JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LEBESGUE

Note sur une formule de M. Cauchy

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 5 (1840), p. 186-188.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1840_1_5__186_0>

NOTE

SUR UNE FORMULE DE M. CAUCHY;

PAR M. LEBESGUE.

Dans le *Compte rendu des séances de l'Académie des Sciences*, 6 avril 1840 [*], M. Cauchy a montré que les théorèmes les plus élevés de la théorie des résidus quadratiques peuvent être déduits de la formule

$$a^{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{1}{2}+e^{-a^2}+e^{-4a^2}+e^{-9a^2}+\ldots\right)=b^{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{1}{2}+e^{-b^2}+e^{-4b^2}+e^{-9b^2}+\ldots\right), \quad (1)$$

où l'on suppose $ab=\pi$, formule dont la démonstration remonte à l'année 1817.

La formule de M. Cauchy ne diffère que par la forme de celle-ci,

$$\pi+2\pi\sum e^{-4k\pi^2n^2}=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{k}}+\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{k}}\sum e^{-\frac{n^2}{4k}}, \quad (2)$$

les sommes étant prises de $n=0$ à $n=\infty$; car si l'on fait $\frac{1}{4k}=a^2$, $4k\pi^2=b^2$, d'où $ab=\pi$, on retrouve la formule (1). L'équation (2) a été donnée par M. Poisson dans le *Journal de l'École Polytechnique*, XIX^e cahier, page 420.

La supposition $a^2=\frac{1}{4k}=\pi x$ change les formules (1) et (2) en

$$\sqrt{\frac{1}{x}}=\frac{1+2e^{-\pi x}+2e^{-4\pi x}+2e^{-9\pi x}+\ldots}{1+2e^{-\frac{\pi}{x}}+2e^{-\frac{4\pi}{x}}+2e^{-\frac{9\pi}{x}}+\ldots}. \quad (3)$$

M. Jacobi a montré depuis long-temps que cette formule (3) est une conséquence de la théorie des fonctions elliptiques.

On sait, en effet, que si l'on pose

[*] L'article cité se trouve reproduit ci-dessus (page 154).

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \mathrm{K}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}} = \mathrm{K}', \quad k^2+k'^2=1.$$

et

$$e^{-\frac{\pi\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}} = q,$$

on aura $\sqrt{\frac{2\mathrm{K}}{\pi}} = 1+2q+2q^4+2q^9+\ldots$ (V. *Fund. nova*, p. 30. 85. 184.

Cela posé, voici textuellement la démonstration de M. