# JOURNAL

DE

# MATHÉMATIQUES

## PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE



ALFRED SERRET


**Note sur quelques formules de calcul intégral**


*Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série*, tome 8 (1843), p. 1-22.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1843_1_8__1_0>

JOURNAL
# DE MATHÉMATIQUES
## PURES ET APPLIQUÉES.

# NOTE
## SUR QUELQUES FORMULES DE CALCUL INTÉGRAL;

PAR M. ALFRED SERRET,

Ancien Élève de l'École Polytechnique.

---

**1.** Le but principal de cette Note est la recherche des quatre intégrales définies

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{ll} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^m \cos(nx)\,dx, & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^m (\sin nx)\,dx, \\ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^m \cos(nx)\,dx, & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^m (\sin nx)\,dx, \end{array}\right.$$

dans lesquelles $m$ et $n$ sont des quantités quelconques.

La première de ces quatre intégrales est exprimable au moyen d'intégrales eulériennes de première ou de seconde espèce. On trouve, en effet,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^m \cos(nx)\,dx &= \frac{\pi}{2^{m+1}} \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{m-n}{2}+1\right)} \\ &= \frac{\pi}{(m+1)\,2^{m+1}\,\mathrm{B}\left(\frac{m+n}{2}+1,\ \frac{m-n}{2}+1\right)}. \end{aligned}\right.$$

Cette formule est due, je crois, à M. Cauchy, qui l'a déduite d'intégrales définies prises entre des limites imaginaires [*]. La démonstration qu'en a donnée ce géomètre est la seule que je connaisse.

Quant aux trois dernières des intégrales (1), elles ne sont pas exprimables au moyen des $\Gamma$; leur expression est quelquefois très-simple. Cela arrive, par exemple, si la différence $n - m$ est un nombre entier pair; d'autres fois, au contraire, cette expression est fort compliquée. Dans tous les cas, elles sont exprimables au moyen d'intégrales définies qui ont avec les fonctions eulériennes la plus grande analogie.

L'expression des quatre intégrales (1) se déduit, comme on va le voir, avec la plus grande facilité, de la simple définition des intégrales d'Euler: l'une d'elles, la quatrième, a déjà été traitée par LAPLACE, (*Calcul des Probabilités*, page 235).

**2.** Soit

$$\int_0^\infty \theta^{p-1} e^{-\theta} d\theta = \Gamma(p).$$

Si l'on met $a\theta$ au lieu de $\theta$, on aura identiquement

$$\int_0^\infty \theta^{p-1} e^{-a\theta} d\theta = \frac{\Gamma(p)}{a^p}; \tag{3}$$

et si dans cette dernière on remplace $a$ par $a + b\sqrt{-1}$, il viendra

$$\int_0^\infty \theta^{p-1} e^{-(a+b\sqrt{-1})\theta} d\theta = \frac{\Gamma(p)}{(a^2+b^2)^{\frac{p}{2}}} e^{-\left(p\sqrt{-1}\operatorname{arc tang}\frac{b}{a}\right)}. \tag{4}$$

Cette équation équivaut à deux autres, débarrassées d'imaginaires, et qui ont été trouvées directement par Poisson [**].

Si dans l'équation (3) on pose successivement

$$a = e^{x\sqrt{-1}} \quad \text{et} \quad a = e^{-x\sqrt{-1}},$$

[*] *Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires;* Paris, 1825, page 40.

[**] *Journal de l'École Polytechnique,* XVI^e cahier, page 219.

on aura

$$\Gamma(p)\, e^{-px\sqrt{-1}} = \int_0^\infty y^{p-1}\, e^{-ye^{x\sqrt{-1}}}\, dy,$$
$$\Gamma(q)\, e^{qx\sqrt{-1}} = \int_0^\infty z^{q-1}\, e^{-ze^{-x\sqrt{-1}}}\, dz;$$

d'où, en multipliant,

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q)\, e^{(q-p)x\sqrt{-1}} = \int_0^\infty y^{p-1}\, e^{-ye^{x\sqrt{-1}}}\, dy \int_0^\infty z^{q-1}\, e^{-ze^{-x\sqrt{-1}}}\, dz.$$

Si, dans l'intégrale relative à $z$, on pose

$$z = yt, \quad \text{d'où} \quad dz = y\,dt,$$

on aura, en remarquant que les deux intégrations peuvent s'effectuer dans un ordre quelconque,

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\,\Gamma(q)\, e^{(q-p)x\sqrt{-1}} &= \int_0^\infty t^{q-1}\, dt \int_0^\infty y^{p+q-1}\, e^{-y\left(e^{x\sqrt{-1}}+te^{-x\sqrt{-1}}\right)}\, dy \\ &= \int_0^1 t^{q-1}\, dt \int_0^\infty y^{p+q-1}\, e^{-y[(1+t)\cos x+(1-t)\sqrt{-1}\sin x]}\, dy \\ &+ \int_1^\infty t^{q-1}\, dt \int_0^\infty y^{p+q-1}\, e^{-y[(1+t)\cos x+(1-t)\sqrt{-1}\sin x]}\, dy.\end{aligned}$$

Mettant $\frac{1}{t}$ au lieu de $t$ dans la seconde de ces intégrales doubles, il viendra

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\,\Gamma(q)\, e^{(q-p)x\sqrt{-1}} &= \int_0^1 t^{q-1}\, dt \int_0^\infty y^{p+q-1}\, e^{-y[(1+t)\cos x+(1-t)\sqrt{-1}\sin x]}\, dy \\ &+ \int_0^1 t^{-q-1}\, dt \int_0^\infty y^{p+q-1}\, e^{-y\left(\frac{1+t}{t}\cos x - \frac{1-t}{t}\sqrt{-1}\sin x\right)}\, dy.\end{aligned}$$

