a}\int_b^{b+l} rf(r)\sin\frac{n\pi(r-b)}{l}\,dr,$$

$$\mathrm{B} = \frac{1}{l}\int_b^{b+l} r\mathrm{F}(r)\sin\frac{n\pi(r-b)}{l}\,dr.$$

En prenant ces valeurs pour A et B, l'équation (4) donne la solution complete de la question.

On en tire d'abord cette conséquence, que tous les points reviennent périodiquement à l'état de repos après un intervalle de temps T ayant pour valeur

$$\mathrm{T} = \frac{2l}{a},$$

ce qui montre que *le son rendu par un tuyau conique est le même que celui que rend un tuyau cylindrique de même longueur, ouvert aux deux bouts comme le premier.*

Si l'on considère le son simple correspondant à une seule valeur de n, les valeurs de r correspondantes aux sections où la condensation est constamment nulle, et que l'on désigne ordinairement sous le nom de *ventres*, seront données par l'équation

$$\sin\frac{n\pi(r-b)}{l} = 0.$$

ou

$$r = b + \frac{k}{n} l,$$

k désignant un nombre entier quelconque.

Le nombre des ventres est donc $n + 1$; ils sont situés aux extrémités du tuyau, et aux points qui le divisent en n parties égales. Si $n = 1$, on a le son simple le plus grave, et il n'y a de ventres qu'aux deux extrémités.

Les *nœuds* ou les points qui sont constamment en repos s'obtiendront en posant

$$\frac{d\varphi}{dr} = 0.$$

Pour le son simple correspondant à une valeur quelconque de n, cette équation devient

$$\operatorname{tang} \frac{n\pi(r-b)}{l} = \frac{n\pi r}{l}.$$

Elle détermine une infinité de valeurs réelles pour r; mais on ne prendra que celles qui sont comprises entre

$$b \quad \text{et} \quad b + l.$$

Elles pourront se mettre sous la forme

$$r = b + \frac{l\alpha}{n\pi}.$$

Les valeurs successives de α sont respectivement comprises entre

$$0 \text{ et } \frac{\pi}{2}, \quad \pi \text{ et } \pi + \frac{\pi}{2}, \quad 2\pi \text{ et } 2\pi + \frac{\pi}{2},$$

et ainsi de suite; elles vont en se rapprochant de leur limite supérieure, avec laquelle elles peuvent bientôt être regardées comme confondues, et alors elles ont entre elles une différence sensiblement constante et égale à π. Les valeurs de r tendent donc à avoir une différence constante et égale à $\frac{l}{n}$, comme pour les ventres : elles sont respectivement comprises entre

$$b \text{ et } b + \frac{l}{2n}, \quad b + \frac{l}{n} \text{ et } b + \frac{l}{n} + \frac{l}{2n}, \quad b + \frac{2l}{n} \text{ et } b + \frac{2l}{n} + \frac{l}{2n}, \quad \text{etc.}$$

Tuyau conique fermé par les deux bouts.

XXI. Dans ce cas, les conditions relatives aux extrémités sont exprimées par l'équation

$$\frac{d\varphi}{dr} = 0 \quad \text{pour} \quad r = b \quad \text{et} \quad r = b + l.$$

On posera encore

$$r\varphi = (\mathrm{A} \sin mat + \mathrm{B} \cos mat)(\sin mr + \mathrm{M} \cos mr),$$

et les constantes m, M seront déterminées par les équations

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{tang} ml &= \frac{ml}{1 + (b^2 + bl) m^2}, \\ \mathrm{M} &= \frac{mb \cos mb - \sin mb}{mb \sin mb + \cos mb}. \end{aligned}\right.$$

La valeur de $r\varphi$ devient, en désignant par A et B deux nouvelles constantes arbitraires,

$$(2)\quad r\varphi = (\mathrm{A} \sin mat + \mathrm{B} \cos mat)[\sin m(r - b) + mb \cos m(r - b)].$$

En faisant la somme des expressions de cette forme correspondantes à toutes les racines de l'équation (2), et déterminant les coefficients A et B par les méthodes ordinaires, on satisfera à l'état initial, et, par conséquent, à toutes les conditions de la question.

