JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J.-A. SERRET

Sur l'intégration de l'équation $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 13 (1848), p. 353-360.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1848_1_13__353_0>

SUR L'INTÉGRATION DE L'ÉQUATION

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2;$$

Par M. J.-A. SERRET.

I.

La question que je me suis proposé de résoudre est la suivante :

x, y, z, s étant quatre fonctions d'une variable indépendante θ, assujetties à vérifier l'équation

$$(1) \qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2,$$

exprimer sous forme finie, et sans aucun signe d'intégration, les valeurs générales de ces fonctions.

Il est évident qu'on satisfait à l'équation précédente en prenant pour x, y, z et s les coordonnées rectangulaires et l'arc d'une courbe quelconque, d'où il suit que les valeurs générales de x, y, z et s doivent contenir dans leur expression deux fonctions arbitraires de la variable indépendante.

Considérons une courbe quelconque; la surface développable, lieu géométrique de ses tangentes, pourra être représentée par l'ensemble des deux équations

$$z = px + qy - u,$$
$$0 = x\,dp + y\,dq - du,$$

où p, q et u sont des fonctions d'un paramètre θ, ayant respectivement pour différentielles dp, dq, du; et la courbe elle-même, qui est l'arête de rebroussement de la surface, sera représentée par l'ensemble des trois équations

$$(2)\qquad \begin{cases} z = px + qy - u, \\ o = x\,dp + y\,dq - du, \\ o = x\,d^2p + y\,d^2q - d^2u; \end{cases}$$

on déduit de là les valeurs de x, y, z en fonction du paramètre θ que nous prendrons pour variable indépendante; savoir,

$$(3)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{dq\,d^2u - du\,d^2q}{dq\,d^2p - dp\,d^2q}, \\ y = \dfrac{du\,d^2p - dp\,d^2u}{dq\,d^2p - dp\,d^2q}, \\ z = px + qy - u. \end{cases}$$

Les équations (2), combinées avec celles qu'on en déduit par la différentiation, donnent

$$\begin{aligned} &dz = p\,dx + q\,dy, \\ &dp\,dx + dq\,dy = o, \\ &d^2p\,dx + d^2q\,dy = d^2u - x\,d^3p - y\,d^3q, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$(4)\qquad \begin{cases} dx = \dfrac{d^3u - x\,d^3p - y\,d^3q}{dq\,d^2p - dp\,d^2q}\,dq, \\ dy = -\dfrac{d^3u - x\,d^3p - y\,d^3q}{dq\,d^2p - dp\,d^2q}\,dp, \\ dz = \dfrac{d^3u - x\,d^3p - y\,d^3q}{dq\,d^2p - dp\,d^2q}\,(p\,dq - q\,dp). \end{cases}$$

Portant ces valeurs de dx, dy, dz dans l'équation proposée, et extrayant ensuite la racine carrée des deux membres, on a

$$(5)\qquad ds = \frac{d^3u - x\,d^3p - y\,d^3q}{dq\,d^2p - dp\,d^2q}\sqrt{dq^2 + dp^2 + (p\,dq - q\,dp)^2}.$$

Enfin, mettant à la place de x et y les valeurs fournies par les équations (3), et faisant, pour abréger,

$$(6)\quad \begin{cases} A = \dfrac{d\theta^2 \sqrt{dq^2 + dp^2 + (p\,dq - q\,dp)^2}}{dq\,d^2p - dp\,d^2q}, \\ B = -\dfrac{d\theta\,(dq\,d^3p - dp\,d^3q)\sqrt{dq^2 + dp^2 + (p\,dq - q\,dp)^2}}{(dq\,d^2p - dp\,d^2q)^2}, \\ C = \dfrac{(d^2q\,d^3p - d^2p\,d^3q)\sqrt{dq^2 + dp^2 + (p\,dq - q\,dp)^2}}{(dq\,d^2p - dp\,d^2q)^2}, \end{cases}$$