Les deux intégrations relatives à $y$ peuvent s'effectuer en vertu de l'équation (4), et l'équation précédente devient

$$(5)\left\{\begin{aligned}\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\, e^{(q-p)x\sqrt{-1}} &= \int_0^1 t^{q-1}\, dt\, \frac{e^{-(p+q)\sqrt{-1}\,\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1-t}{1+t}\tan x\right)}}{[(1+t)^2\cos^2 x + (1-t)^2\sin^2 x]^{\frac{p+q}{2}}} \\ &+ \int_0^1 t^{p-1}\, dt\, \frac{e^{(p+q)\sqrt{-1}\,\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1-t}{1+t}\tan x\right)}}{[(1+t)^2\cos^2 x + (1-t)^2\sin^2 x]^{\frac{p+q}{2}}}.\end{aligned}\right.$$

Telle est la formule si naturellement déduite de l'équation (3), et qui fournira immédiatement la démonstration de l'équation (2).

**3.** Si l'on multiplie les deux membres de l'équation (5) par $(\cos x)^{p+q-2}\,dx$, et qu'on intègre ensuite de part et d'autre par rapport à $x$, entre o et $\frac{\pi}{2}$, il viendra

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{p+q-2}\,e^{(q-p)x\sqrt{-1}}\,dx\\
&=\int_0^1 t^{q-1}\,dt\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\cos^2 x}\,\frac{e^{-(p+q)\sqrt{-1}\,\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1-t}{1+t}\operatorname{tang} x\right)}}{\left[(1+t)^2+(1-t)^2\operatorname{tang}^2 x\right]^{\frac{p+q}{2}}}\\
&+\int_0^1 t^{p-1}\,dt\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\cos^2 x}\,\frac{e^{(p+q)\sqrt{-1}\,\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1-t}{1+t}\operatorname{tang} x\right)}}{\left[(1+t)^2+(1-t)^2\operatorname{tang}^2 x\right]^{\frac{p+q}{2}}}.
\end{aligned}$$

Si dans les intégrales du second membre, relatives à $x$, on pose

$$\frac{1-t}{1+t}\operatorname{tang} x=\operatorname{tang}\varphi,$$

d'où

$$\frac{1-t}{1+t}\,\frac{dx}{\cos^2 x}=\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi},$$

l'équation précédente deviendra

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{p+q-2}\,e^{(q-p)x\sqrt{-1}}\,dx\\
&=\int_0^1\frac{t^{q-1}\,dt}{(1+t)^{p+q-1}(1-t)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi)^{p+q-2}\,e^{-(p+q)\varphi\sqrt{-1}}\,d\varphi\\
&+\int_0^1\frac{t^{p-1}\,dt}{(1+t)^{p+q-1}(1-t)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi)^{p+q-2}\,e^{(p+q)\varphi\sqrt{-1}}\,d\varphi.
\end{aligned}$$

Égalant en particulier les parties réelles et les parties imaginaires, et posant de plus

$$p+q-2=m \quad\text{et}\quad q-p=n,$$

on aura

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{m+n}{2}+1\right)\Gamma\left(\dfrac{m-n}{2}+1\right)}{\Gamma(m+2)}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\cos nx\,dx \\ \quad = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{\frac{m+n}{2}}+t^{\frac{m-n}{2}}}{(1+t)^{m+1}(1-t)}\,dt\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\varphi\cos(m+2)\varphi\,d\varphi, \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{m+n}{2}+1\right)\Gamma\left(\dfrac{m-n}{2}+1\right)}{\Gamma(m+2)}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin nx\,dx \\ \quad = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{\frac{m-n}{2}}-t^{\frac{m+n}{2}}}{(1+t)^{m+1}(1-t)}\,dt\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin(m+2)\varphi\,d\varphi. \end{cases}$$

Dans l'équation (6), l'intégrale relative à $t$ est évidemment infinie, mais rien n'est plus simple que d'éviter cette difficulté. Si, en effet, on désigne par $F(n)$ le premier membre de cette équation, il est clair que, par le même procédé qui conduit à l'équation (6), on eût obtenu la suivante,

$$(8)\quad F(n)-F(n') = \int_0^1 \frac{\left(t^{\frac{m-n}{2}}+t^{\frac{m+n}{2}}\right)-\left(t^{\frac{m-n'}{2}}+t^{\frac{m+n'}{2}}\right)}{(1+t)^{m+1}(1-t)}\,dt\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\varphi\cos(m+2)\varphi\,d\varphi.$$

Dans cette dernière, qui remplacera l'équation (6), l'intégrale relative à $t$ n'est généralement ni infinie ni nulle; et si l'on remarque que l'intégrale relative à $\varphi$ ne renferme ni $n$ ni $n'$, on pourra la déterminer aisément en donnant à $n$ et $n'$ deux valeurs particulières quelconques, en faisant, par exemple, $n = 0$, $n' = 1$. De cette manière, et ayant égard aux formules connues

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m-1} x\,dx = 2^{m-2}\frac{\Gamma^2\left(\dfrac{m}{2}\right)}{\Gamma(m)}$$

et

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma\left(a+\dfrac{1}{2}\right)}{\Gamma(2a)} = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2^{2a-1}},$$

on trouve de suite

$$F(0) = F(1) = \frac{\pi}{(m+1)\,2^{m+1}};$$

ce qui montre que, dans l'équation (8), l'intégrale relative à $\varphi$ est nulle, et, par suite, que la quantité désignée par $F(n)$ est indépendante de $n$. On aura donc

$$F(n) = \frac{\pi}{(m+1)\,2^{m+1}},$$

d'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cos(nx)\,dx = \frac{\pi}{2^{m+1}} \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{m-n}{2}+1\right)},$$

équation qui coïncide avec l'équation (2). On verra plus loin qu'elle peut être obtenue sans passer par les considérations précédentes.

