

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

BESGE

Sur l'intégrale définie $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx$

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 14 (1849), p. 31-32.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1849_1_14_31_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

SUR L'INTÉGRALE DÉFINIE

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx;$$

PAR M. BESGE.

On sait depuis longtemps et on a prouvé de bien des manières que l'intégrale définie

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx$$

est une fonction discontinue de a , évidemment nulle pour $a = 0$, mais égale à $\frac{\pi}{2}$ pour a positive, à $-\frac{\pi}{2}$ pour a négative. Peut-être cependant me pardonnera-t-on, en faveur de la simplicité du procédé, d'indiquer ici comment on doit, suivant moi, démontrer ces résultats dans un traité élémentaire.

J'observe d'abord qu'on a

$$\frac{1}{x} = \int_0^{\infty} e^{-xy} dy;$$

donc

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \int_0^{\infty} \sin ax dx \int_0^{\infty} e^{-xy} dy.$$

En intervertissant l'ordre des intégrations, le second membre de cette dernière équation devient

$$\int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} e^{-xy} \sin ax dx,$$

et à cause de

$$\int_0^{\infty} e^{-xy} \sin ax \, dx = \frac{a}{a^2 + y^2}.$$

il se réduit à

$$\int_0^{\infty} \frac{a \, dy}{a^2 + y^2},$$

c'est-à-dire à $\frac{\pi}{2}$, 0, ou $-\frac{\pi}{2}$, suivant que a est positive, nulle ou négative. Telle est donc aussi la valeur de

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} \, dx,$$

dans les mêmes circonstances; ce qu'il fallait démontrer.