la valeur de ds sera

$$ds = A\frac{d^3u}{d\theta^3}d\theta + B\frac{d^2u}{d\theta^2}d\theta + C\frac{du}{d\theta}d\theta;$$

en intégrant par parties chaque terme de ds, on trouve

$$\int A\frac{d^3u}{d\theta^3}d\theta = A\frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{dA}{d\theta}\frac{du}{d\theta} + \frac{d^2A}{d\theta^2}u - \int\frac{d^3A}{d\theta^3}u\,d\theta,$$

$$\int B\frac{d^2u}{d\theta^2}d\theta = B\frac{du}{d\theta} - \frac{dB}{d\theta}u + \int\frac{d^2B}{d\theta^2}u\,d\theta,$$

$$\int C\frac{du}{d\theta}d\theta = Cu - \int\frac{dC}{d\theta}u\,d\theta,$$

et l'on aura, pour la valeur de s,

$$(7)\quad \begin{cases} s = A\dfrac{d^2u}{d\theta^2} - \left(\dfrac{dA}{d\theta} - B\right)\dfrac{du}{d\theta} + \left(\dfrac{d^2A}{d\theta^2} - \dfrac{dB}{d\theta} + C\right)u \\ \qquad - \displaystyle\int\left(\dfrac{d^3A}{d\theta^3} - \dfrac{d^2B}{d\theta^2} + \dfrac{dC}{d\theta}\right)u\,d\theta. \end{cases}$$

Or les quantités A, B, C ne contiennent pas u, qui doit être une fonction arbitraire de θ; on pourra donc exprimer s sous forme finie, en posant

$$(8)\quad u = \frac{\psi'(\theta)}{\dfrac{d^3A}{d\theta^3} - \dfrac{d^2B}{d\theta^2} + \dfrac{dC}{d\theta}},$$

$\psi'(\theta)$ désignant la dérivée d'une fonction arbitraire $\psi(\theta)$, car on aura

$$(9)\quad s = A\frac{d^2u}{d\theta^2} - \left(\frac{dA}{d\theta} - B\right)\frac{du}{d\theta} + \left(\frac{d^2A}{d\theta^2} - \frac{dB}{d\theta} + C\right)u - \psi(\theta);$$

et, en remplaçant u par sa valeur donnée par l'équation (8), dans les équations (3) et (9), on aura les valeurs de x, y, z et s exprimées sous forme finie, et sans aucun signe d'intégration. Ces expressions contiendront trois fonctions de θ, $\psi(\theta)$, p et q, dont deux seulement doivent être considérées comme arbitraires; car on peut évidemment, sans altérer la généralité de nos résultats, prendre pour θ l'une des deux quantités p et q, ou égaler, si l'on veut, l'une de ces deux quantités à telle fonction de θ que l'on voudra. La variable indépendante que nous avons laissée indéterminée doit être choisie de manière à avoir les formules les plus simples possibles; c'est un détail dont nous allons nous occuper dans le paragraphe suivant: mais remarquons, en terminant, que la question que nous nous sommes posée est complétement résolue par ce qui précède, et aussi que la même méthode s'étendrait, sans aucune modification, à l'équation plus générale

$$dx^2 + \ldots + dy^2 + dz^2 = ds^2,$$

contenant un nombre quelconque m de variables $x, \ldots, y, z$.

On substituerait, en effet, à ces m variables, m autres quantités déterminées par les m équations

$$\begin{aligned}
z &= px + \ldots + qy - u, \\
0 &= x\,dp + \ldots + y\,dq - du, \\
0 &= x\,d^2p + \ldots + y\,d^2q - d^2u, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 &= x\,d^{m-1}p + \ldots + y\,d^{m-1}q - d^{m-1}u;
\end{aligned}$$

et en suivant la même marche que précédemment, on exprimerait les $m+1$ quantités $x, \ldots, y, z$ et s sous forme finie, à l'aide de m fonctions de la variable indépendante, dont $m-1$ pourraient être considérées comme arbitraires.

La même transformation s'appliquerait encore à l'équation plus générale

$$dx^n + \ldots + dy^n + dz^n = ds^n,$$

où n est un nombre quelconque.