Si l'on y fait successivement $n = m$ et $n = m - 2k$, $k$ étant un entier, on aura

$$(9) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cos mx\,dx = \frac{\pi}{2^{m+1}},$$

$$(10) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cos(m-2k)\,x\,dx = \frac{\pi}{2^{m+1}} \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)}{1.2.3\ldots(k-1).k},$$

où l'on doit avoir $m > k - 1$.

Ces deux formules ont été démontrées par Poisson [*].

Si l'on différentie les deux membres de l'équation (9) par rapport à $m$, puis qu'on fasse $m = 0$, on aura

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2}.$$

4. Revenons actuellement à l'équation (7): aucune des intégrales définies qui y entrent n'est généralement nulle ni infinie; celle relative

---

[*] *Journal de l'École Polytechnique*, XIX$^e$ cahier, page 490.

à $\varphi$ est indépendante de $n$ et cela suffit pour la déterminer. Si l'on fait $n=1$ dans cette équation, on obtient immédiatement

$$(11)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m\varphi \sin(m+2)\varphi\, d\varphi = \frac{1}{m+1},$$

et, par suite,

$$(12)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin nx\, dx = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{m-n}{2}+1\right)} \int_0^1 \frac{t^{\frac{m-n}{2}} - t^{\frac{m+n}{2}}}{(1+t)^{m+1}(1-t)}\, dt.$$

L'intégrale

$$\int_0^1 \frac{t^{\frac{m-n}{2}} - t^{\frac{m+n}{2}}}{(1+t)^{m+1}(1-t)}\, dt,$$

à laquelle nous sommes conduits, n'est pas généralement exprimable au moyen des fonctions $\Gamma$; c'est une transcendante d'un ordre différent.

5. On obtient immédiatement deux relations entre les quatre intégrales définies (1), de telle sorte que, deux d'entre elles étant connues, on connaîtra aussi les deux autres. En effet, si dans les deux dernières on met $\frac{\pi}{2} - x$ au lieu de $x$, on a

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos nx\, dx &= \cos\frac{n\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cos nx\, dx \\
&\quad + \sin\frac{n\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin(nx)\, dx, \\
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \sin nx\, dx &= \sin\frac{n\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cos nx\, dx \\
&\quad - \cos\frac{n\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin nx\, dx.
\end{aligned}\right.$$

On voit donc que ces quatre intégrales sont généralement exprimables au moyen d'intégrales eulériennes, et de l'intégrale relative à $t$ qui entre dans l'équation (12) : cela exige toutefois que $n$ soit $< m+2$ ; mais on verra plus haut qu'on peut ramener à ce cas tous les autres.

Un chose qu'il importe de remarquer ici, c'est que nos quatre intégrales sont immédiatement déterminées, et de la manière la plus simple, dans le cas limite $n = m+2$, cas où l'équation (12) ne signifie plus rien. On a, en effet,

$$(14)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cos(m+2)x\,dx = 0, \\ &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin(m+2)x\,dx = \frac{1}{m+1}, \\ &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos(m-2)x\,dx = \frac{-\sin\frac{m\pi}{2}}{m+1}, \\ &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \sin(m+2)x\,dx = \frac{\cos\frac{m\pi}{2}}{m+1}, \end{aligned} \right.$$

formules qui ont lieu pour toutes les valeurs de $m$, telles que $m+1>0$.

Du reste, on obtient les quatre formules précédentes en soumettant simplement les intégrales (1) à l'intégration par parties ; le même procédé fait même connaître leurs valeurs toutes les fois que la différence $n-m$ est un nombre entier pair et positif.

En soumettant à deux intégrations par parties successives les deux premières des intégrales (1), on trouve sans difficulté

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cos nx\,dx = \frac{\overline{m+2}^2 - n^2}{(m+1)(m+2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+2} x \cos nx\,dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin nx\,dx = \frac{\overline{m+2}^2 - n^2}{(m+1)(m+2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+2} x \sin nx\,dx + \frac{n}{(m+1)(m+2)},$$

équations qui, dans le cas de $n = m+2$, coïncident bien avec les formules (14).

On en déduit sans peine

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cos nx\,dx$$

$$= \frac{(\overline{m+2}^2-n^2)(\overline{m+4}^2-n^2)\ldots(\overline{m+2k-2}^2-n^2)(\overline{m+2k}^2-n^2)}{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots(m+2k-1)(m+2k)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+2k} x \cos nx\,dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin nx\,dx$$

$$= \frac{(\overline{m+2}^2-n^2)(\overline{m+4}^2-n^2)\ldots(\overline{m+2k-2}^2-n^2)(\overline{m+2k}^2-n^2)}{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots(m+2k-1)(m+2k)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+2k} x \sin nx\,dx$$

$$+ n \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{(m+1)(m+2)} + \dfrac{\overline{m+2}^2-n^2}{(m+1)\ldots(m+4)} + \dfrac{(\overline{m+2}^2-n^2)(\overline{m+4}^2-n^2)}{(m+1)\ldots(m+6)} + \ldots \\ \qquad + \dfrac{(\overline{m+2}^2-n^2)\ldots(\overline{m+2k-2}^2-n^2)}{(m+1)(m+2)\ldots(m+2k)} \end{array} \right\}.$$

