JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Note sur les transcendantes elliptiques de première et de seconde espèce, considérées comme fonctions de leur module

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 5 (1840), p. 34-36.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1840_1_5__34_0>

NOTE
SUR LES TRANSCENDANTES ELLIPTIQUES
DE PREMIÈRE ET DE SECONDE ESPÈCE,
CONSIDÉRÉES COMME FONCTIONS DE LEUR MODULE;

PAR J. LIOUVILLE. [*]

Les intégrales indéfinies que Legendre a nommées fonctions elliptiques de première et de deuxième espèce, contiennent sous le signe $\int$ un binome dont le premier terme est l'unité et dont le second terme est le carré du produit d'une constante par le sinus de l'amplitude, c'est-à-dire par le sinus de la variable à laquelle se rapporte l'intégration. Ce binome est affecté de l'exposant $\frac{1}{2}$ dans les fonctions de seconde espèce, et de l'exposant $-\frac{1}{2}$ dans celles de première espèce : la constante qu'il renferme s'appelle le module.

Quand on donne au module une valeur fixe que je supposerai différente de zéro, les deux quantités dont nous parlons ne dépendent plus que de l'amplitude, et elles constituent, comme je l'ai prouvé dans un autre Mémoire, des transcendantes tout-à-fait distinctes des logarithmes et des exponentielles, de telle sorte qu'on ne peut les écrire sous forme finie à l'aide des seuls signes algébriques, exponentiels et logarithmiques. La méthode que j'ai suivie pour établir ce théorème a offert, si je ne me trompe, le premier exemple d'une démonstration rigoureuse de l'impossibilité d'une intégrale indéfinie en fonction finie explicite de la variable. Elle a été publiée en 1833, dans le *Journal de l'École Polytechnique;* et je ne sache pas que depuis cette époque on ait élevé contre elle aucune objection digne d'une réfutation sérieuse.

Si maintenant on attribue à l'amplitude une valeur déterminée différente de zéro, et qu'on laisse au contraire variable le module supposé

---

[*] Le Mémoire dont nous donnons ici l'analyse paraîtra dans un prochain cahier de ce Journal.

tout-à-l'heure constant, nos transcendantes deviendront des fonctions du module, et l'on peut se demander s'il sera encore impossible de les exprimer sous forme finie en termes algébriques, exponentiels et logarithmiques, relatifs à la nouvelle variable. Or je suis parvenu à démontrer qu'en effet cette impossibilité subsiste; mais l'analyse dont j'ai fait usage en résolvant ce nouveau problème diffère beaucoup de celle dont je m'étais servi dans le Mémoire de 1833. Les fonctions elliptiques de première et de deuxième espèce, considérées comme fonctions du module, satisfont en effet à deux équations différentielles du second ordre, assez compliquées, tandis que, par rapport à l'amplitude, ces mêmes fonctions elliptiques sont de simples intégrales indéfinies dont l'élément est connu. Les deux questions que j'ai traitées diffèrent donc entre elles autant que l'intégration des fonctions d'une seule variable diffère de l'intégration des équations différentielles. On comprendra mieux encore l'intervalle qui les sépare si j'ajoute que les transcendantes dont nous nous occupons ne deviendraient pas des fonctions du module composées d'un nombre limité de termes, quand même on joindrait aux signes algébriques, exponentiels et logarithmiques, le signe $\int$ indiquant une intégrale indéfinie relative à la variable indépendante, c'est-à-dire une intégrale dont la limite supérieure est précisément le module, et dont la limite inférieure est une constante déterminée ou arbitraire. Ainsi les fonctions elliptiques sont des transcendantes d'un ordre plus élevé par rapport au module que par rapport à l'amplitude.

Ces recherches, et plusieurs autres que j'ai publiées antérieurement, appartiennent à une grande théorie que les géomètres n'ont pas encore étudiée, je crois, avec l'attention persévérante qu'elle mérite. Cette théorie a pour objet de découvrir, dans chaque question, toutes les solutions qui peuvent s'écrire à l'aide d'un nombre limité de signes analytiques donnés d'avance, ou à prouver qu'il n'existe pas de telles solutions. Seule elle peut conduire à une classification vraiment philosophique des transcendantes. On la rencontre dans les éléments mêmes, et dès les premiers pas qu'on fait en algèbre. Après avoir donné les règles de la multiplication des polynomes, veut-on passer à la division? de suite on est arrêté, puisque deux polynomes pris au hasard ne sont pas toujours divisibles l'un par l'autre. Il faut donc, 1° trouver une méthode pour effectuer la division toutes les fois qu'elle est possible, ou pour prouver qu'elle ne l'est pas; 2° créer un signe nouveau pour indiquer les divisions qu'on ne peut pas effectuer, et par suite ajouter aux fonctions entières, seules connues jusque-là, les fonctions rationnelles. Mais quand on veut extraire les racines de ces fonctions, une semblable difficulté nous arrête encore et donne naissance à une règle par laquelle on effectue les extractions possibles et à un signe qui indique celles qui ne le sont pas. Ainsi pour la première fois sont introduites dans le calcul les fonctions radicales. Ces fonctions radicales ne sont pas d'ailleurs toutes de même espèce, et une discussion approfondie est nécessaire pour les classer. N'est-il pas évident que ces idées si simples doivent encore être applicables aux parties élevées de l'analyse, et qu'après avoir ajouté aux fonctions algébriques les fonctions exponentielles et les fonctions logarithmiques qui ne peuvent pas se réduire entre elles, il faut, à chaque fois que l'on rencontre une quantité nouvelle, chercher si elle peut ou non s'exprimer par les fonctions déjà connues? Les géomètres, ce me semble, trouveront peu de sujets plus vastes, plus dignes de leurs méditations : dans aucun cas, du moins, on ne s'avisera de contester à ceux qui en auront traité, même une petite partie, le mérite de la difficulté vaincue.