II.

Revenons à la question proposée, et occupons-nous du choix de la variable indépendante.

q et p, étant deux fonctions d'une même variable indépendante, peuvent être considérées comme les coordonnées rectilignes d'une courbe plane arbitraire; l'équation générale des tangentes de cette courbe sera

$$q\cos\theta - p\sin\theta + \varphi(\theta) = 0,$$

θ étant un paramètre variable et φ une fonction arbitraire. En outre, comme toute courbe est l'enveloppe de ses tangentes, on pourra poser

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} &q\cos\theta - p\sin\theta + \varphi = 0,\\ &q\sin\theta + p\cos\theta - \varphi' = 0,\end{aligned}\right.$$

et considérer ces équations comme appartenant à la courbe : la seconde de ces équations est la dérivée de la première par rapport au paramètre θ que nous prendrons pour variable indépendante; enfin, nous mettons simplement φ au lieu de $\varphi(\theta)$, et nous dénotons les dérivées à la manière de Lagrange.

Des équations (10) on déduit les valeurs suivantes de p et q, qui contiennent une fonction arbitraire φ et sont, d'après ce qui précède, les plus générales qu'on puisse imaginer,

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} q &= \varphi'\sin\theta - \varphi\cos\theta,\\ p &= \varphi'\cos\theta + \varphi\sin\theta;\end{aligned}\right.$$

on déduit de là

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} dq &= (\varphi'' + \varphi)\sin\theta\, d\theta,\\ dp &= (\varphi'' + \varphi)\cos\theta\, d\theta,\\ p\,dq - q\,dp &= (\varphi'' + \varphi)\,\varphi\, d\theta;\end{aligned}\right.$$

d'où

$$(13)\qquad \sqrt{dq^2 + dp^2 + (p\,dq - q\,dp)^2} = (\varphi'' + \varphi)\sqrt{1 + \varphi^2}\, d\theta.$$

On a encore

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} d^2q &= [(\varphi''' + \varphi')\sin\theta + (\varphi'' + \varphi)\cos\theta]\, d\theta^2,\\ d^2p &= [(\varphi''' + \varphi')\cos\theta - (\varphi'' + \varphi)\sin\theta]\, d\theta^2,\end{aligned}\right.$$

d'où

$$(15)\qquad dq\,d^2p - dp\,d^2q = -(\varphi'' + \varphi)^2\,d\theta^3.$$

Nous avons encore besoin des différentielles du troisième ordre; on trouve

$$(16)\qquad \begin{cases} d^3q = [(\varphi^{\text{IV}} - \varphi)\sin\theta + 2(\varphi''' + \varphi')\cos\theta]\,d\theta^3,\\ d^3p = [(\varphi^{\text{IV}} - \varphi)\cos\theta - 2(\varphi''' + \varphi')\sin\theta]\,d\theta^3,\end{cases}$$

et l'on déduit de l'équation (15), par la différentiation,

$$(17)\qquad dq\,d^3p - dp\,d^3q = -2(\varphi'' + \varphi)(\varphi''' + \varphi')\,d\theta^4;$$

enfin, des équations (14) et (16) on tire

$$(18)\qquad \begin{cases} d^2q\,d^3p - d^2p\,d^3q\\ = [(\varphi'' + \varphi)(\varphi^{\text{IV}} + \varphi'') - 2(\varphi''' + \varphi')^2 - (\varphi'' + \varphi)^2]\,d\theta^5.\end{cases}$$

Cela posé, en vertu des équations (13), (15), (17) et (18), les valeurs de A, B, C deviennent

$$(19)\qquad \begin{cases} A = -\dfrac{\sqrt{1+\varphi^2}}{\varphi''+\varphi},\\[2mm] B = \dfrac{2(\varphi'''+\varphi')\sqrt{1+\varphi^2}}{(\varphi''+\varphi)^2},\\[2mm] C = \left[\dfrac{(\varphi^{\text{IV}}+\varphi'')}{(\varphi''+\varphi)^2} - 2\dfrac{(\varphi'''+\varphi')^2}{(\varphi''+\varphi)^3} - \dfrac{1}{\varphi''+\varphi}\right]\sqrt{1+\varphi^2}.\end{cases}$$