Examinons en particulier le mouvement qui produit un quelconque des sons simples que le tuyau peut rendre; c'est-à-dire, considérons la valeur de φ donnée par l'équation (2) dans laquelle m est l'une quelconque des racines positives de l'équation (1), autre que la racine zéro, à laquelle il est inutile d'avoir égard.

Ces racines sont comprises respectivement entre

$$\frac{\pi}{l} \text{ et } \left(\frac{\pi + \frac{\pi}{2}}{l}\right), \quad \frac{2\pi}{l} \text{ et } \left(\frac{2\pi + \frac{\pi}{2}}{l}\right), \ldots, \quad \frac{n\pi}{l} \text{ et } \left(\frac{n\pi + \frac{\pi}{2}}{l}\right), \quad \text{etc.},$$

elles se rapprochent de plus en plus de leur limite inférieure $\frac{n\pi}{l}$, et tendent, par suite, à avoir entre elles la différence constante $\frac{\pi}{2l}$.

L'équation (2) fait voir que chaque point devient périodiquement au repos après un temps T dont la valeur est

$$T = \frac{2\pi}{ma};$$

et comme ml est incommensurable, *ce son n'a pas de rapport commensurable avec celui que rendrait un tuyau cylindrique de même longueur*.

Quand la racine m varie, le ton s'élève dans le même rapport.

La position des ventres sera déterminée par l'équation

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0,$$

qui donne

$$\operatorname{tang} m(r-b) = -mb,$$

les valeurs de r tirées de cette équation et comprises entre r et $r+l$ correspondront à tous les ventres. Si l'on désigne par ω le plus petit arc positif ayant pour tangente $-mb$, ces valeurs équidifférentes seront comprises dans la formule suivante

$$r = b + \frac{\mathit{6} + n\pi}{m},$$

n étant un nombre entier quelconque tel, que l'on n'ait pas

$$\frac{\mathit{6} + n\pi}{m} > l.$$

Les nœuds correspondent aux valeurs de r tirées de

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0,$$

ou de

$$\operatorname{tang} m(r-b) = \frac{m(r-b)}{1+m^2br},$$

équation qui est satisfaite évidemment par $r=b$, et aussi par $r=b+l$, en vertu de l'équation (1); ce qui devait être, en effet, d'après les hypothèses mêmes du calcul. Le nombre des valeurs intermédiaires augmente indéfiniment avec m; mais leurs différences ne sont pas égales. Si m est très-grand, ces différences sont sensiblement égales à $\frac{\pi}{m}$.

Tuyau conique ouvert par la base la plus large et fermé par l'autre.

XXII. Les équations relatives à ce cas sont :

$$\frac{d^2 r\varphi}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 r\varphi}{dr^2},$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = 0 \quad \text{pour} \quad r = b,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad \text{pour} \quad r = b + l.$$

On posera d'abord

$$r\varphi = (A \sin mat + B \cos mat)(\sin mr + M \cos mr),$$

et les conditions des extrémités donneront

$$(1) \qquad \begin{cases} \tang ml = -mb, \\ M = -\tang m(b + l), \end{cases}$$

la valeur de $r\varphi$ devient alors, en désignant par A et B deux nouvelles constantes arbitraires,

$$(2) \qquad r\varphi = (A \sin mat + B \cos mat) \sin m(b + l - r).$$

En faisant la somme de toutes les expressions de cette forme, relatives aux diverses racines de l'équation (1), on déterminera facilement les valeurs de A et B de manière à satisfaire à l'état initial.

Si l'on considère le son simple correspondant à une valeur unique de m, tout ce qui s'y rapporte est renfermé dans l'équation (2). On en tire d'abord pour la durée de la vibration entière,

$$T = \frac{2\pi}{ma},$$

d'où l'on voit que, pour les différents modes de division dont le tuyau est susceptible, l'acuité du son est proportionnelle à la grandeur de la racine correspondante de l'équation (1).

Les ventres seront déterminés par l'équation

$$\sin m(b + l - r) = 0,$$

d'où

$$r = b + l - \frac{n\pi}{m},$$

n désignant un nombre entier quelconque. Ils partent de l'extrémité ouverte, et sont équidistants les uns des autres; le dernier est à une distance de l'extrémité fermée, dont le rapport avec l'intervalle constant $\frac{\pi}{m}$ varie avec la racine m.