Si l'on fait $n = m + 2k$ dans ces deux formules, il viendra

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cos(m+2k)\,x\,dx = 0,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin(m+2k)\,x\,dx$$

$$= (m+2k) \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{(m+1)(m+2)} - 2^2 \dfrac{(m+k+1)(k-1)}{(m+1)\ldots(m+4)} + 2^4 \dfrac{(m+k+1)(m+k+2)(k-1)(k-2)}{(m+1)\ldots(m+6)} - \ldots \\ \qquad \pm 2^{2k-2} \dfrac{(m+k+1)(m+k+2)\ldots(m+2k-1)(k-1)(k-2)\ldots 3.2.1}{(m+1)(m+2)\ldots(m+2k)} \end{array} \right\}.$$

La première de ces deux formules avait été démontrée depuis longtemps par Poisson.

Il est bon de remarquer que le procédé qui conduit aux deux formules précédentes peut donner également les intégrales indéfinies

$$\int \cos^m x \cos(m+2k)\,x\,dx \quad \text{et} \quad \int \cos^m x \sin(m+2k)\,x\,dx.$$

Du reste, cette recherche présente peu d'intérêt.

**6.** Dans le cas de $n=m$, les trois dernières des intégrales (1) ne paraissent pas susceptibles d'une expression très-simple. L'équation (12) devient, dans ce cas,

$$(15)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin(mx)\,dx = \int_0^1 \frac{1-t^m}{(1-t)(1+t)^{m+1}}\,dt.$$

Si $m$ est un entier, on peut donner de cette intégrale une valeur assez simple. L'intégration par parties, convenablement faite, conduit à l'équation

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+1} x \sin(n+1)\,x\,dx = \frac{m+1}{m+n+2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin nx\,dx + \frac{1}{m+n+2},$$

qui devient, dans le cas de $n=m$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+1} x \sin(m+1)\,x\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin mx\,dx + \frac{1}{m+1}\right);$$

d'où l'on déduit aisément, dans le cas de $m$ entier,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin mx\,dx = \frac{1}{2^{m+1}}\left(2+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\frac{2^4}{4}+\ldots+\frac{2^m}{m}\right).$$

Cette valeur, qui n'est pas réductible à une forme plus simple, ne donne pas lieu de croire que les intégrales de l'équation (15) puissent être exprimées généralement au moyen des transcendantes connues.

**7.** Si l'on multiplie les deux membres de l'équation (5) par $\sin^{r-1} x \cos^{s-1} x\,dx$, et qu'on intègre ensuite de part et d'autre par rapport à $x$ entre $0$ et $\frac{\pi}{2}$, on aura, si $r+s=p+q$,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{B}(p,q)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{r-1}(\cos x)^{s-1}\,e^{(q-p)x\sqrt{-1}}\,dx\\
&= \int_0^1 t^{q-1}\,dt \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tang} x)^{r-1}\frac{dx}{\cos^2 x}\,\frac{e^{-(p+q)\sqrt{-1}\,\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1-t}{1+t}\operatorname{tang} x\right)}}{[(1+t)^2+(1-t)^2\operatorname{tang}^2 x]^{\frac{p+q}{2}}}\\
&+ \int_0^1 t^{p-1}\,dt \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tang} x)^{r-1}\frac{dx}{\cos^2 x}\,\frac{e^{(p+q)\sqrt{-1}\,\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1-t}{1+t}\operatorname{tang} x\right)}}{[(1+t)^2+(1-t)^2\operatorname{tang}^2 x]^{\frac{p+q}{2}}};
\end{aligned}$$

puis si, comme on l'a déjà fait précédemment, on pose dans le second membre

$$\frac{1-t}{1+t}\operatorname{tang} x = \operatorname{tang}\varphi, \quad \text{d'où} \quad \frac{1-t}{1+t}\frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi},$$

on aura

$$\mathrm{B}(p,q)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{r-1}(\cos x)^{s-1}e^{(q-p)x\sqrt{-1}}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{t^{q-1}\,dt}{(1-t)^r(1+t)^s}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\varphi)^{r-1}(\cos\varphi)^{s-1}e^{-(p+q)\varphi\sqrt{-1}}\,d\varphi$$

$$+ \int_0^1 \frac{t^{p-1}\,dt}{(1-t)^r(1+t)^s}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\varphi)^{r-1}(\cos\varphi)^{s-1}e^{(p+q)\varphi\sqrt{-1}}\,d\varphi.$$

Égalant ensemble les parties réelles et les parties imaginaires, on aura

$$(16)\left\{\begin{aligned}
&\mathrm{B}(p,q)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{r-1}(\cos x)^{s-1}\cos(q-p)x\,dx\\
&= \int_0^1 \frac{t^{p-1}+t^{q-1}}{(1-t)^r(1+t)^s}\,dt\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\varphi)^{r-1}(\cos\varphi)^{s-1}\cos(p+q)\varphi\,d\varphi,\\
&\mathrm{B}(p,q)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{r-1}(\cos x)^{s-1}\sin(q-p)x\,dx\\
&= \int_0^1 \frac{t^{p-1}+t^{q-1}}{(1-t)^r(1+t)^s}\,dt\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\varphi)^{r-1}(\cos\varphi)^{s-1}\sin(p+q)\varphi\,d\varphi.
\end{aligned}\right.$$

La première de ces formules sera en défaut si $r$ est égal ou supérieur à 1; mais la seconde exige seulement que $r$ soit moindre que 2. Les intégrales relatives à $\varphi$ ne dépendent que de la somme $p+q$ et nullement de différence $(q-p)$, et cette remarque pourrait servir à les déterminer, ainsi que je l'ai fait voir précédemment; mais il vaut beaucoup mieux avoir recours à l'équation (5), qui nous donnera immédiatement les valeurs de ces deux intégrales.

