JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

V.-A. LEBESGUE

Addition à la note sur l'équation $x^7 + y^7 + z^7 = 0$

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 5 (1840), p. 348-349.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1840_1_5__348_0>

ADDITION

à la Note sur l'équation $x^7 + y^7 + z^7 = 0$;

Par M. V.-A. LEBESGUE [*].

M. Liouville vient de me communiquer une lettre de M. Lamé, relative à la Note dont il s'agit.

« J'ai vu avec tout le soin possible, dit M. Lamé, la démonstration » de M. Lebesgue; mais j'ai été arrêté sur un point qu'il importe d'é» claircir : vous savez qu'au commencement il y a quatre décomposi» tions, desquelles trois se trouveraient absurdes, suivant l'auteur, » parce que leurs seconds membres seraient de la forme $4k+3$; or l'un » de ces cas, le troisième des quatre, conduit à l'équation

$$q^2 - 2^{a-1}.3.7^4 t^2 s^2 = 2^{4a-4}.s^4 - 7^7 t^4,$$

» et puisque a, plus grand que 1, est au moins 2, que q, t, s, sont im» pairs, le premier membre est $\equiv +1$ (mod. 8), et le second membre » (qui devrait être de la forme $4k+3$, d'après M. Lebesgue), est

$$\equiv -7^7 \text{ (mod. 8)} \equiv -(8-1)^7 \equiv -(-1)^7 \equiv +1;$$

» ainsi, le second membre est, comme le premier, de la forme $8i+1$, » ou $4k+1$.

» D'après cela, il y a un autre cas à considérer, etc. »

L'objection de M. Lamé est très fondée. Elle porte, comme on voit, sur le troisième des quatre cas indiqués à la ligne 4 de la page 277 de ce volume. Heureusement j'ai reconnu qu'on peut aisément compléter ma démonstration, et prouver d'une manière simple que le système d'équations

[*] Voir le Cahier d'août, page 276.

$$p+q^2-2^{2a-1}.3.7^4t^2s^2=2^{4a-3}s^4,\quad p-q^2+2^{a-1}.3.7^4t^2s^2=2.7^7t^4,$$

où p, q, t, s, sont des nombres impairs premiers entre eux et a un entier positif est impossible.

En effet, les deux équations précédentes donnent

$$q^2-2^{2a-1}.3.7^4t^2s^2=2^{4a-4}s^4-7^7t^4,$$

ou

$$(2^{2a-2}s^2+3.7^4t^2)^2-q^2=2^6.7^7.t^4.$$

Si l'on pose $t=uv$ en représentant par u et v des entiers impairs premiers entre eux, on aura les deux décompositions

$$2^{2a-2}s^2+3.7^4t^2\pm q=2v^4,\qquad \text{ou}\quad =2.7^7v^4,$$
$$2^{2a-2}s^2+3.7^4t^2\mp q=2^5.7^7u^4,\qquad \text{ou}\quad =2^5.u^4.$$

La première donne

$$2^{2a-2}s^2=v^4-3.7^4.u^2v^2+2^4.7^7u^4,$$

équation impossible, son second membre ayant la forme $4k+2$.

La seconde donne

$$2^{2a-2}s^2=7^7v^4-3.7^4u^2v^2+2^4u^4:$$

si l'on multiplie les deux membres par 2^6, on aura

$$2^{2a+4}s^2-(2^5u^2-3.7^4v^2)^2=7^7v^4.$$

Posant $v=m.n$, les nombres impairs m, n, étant premiers entre eux, on a les décompositions

$$2^{a+2}s\pm(2^5u^2-3.7^4.v^2)=m^4,\quad 2^{a+2}s\mp(2^5.u^2-3.7^4.v^2)=7^7n^4,$$

d'où par addition

$$2^{a+3}s=m^4+7^7n^4.$$

Mais m^4, n^4 ont la forme $16k+1$, $7^7=7(3.16+1)^3=16g+7$; le deuxième membre a donc la forme $16k+8$, c'est-à-dire qu'il est seulement divisible par 2^3, tandis que le premier membre l'est par 2^{a+3}. Il est donc démontré que le système en question est impossible.