Les nœuds sont donnés par l'équation

$$\operatorname{tang} m(b + l - r) = -mr,$$

à laquelle $r = b$ satisfait d'après l'équation (1); les valeurs de r comprises entre b et $b + l$ détermineront les autres surfaces nodales; leurs distances ne seront pas égales, mais différeront d'autant moins que m sera plus grand.

Tuyau conique fermé à l'extrémité la plus large, et ouvert à l'autre.

XXIII. Les équations seront, dans ce nouveau cas,

$$\frac{d^2 r\varphi}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 r\varphi}{dr^2},$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad \text{pour} \quad r = b,$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = 0 \quad \text{pour} \quad r = b + l.$$

On satisfera à l'équation générale en prenant

$$\varphi r = (A \sin mat + B \cos mat)(\sin mr + M \cos mr),$$

les conditions des extrémités donneront

$$(1) \qquad \begin{cases} \sin mb + M \cos mb = 0, \\ \operatorname{tang} ml = m(b + l). \end{cases}$$

d'où résulte l'expression suivante de φr,

$$(2) \qquad \varphi r = (A \sin mat + B \cos mat) \sin m(r - b).$$

On satisferait à l'état initial en faisant la somme d'expressions semblables relatives à toutes les racines de l'équation (1), et déterminant convenablement les constantes arbitraires A et B.

Considérons en particulier l'un quelconque des sons simples, relatif à une valeur unique de m, et déterminé par l'équation (2).

La durée de l'oscillation sera exprimée par

$$T = \frac{2\pi}{ma};$$

les ventres seront déterminés par l'équation

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad \text{ou} \quad \sin m(r - b) = 0,$$

d'ou

$$r = b + \frac{n\pi}{m}.$$

Les ventres sont donc distants les uns des autres de la quantité constante $\frac{\pi}{m}$; ils partent de l'extrémité ouverte et se terminent à une distance plus ou moins grande de l'autre, mais inférieure toutefois à $\frac{\pi}{m}$.

Les nœuds sont donnés par l'équation

$$\operatorname{tang} m(r - b) = mr.$$

Elle est satisfaite par

$$r = b + l,$$

d'apres l'équation (1). Les nœuds partent donc de l'extrémité fermée, et leurs distances mutuelles sont variables.

Tuyau formé par quatre plans, dont deux sont parallèles.

XXIV. Supposons maintenant un tuyau formé par deux plans qui se coupent, et par deux autres, perpendiculaires à l'intersection des deux premiers, et terminé à deux surfaces cylindriques ayant pour axe commun cette même intersection. Négligeons encore les mouvements dans le sens des sections cylindriques, pour ne nous occuper que de ceux qui produisent les sons que fait entendre le plus ordinairement le tuyau. En employant les mêmes variables que dans le n° XVIII, et observant que, dans l'hypothèse actuelle, φ est indépendant de l'angle θ, nous aurons

$$(1) \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}\right).$$

Nous supposerons le tuyau ouvert aux deux bouts, et nous désignerons par b et $b + l$ les valeurs de r qui s'y rapportent; il en résultera les conditions

$$(2) \qquad \frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad \text{pour} \quad r = b \quad \text{et} \quad r = b + l.$$

L'état initial est donné, et entraîne les conditions

$$\varphi = \mathrm{F}(r), \quad \frac{d\varphi}{dt} = f(r) \quad \text{pour} \quad t = 0.$$

Si l'on pose

$$\varphi = (\mathrm{A} \sin a\alpha t + \mathrm{B} \cos a\alpha t)\, u,$$

u étant une fonction de r seulement, on aura, d'après l'équation (1),

$$(3) \qquad \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} + \alpha^2 u = 0.$$

La valeur générale de u sera, en désignant par M et N deux constantes arbitraires,

$$(4) \quad u = \mathrm{M}\int_0^\pi \cos(\alpha r \cos\omega)\, d\omega + \mathrm{N}\int_0^\pi \cos(\alpha r \cos\omega) \log(r \sin^2\omega)\, d\omega,$$

et les équations (2) conduiront aux suivantes

$$(5) \quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{M}\int_0^\pi \cos(\alpha b \cos\omega)\, d\omega \\ &+ \mathrm{N}\int_0^\pi \cos(\alpha b \cos\omega) \log(b \sin^2\omega)\, d\omega = 0, \\ &\mathrm{M}\int_0^\pi \cos[\alpha(b+l)\cos\omega]\, d\omega \\ &+ \mathrm{N}\int_0^\pi \cos[\alpha(b+l)\cos\omega] \log[(b+l)\sin^2\omega]\, d\omega = 0. \end{aligned}\right.$$