Si dans l'équation (5) on fait $x=\frac{\pi}{4}$, et que, dans la première des intégrales du second membre, on pose

$$t = \operatorname{tang} \varphi, \quad \text{d'où} \quad \frac{1-t}{1+t} = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right),$$

et dans la seconde

$$t = \operatorname{cotang} \varphi, \quad \text{d'où} \quad \frac{1-t}{1-t} = - \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right),$$

on a immédiatement

$$\mathrm{B}(p,q)\, e^{q\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\varphi)^{q-1} (\cos\varphi)^{p-1} e^{(p+q)\varphi\sqrt{-1}}\, d\varphi;$$

d'où

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\varphi)^{q-1} (\cos\varphi)^{p-1} \cos (p+q)\varphi d\varphi = \mathrm{B}(p,q) \cos \frac{q\pi}{2}, \\ &\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\varphi)^{q-1} (\cos\varphi)^{p-1} \sin (p+q)\varphi d\varphi = \mathrm{B}(p,q) \sin \frac{q\pi}{2}; \end{aligned} \right.$$

et les équations (16) deviendront

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{r-1} (\cos x)^{s-1} \cos (q-p)\, x\, dx \\ &= \frac{\mathrm{B}(r,s)}{\mathrm{B}(p,q)} \cos \frac{r\pi}{2} \int_0^1 \frac{t^{p-1} + t^{q-1}}{(1-t)^r (1+t)^s}\, dt, \\ &\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{r-1} (\cos x)^{s-1} \sin (q-p)\, x\, dx \\ &= \frac{\mathrm{B}(r,s)}{\mathrm{B}(p,q)} \sin \frac{r\pi}{2} \int_0^1 \frac{t^{p-1} - t^{q-1}}{(1-t)^r (1+t)^s}\, dt. \end{aligned} \right.$$

On ne doit pas oublier que, dans ces formules, les quatre constantes $p$, $q$, $r$, $s$ sont liées entre elles par la relation

$$r + s = p + q.$$

Les intégrales relatives à $t$, dans les équations (18), ne sont pas généralement exprimables au moyen des intégrales eulériennes, mais elles le deviennent de suite si $r = s = \frac{p+q}{2}$. On trouve, en effet, sans difficulté,

$$\int_0^1 \frac{t^{p-1}+t^{q-1}}{(1-t^2)^{\frac{p+q}{2}}}\,dt = \frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{p}{2},\frac{q}{2}\right)\frac{\cos(q-p)\frac{\pi}{4}}{\cos(q+p)\frac{\pi}{4}},$$

$$\int_0^1 \frac{t^{p-1}-t^{q-1}}{(1-t^2)^{\frac{p+q}{2}}}\,dt = \frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{p}{2},\frac{q}{2}\right)\frac{\sin(q-p)\frac{\pi}{4}}{\sin(q+p)\frac{\pi}{4}}.$$

D'après cela, les équations (18) deviennent

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x\cos x)^{\frac{p+q}{2}-1}\cos(q-p)\,x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\cos(q-p)\frac{\pi}{4}\,\frac{\mathrm{B}\left(\frac{p}{2},\frac{q}{2}\right)}{\mathrm{B}(p,q)}\,\mathrm{B}\left(\frac{p+q}{2},\ \frac{p+q}{2}\right),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x\cos x)^{\frac{p+q}{2}-1}\sin(q-p)\,x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\sin(q-p)\frac{\pi}{4}\,\frac{\mathrm{B}\left(\frac{p}{2},\frac{q}{2}\right)}{\mathrm{B}(p,q)}\,\mathrm{B}\left(\frac{p+q}{2},\ \frac{p+q}{2}\right).$$

Si, dans ces deux intégrales, on met $\frac{1}{2}x$ au lieu de $x$, puis qu'on fasse, pour abréger, $p+q=2m$, $q-p=2n$, et qu'on remplace les B par leurs valeurs en $\Gamma$, on aura

$$(19)\quad\left\{\begin{aligned}
&\int_0^{\pi}\sin^{m-1}x\cos nx\,dx = 2^{m-1}\cos\frac{n\pi}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{m-n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma(m-n)\,\Gamma(m+n)}\,\Gamma(m),\\
&\int_0^{\pi}\sin^{m-1}x\sin nx\,dx = 2^{m-1}\sin\frac{n\pi}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{m-n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma(m-n)\,\Gamma(m+n)}\,\Gamma(m).
\end{aligned}\right.$$

Si l'on ajoute ces deux équations après avoir multiplié la première par $\frac{1}{2}\cos\frac{n\pi}{2}$, et la seconde par $\frac{1}{2}\sin\frac{n\pi}{2}$, on aura

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin^{m-1}x\cos n\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x^{m-1}\cos nx\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m-1}x\cos nx\,dx = 2^{m-2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{m-n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma(m-n)\,\Gamma(m+n)}\,\Gamma(m), \end{aligned}\right.$$

formule qui est, au fond, la même chose que l'équation (2).

Chacune des intégrales définies des équations (19) est facilement exprimable au moyen de trois des intégrales (1). En joignant à ces équations les équations (13), on aura quatre relations entre les quatre intégrales (1); mais l'une de ces relations n'est qu'une conséquence des trois autres: on peut néanmoins, entre trois d'entre elles, éliminer les trois dernières des intégrales (1), et l'équation finale ainsi obtenue coïncide avec l'équation (20).