Différentiant la première des équations (19) et retranchant ensuite la seconde, on a

$$(20)\qquad \frac{dA}{d\theta} - B = -\frac{(\varphi'''+\varphi')\sqrt{1+\varphi^2}}{(\varphi''+\varphi)^2} - \frac{\varphi\varphi'}{(\varphi''+\varphi)\sqrt{1+\varphi^2}}.$$

Différentiant l'équation (20) et ajoutant au résultat la troisième des équations (19), on a

$$(21)\qquad \frac{d^2A}{d\theta^2} - \frac{dB}{d\theta} + C = -\frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}} - \frac{1+\varphi^2+\varphi'^2}{(\varphi''+\varphi)(1+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et, en faisant, pour abréger,

$$(22)\qquad -\frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}-\frac{1+\varphi^2+\varphi'^2}{(\varphi''+\varphi)(1+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}=\mathrm{P},$$

on aura

$$(23)\qquad u=\frac{\psi'(\theta)}{\mathrm{P}'},$$

et, par suite,

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{du}{d\theta}&=\frac{\psi''(\theta)}{\mathrm{P}'}-\frac{\mathrm{P}''\psi'(\theta)}{\mathrm{P}'^2},\\ \frac{d^2u}{d\theta^2}&=\frac{\psi'''(\theta)}{\mathrm{P}'}-\frac{2\mathrm{P}''\psi''(\theta)}{\mathrm{P}'^2}+\frac{(2\mathrm{P}''^2-\mathrm{P}'\mathrm{P}''')\psi'(\theta)}{\mathrm{P}'^3}.\end{aligned}\right.$$

D'après cela, on aura les valeurs des quantités x, y, z et s à l'aide des formules (3) et (9), en éliminant les quantités p, q, u de leurs expressions. Cela se fera sans difficulté en se servant des formules que nous avons données; mais nous nous dispenserons d'écrire ici ces valeurs à cause de leur extrême complication.

III.

Nous venons de trouver la solution générale de l'équation

$$dx^2+dy^2+dz^2=ds^2,$$

qui renferme, comme on a vu, deux fonctions arbitraires φ et ψ; mais il est très-remarquable que cette même équation admette encore une autre solution qui ne renferme qu'une seule fonction arbitraire, et qui ne saurait être comprise dans la solution générale que nous avons trouvée. J'appellerai, en conséquence, cette seconde solution la solution singulière de l'équation proposée. Cette solution singulière est relative au cas où la quantité que nous avons appelée P se réduirait à une constante; les équations (23) et (24) seront, en effet, illusoires: la fonction $\varphi(\theta)$ sera alors déterminée par l'équation différentielle

$$\mathrm{P}=\text{constante},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}} + \frac{1+\varphi^2+\varphi'^2}{(\varphi''+\varphi)(1+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}} = \text{constante} = m, \tag{25}$$

et la fonction u sera absolument arbitraire. Les équations (3) continueront de donner les valeurs de x, y et z, et la valeur de s le sera par l'équation (7), qui se réduit à

$$s = \mathrm{A}\frac{d^2u}{d\theta^2} - \left(\frac{d\mathrm{A}}{d\theta} - \mathrm{B}\right)\frac{du}{d\theta} + mu.$$

On arriverait à des formules simples dans le cas de $m = 0$. L'équation (25) se réduit à

$$\varphi + \frac{1+\varphi^2+\varphi'^2}{(\varphi''+\varphi)(1+\varphi^2)} = 0,$$

et a pour intégrale

$$\varphi = \sqrt{n^2\cos^2(\theta-\theta_0) - 1},$$

n et θ_0 étant les deux constantes arbitraires. Je ne crois pas, toutefois, devoir insister sur ce cas particulier.