En éliminant entre elles $\frac{M}{N}$, on obtient

$$(6)\left\{\begin{aligned}&\int_0^\pi \cos[\alpha(b+l)\cos\omega]\,d\omega\int_0^\pi \cos(b\alpha\cos\omega)\log(b\sin^2\omega)\,d\omega\\ &=\int_0^\pi \cos(b\alpha\cos\omega)\,d\omega\int_0^\pi \cos[(b+l)\alpha\cos\omega]\log[(b+l)\sin^2\omega]\,d\omega,\end{aligned}\right.$$

équation qui détermine une infinité de valeurs réelles de α, et ne saurait en avoir d'imaginaires.

L'une des équations (5) détermine le rapport $\frac{N}{M}$ en fonction de α; soit

$$\frac{N}{M} = P,$$

on aura

$$(7)\qquad u = M(u_1 + Pu_2),$$

en désignant par u_1, u_2 les deux intégrales particulières de l'équation (1),

$$\int_0^\pi \cos(\alpha r\cos\omega)\,d\omega,$$

et

$$\int_0^\pi \cos(\alpha r\cos\omega)\log(r\sin^2\omega)\,d\omega,$$

on aura ainsi pour φ la valeur suivante

$$\varphi = (A\sin a\alpha t + B\cos a\alpha t)(u_1 + Pu_2),$$

A et B restant entièrement indéterminées.

On obtiendra une valeur plus générale de φ en faisant la somme d'expressions semblables, correspondantes à toutes les racines de l'équation (6); ce qui donnera

$$(8)\qquad \varphi = \sum(A\sin a\alpha t + B\cos a\alpha t)(u_1 + Pu_2),$$

et il ne restera qu'à satisfaire à l'état initial; ce qui conduit aux deux équations

$$(9)\qquad \begin{cases} \sum \mathrm{B}(u_1 + \mathrm{P}u_2) = \mathrm{F}(r), \\ \sum \mathrm{A}\alpha(u_1 + \mathrm{P}u_2) = \frac{1}{a} f(r), \end{cases}$$

au moyen desquelles nous allons déterminer A et B.

Si, pour abréger, nous faisons

$$u_1 + \mathrm{P}u_2 = \mathrm{U},$$

cette fonction de r et α satisfera à l'équation

$$\frac{d^2\mathrm{U}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\mathrm{U}}{dr} + \alpha^2\mathrm{U} = 0,$$

et l'on démontrera facilement que si U′ et U″ sont deux valeurs de U correspondantes à deux valeurs différentes de α, et satisfaisant aux conditions des limites, comme cela résulte des valeurs de α et P, on aura nécessairement

$$(10)\qquad \int_b^{b+l} \mathrm{U}'\mathrm{U}'' r\,dr = 0.$$

Les équations (9) prennent la forme suivante :

$$\sum \mathrm{BU} = \mathrm{F}(r),$$

$$\sum \mathrm{A}\alpha\mathrm{U} = \frac{1}{a} f(r).$$

Multipliant les deux membres de ces équations par $\mathrm{U}\,r\,dr$, et intégrant entre b et $b+l$, tous les termes disparaîtront en vertu de l'équation (10), excepté celui qui correspond à la valeur de α qui entre dans la valeur de U que l'on considère. On aura donc

$$\mathrm{B} = \frac{\int_b^{b+l} r\mathrm{U}\mathrm{F}(r)\,dr}{\int_b^{b+l} \mathrm{U}^2 r\,dr}, \quad \mathrm{A} = \frac{1}{a\alpha}\frac{\int_b^{b+l} r\mathrm{U}f(r)\,dr}{\int_b^{b+l} \mathrm{U}^2 r\,dr}.$$

En prenant ces valeurs pour A et B, l'équation (8) donne la solution complète de la question.