**8.** La seconde des équations (17) devient, en remplaçant l'intégrale B par sa valeur en $\Gamma$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{q-1}\varphi\cos^{p-1}\varphi\sin(p+q)\varphi\,d\varphi = \frac{\pi}{2\cos\frac{q\pi}{2}}\,\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+q)\Gamma(1-q)},$$

et, si l'on y fait $q=0$,

$$(21)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi^{p-1})\,\frac{\sin p\varphi}{\sin\varphi}\,d\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

En vertu de cette formule, la seconde des équations (16) deviendra, si l'on y fait $r=0$ et $s=p+q$,

$$(22)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{p+q-1}x\,\frac{\sin(q-p)x}{\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2\mathrm{B}(p,q)}\int_0^1\frac{t^{p-1}-t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt,$$

et si, dans cette dernière, on pose $p+q=1$, il viendra

$$(23)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(q-p)x}{\sin x}\,dx = \frac{\sin p\pi}{2}\int_0^1 \frac{t^{p-1}-t^{q-1}}{1+t}\,dt.$$

Les intégrales relatives à $t$, qui entrent dans les équations (21) et (22), seraient précisément les intégrales eulériennes désignées par B, si $t$ y variait depuis o jusqu'à $\infty$.

9. On peut obtenir directement, et d'une manière très-simple, les formules (21), (22) et (23).

On a identiquement

$$\int_0^1 \frac{t^{p-1}\,dt}{(1+t)^{p+q}} = \frac{1}{\Gamma(p+q)}\int_0^\infty \theta^{p+q-1}e^{-\theta}\,d\theta \int_0^1 t^{p-1}\,e^{-\theta t}\,dt.$$

D'ailleurs la quantité $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\theta z}{z}\cos(t\theta z)\,dz$ est égale à 1 ou à 0, suivant que $t$ est moindre ou plus grand que 1; on aura donc

$$\int_0^1 \frac{t^{p-1}\,dt}{(1+t)^{p+q}} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\Gamma(p+q)}\int_0^\infty \theta^{p+q-1}\,e^{-\theta}d\theta \int_0^\infty t^{p-1}\,e^{-\theta t}\,dt \int_0^\infty \frac{\sin\theta z}{z}\cos(t\theta z)\,dz;$$

et comme on peut effectuer les intégrations dans un ordre quelconque,

$$\int_0^1 \frac{t^{p-1}\,dt}{(1+t)^{p+q}} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\Gamma(p+q)}\int_0^\infty \frac{dz}{z}\int_0^\infty \theta^{p+q-1}\,e^{-\theta}\sin z\theta.d\theta \int_0^\infty t^{q-1}\,e^{-\theta t}\cos(\theta z.t)\,dt.$$

L'intégrale relative à $t$, dans le second membre, a pour valeur

$$\frac{\Gamma(p)}{\theta^p(1+z^2)^{\frac{p}{2}}}\cos(p\operatorname{arc\,tang} z),$$

donc

$$\int_0^1 \frac{t^{p-1}\,dt}{(1+t)^{p+q}} = \frac{2}{\pi}\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+q)}\int_0^\infty \frac{dz}{z}\frac{\cos(p\operatorname{arc\,tang} z)}{(1+z^2)^{\frac{p}{2}}}\int_0^\infty \theta^{q-1}\,e^{-\theta}\sin z\theta.d\theta.$$

L'intégrale relative à $\theta$ a pour valeur

$$\frac{\Gamma(q)}{(1+z^2)^{\frac{q}{2}}}\sin(q\operatorname{arc\,tang} z),$$

donc

$$\int_0^1 \frac{t^{p-1}\,dt}{(1+t)^{p+q}} = \frac{2}{\pi}\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\int_0^\infty \frac{dz}{z}\,\frac{\sin(q \operatorname{arc tang} z)\cos(p \operatorname{arc tang} z)}{(1+z^2)^{\frac{p+q}{2}}}.$$

Si, enfin, on pose

$$z = \operatorname{tang}\varphi,$$

on aura

$$(24)\qquad \int_0^1 \frac{t^{p-1}\,dt}{(1+t)^{p+q}} = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{B}(p,q)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p+q-1}\varphi\,\frac{\sin q\varphi\cos p\varphi}{\sin\varphi}\,d\varphi.$$

On aurait de même

$$(25)\qquad \int_0^1 \frac{t^{q-1}\,dt}{(1+t)^{p+q}} = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{B}(p,q)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p+q-1}\varphi\,\frac{\sin p\varphi\cos q\varphi}{\sin\varphi}\,d\varphi.$$

Ajoutant ces deux équations, et remarquant que

$$\int_0^1 \frac{t^{p-1}+t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt = \mathrm{B}(p,q),$$

on aura

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p+q-1}\varphi\,\frac{\sin(p+q)\varphi}{\sin\varphi}\,d\varphi = \frac{\pi}{2},$$

qui coïncide avec l'équation (21); la valeur de cette intégrale est assez remarquable: on voit qu'elle est indépendante du paramètre $(p+q)$.

Si l'on retranche les deux équations (24) et (25) l'une de l'autre, on aura

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{p+q-1}\varphi\,\frac{\sin(q-p)\varphi}{\sin\varphi}\,d\varphi = \frac{\pi}{2\mathrm{B}(p,q)}\int_0^1 \frac{t^{p-1}-t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt,$$

laquelle se confond avec l'équation (22), de laquelle on a déduit l'équation (23).

**10.** Le premier procédé qui conduit à la démonstration de l'équation (2) ne suppose nullement connue la formule fondamentale d'Euler

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi};$$

aussi cette dernière peut-elle se déduire de l'équation (2). Si l'on pose dans celle-ci

$$m = 0, \quad n = 2a,$$

il vient

$$\Gamma(1+a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2ax\, dx},$$

ou

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Cette équation, qui fait la base d'une théorie importante, est due à Euler. Depuis, on en a donné bien des démonstrations déduites de formules plus ou moins compliquées; la plus convenable, à mon avis, et en même temps la plus simple, est celle qui a été donnée par Euler et qui était fondée sur la décomposition en fractions simples de la fraction rationnelle $\frac{x^m}{1+x^n}$ [*].

---

[*] Cette démonstration, un peu compliquée dans l'ouvrage d'Euler, peut être présentée plus simplement de la manière suivante.

La méthode des fractions rationnelles conduit aisément à la formule

$$\int_{-x}^{+x} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,dx = \sum_{k=0}^{k=n-1} \int_{-x}^{x} \frac{Ax+B}{(x-\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi}\,dx,$$

où $m$ et $n$ sont des nombres entiers tels que $m < n$, et où l'on fait pour abréger

$$\varphi = \frac{2k+1}{2n}\pi, \quad A = \frac{-\cos(2m+1)\varphi}{n} \quad \text{et} \quad B = \frac{\cos 2m\varphi}{n}.$$

Effectuant par les règles ordinaires l'intégration sous le signe $\sum$, on trouve

$$\frac{A}{2}\log\left[\frac{(x-\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi}{(x+\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi}\right] + \frac{A\cos\varphi+B}{\sin\varphi}\left[\operatorname{arc\,tang}\frac{x-\cos\varphi}{\sin\varphi} + \operatorname{arc\,tang}\frac{x+\cos\varphi}{\sin\varphi}\right],$$

expression qui se réduit à $\frac{\pi}{n}\sin(2k+1)a\pi$, dans le cas de $x=\infty$, en faisant, pour

**11.** Si dans l'équation (12) on pose

$$m = 0, \quad n = 2 - 4a,$$

et que, dans l'intégrale du second membre, on mette $\sqrt{t}$ au lieu de $t$, on aura

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1} - t^{-a}}{1-t}\, dt = \pi \operatorname{cotang} a\pi.$$

Cette formule peut servir à trouver le développement de $\operatorname{cotang} a\pi$ ; si, en effet, on remplace $\frac{1}{1-t}$ par sa valeur $\sum_0^\infty t^k$, et qu'on effectue les intégrations relatives à $t$, on aura

$$\pi \operatorname{cotang} a\pi = \sum_0^\infty \left(\frac{1}{k+a} - \frac{1}{k+1-a}\right).$$

De là on peut aussi déduire le développement en série de $\pi^m$. Si, en

---

abréger, $\frac{2m+1}{2n} = a$. D'après cela, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\, dx = \frac{\pi}{n} \sum_0^{n-1} \sin(2k+1)a\pi.$$

Or on a

$$2 \sin a\pi \sin a\pi = 1 - \cos 2a\pi,$$
$$2 \sin a\pi \sin 3a\pi = \cos 2a\pi - \cos 4a\pi,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$2 \sin a\pi \sin(2n-1)a\pi = \cos(2n-2)a\pi - \cos 2na\pi;$$

d'où

$$2 \sin a\pi \sum_0^{n-1} \sin(2k+1)a\pi = 1 - \cos 2na\pi = 2,$$

et, par suite,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\, dx = \frac{\pi}{n \sin a\pi} \quad \text{et} \quad \int_0^{\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\, dx = \frac{\pi}{2n \sin a\pi};$$

si, enfin, on met $x^{\frac{1}{2n}}$ au lieu de $x$, on aura

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\, dx = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

formule qui a évidemment lieu pour toute valeur de $a$ comprise entre 0 et 1.

effet, on différentie $(m-1)$ fois les deux membres de l'équation précédente par rapport à $a$ et qu'on fasse ensuite $a=\frac{1}{4}$, on aura, si $m$ est pair,

$$\frac{A}{2^{2m}.1.2.3\ldots(m-1)}\pi^m = 1+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{5^m}+\frac{1}{7^m}+\frac{1}{9^m}+\ldots,$$

et si $m$ est impair,

$$\frac{A}{2^{2m}.1.2\ldots(m-1)}\pi^m = 1-\frac{1}{3^m}+\frac{1}{5^m}-\frac{1}{7^m}+\frac{1}{9^m}-\ldots.$$

Dans tous les cas A est la valeur absolue de la dérivée d'ordre $(m-1)$ de cotang $\theta$, dans laquelle on fait $\theta=\frac{\pi}{4}$. On trouve ainsi

$$\frac{\pi}{4} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots,$$
$$\frac{\pi^2}{8} = 1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\ldots,$$
$$\frac{\pi^3}{32} = 1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\ldots,$$
$$\frac{\pi^4}{96} = 1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+\ldots.$$

**12.** Je terminerai cette Note en indiquant un procédé extrêmement simple et analogue à ceux que j'ai déjà employés, pour donner la valeur de $\int_0^\infty \frac{\cos ax}{(1+x^2)^n}dx$. Cette intégrale a déjà été traitée par Poisson, et plus récemment par M. Catalan qui en a fait l'objet d'une Note insérée dans le tome V de ce Journal.