XXV. Les valeurs de α étant incommensurables entre elles, les oscillations ne seront isochrones que lorsque la valeur de φ ne renfermera que l'une des racines de l'équation (6); ce qui suppose un état initial convenable. Le mouvement de l'air dans le tube sera alors déterminé par l'équation

$$\varphi = (\mathrm{A} \sin a\alpha t + \mathrm{B} \cos a\alpha t)\,\mathrm{U}.$$

La durée des oscillations isochrones aura pour expression

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{a\alpha},$$

et le son le plus grave correspondra à la plus petite valeur de α.

Les valeurs de r correspondantes aux ventres s'obtiendront en posant

$$\mathrm{U} = 0,$$

ou

$$(11) \quad \int_0^\pi \cos(\alpha r \cos\omega)\, d\omega + \mathrm{P}\int_0^\pi \cos(\alpha r \cos\omega) \log(r \sin^2\omega)\, d\omega = 0.$$

Si l'on suppose P tiré de la première des équations (5), cette dernière ne diffère de l'équation (6) qu'en ce que r y remplace $b + l$; et, par conséquent, elle est satisfaite par $r = b$ et $r = b + l$, comme cela devait être, puisque, par hypothèse, les extrémités du tuyau sont des ventres. Pour avoir les autres valeurs de r qui déterminent les ventres correspondants à la même valeur de α, il suffira de poser

$$\alpha_m r = \alpha(b + l),$$

α_m désignant l'une quelconque des racines de l'équation (6). Car alors l'équation (11) sera satisfaite en vertu de l'équation (6).

Les ventres seront donc déterminés par la formule générale

$$r = \frac{\alpha}{\alpha_m}(b + l),$$

et comme les ventres qui se forment dans l'intérieur du tuyau correspondent à des valeurs de r comprises entre b et $b + l$, on ne donnera à α_m que la valeur de la racine α et des racines plus grandes que α, et moindres que $\alpha\left(\frac{b+l}{b}\right)$.

Les nœuds s'obtiendraient en posant

$$\frac{dU}{dr} = 0;$$

mais les racines de cette équation ne pourraient être calculées aussi simplement que celles de l'équation (11).

XXVI. Si le tuyau était ouvert à l'extrémité la plus large, et fermé à l'autre, on aurait

$$\frac{d\varphi}{dr} = 0 \quad \text{pour} \quad r = b,$$
$$\frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad \text{pour} \quad r = b + l,$$

d'où résulteraient les deux équations

$$\int_0^\pi \cos[\alpha(b+l)\cos\omega]\,d\omega + P\int_0^\pi \cos[\alpha(b+l)\cos\omega]\log[(b+l)\sin^2\omega]\,d\omega = 0,$$

$$\int_0^\pi \cos\omega\sin(\alpha b\cos\omega)\,d\omega$$
$$+ P\left[\int_0^\pi \cos\omega\sin(\alpha b\cos\omega)\log(b\sin^2\omega)\,d\omega - \frac{1}{\alpha b}\int_0^\pi \cos(\alpha b\cos\omega)\,d\omega\right] = 0.$$

Éliminant P, on aurait l'équation suivante pour déterminer α,

$$\int_0^\pi \cos[\alpha(b+l)\cos\omega]\,d\omega \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^\pi \cos\omega\sin(\alpha b\cos\omega)\log(b\sin^2\omega)\,d\omega \\ \displaystyle -\frac{1}{\alpha b}\int_0^\pi \cos(\alpha b\cos\omega)\,d\omega \end{array}\right\}$$
$$= \int_0^\pi \cos\omega\sin(\alpha b\cos\omega)\,d\omega \left\{\int_0^\pi \cos[\alpha(b+l)\cos\omega]\log[(b+l)\sin^2\omega]\,d\omega\right\}.$$

On achèverait comme dans le cas précédent, et l'on traiterait de la même manière le cas où l'extrémité la plus large serait fermée et l'autre ouverte, ainsi que celui où elles seraient fermées l'une et l'autre.

Lorsque nous connaîtrons des expériences faites par quelque physicien sur quelques-unes des questions traitées dans ce Mémoire, nous nous empresserons de les comparer aux indications de nos calculs, et de faire connaître l'accord ou le désaccord que nous y remarquerons.