On a identiquement

$$\frac{1}{(1-x\sqrt{-1})^n} = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty z^{n-1}e^{-z(1-x\sqrt{-1})}dz,$$
$$\frac{1}{(1+x\sqrt{-1})^n} = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty y^{n-1}e^{-y(1+x\sqrt{-1})}dy,$$

et, en multipliant,

$$\frac{1}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{[\Gamma(n)]^2}\int_0^\infty z^{n-1}e^{-z}dz\int_0^\infty y^{n-1}e^{-y}dy\,e^{(z-y)x\sqrt{-1}},$$

et par suite

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1} e^{ax\sqrt{-1}}\,dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{[\Gamma(n)]^2}\int_0^\infty z^{n-1} e^{-z}\,dz \int_0^\infty y^{n-1} e^{-y}\,dy \int_0^\infty x^{p-1} e^{(a+z-y)x\sqrt{-1}}\,dx;$$

dans le cas de $p = 0$, on en déduit

$$\int_0^\infty \frac{\left(\frac{\sin ax}{x}\right) dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{[\Gamma(n)]^2}\int_0^\infty z^{n-1} e^{-z}\,dz \int_0^\infty y^{n-1} e^{-y}\,dy \int_0^\infty \frac{\sin(a+z-y)x}{x}\,dx.$$

D'ailleurs $\int_0^\infty \frac{\sin(a+z-y)x}{x}\,dx$ est égal à $+\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$, suivant que $y$ est inférieur ou supérieur à $a+z$; donc

$$\int_0^\infty \frac{\left(\frac{\sin ax}{x}\right)}{(1+x^2)^n}\,dx = \frac{\pi}{2[\Gamma(n)]^2}\int_0^\infty z^{n-1} e^{-z}\,dz \left(\int_0^{a+z} y^{n-1} e^{-y}\,dy - \int_{a+z}^\infty y^{n-1} e^{-y}\,dy\right).$$

Différentiant de part et d'autre par rapport à $a$, on aura

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{(1+x^2)^n}\,dx = \frac{\pi}{2[\Gamma(n)]^2}\int_0^\infty z^{n-1} e^{-z}\,dz\,\frac{dZ}{da},$$

en posant, pour abréger,

$$Z = \int_0^{a+z} y^{n-1} e^{-y}\,dy - \int_{a+z}^\infty y^{n-1} e^{-y}\,dy.$$

Mais, par les règles ordinaires de la différentiation sous le signe $\int$, on trouve immédiatement

$$\frac{dZ}{da} = 2(a+z)^{n-1} e^{-(a+z)}.$$

Donc

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{(1+x^2)^n}\,dx = \frac{\pi}{[\Gamma(n)]^2}\int_0^\infty e^{-(a+2z)}(z+a)^{n-1} z^{n-1}\,dz,$$

ou, en mettant $\frac{a}{2}(z-1)$ au lieu de $z$,

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{(1+x^2)^n}\,dx = \frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^{2n-1}}{[\Gamma(n)]^2}\int_1^\infty e^{-az}(z^2-1)^{n-1}\,dz.$$

Les deux formules précédentes ont été données par M. Catalan; mais sa démonstration plus restreinte suppose que $n$ est un nombre entier. Dans le cas de $n = 1$, on a la formule connue

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,e^{-a}.$$

La démonstration que Poisson et M. Catalan ont donnée des formules précédentes, s'appuie sur l'équation

$$\int_0^\infty \cos ax\,dx = 0,$$

qu'il serait bon de ne pas employer, puisque la valeur de l'intégrale $\int_0^\infty \cos ax\,dx$ est évidemment indéterminée.

On pourrait aisément éviter cette difficulté en opérant de la manière suivante.

Soit

$$z = \int_0^\infty \frac{\left(\frac{\sin ax}{x}\right)}{(1+x^2)^n}\,dx - \frac{\pi}{2};$$

on obtiendra l'équation

$$z - n\frac{d^2z}{da^2} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^4z}{da^4} - \ldots \pm n\frac{d^{2n-2}z}{da^{2n-2}} \mp \frac{d^{2n}z}{da^{2n}} = \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx - \frac{\pi}{2},$$

et comme l'expression

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx - \frac{\pi}{2}$$

est rigoureusement nulle, on n'aura plus qu'à intégrer l'équation différentielle que l'on peut écrire symboliquement de la manière suivante

$$\left(1 - \frac{d^2z}{da^2}\right)^n = 0.$$

Cette équation étant intégrée et les constantes ayant été déterminées, on obtiendra l'intégrale cherchée

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{(1+x^2)^n}\,dx,$$

en prenant la dérivée de $z$ par rapport à $a$.

Soit, par exemple, $n = 1$; on aura

$$z = \int_0^\infty \frac{\left(\frac{\sin ax}{x}\right)}{1+x^2}\,dx - \frac{\pi}{2}, \quad \text{et} \quad -\frac{d^2z}{da^2} = \int_0^\infty x^2 \frac{\left(\frac{\sin ax}{x}\right)}{1+x^2}\,dx.$$

d'où

$$z - \frac{d^2z}{da^2} = 0,$$

équation rigoureusement établie. On en déduit

$$z = \mathrm{A}e^{-a} + \mathrm{B}e^{a},$$

ou simplement

$$z = \mathrm{A}e^{-a},$$

puisque $z$ ne peut croître indéfiniment avec $a$. Pour déterminer A, on remarquera que $z + \frac{\pi}{2}$ doit s'évanouir pour $a = 0$, ce qui donne

$$\mathrm{A} = -\frac{\pi}{2},$$

et par suite

$$\int_0^\infty \frac{\left(\frac{\sin ax}{x}\right)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-a}),$$

et, en différentiant les deux membres par rapport à $a$,

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-a}.$$

Je pense que cette démonstration de la formule précédente remplacerait avec avantage celles qu'on donne habituellement dans les traités de calcul intégral.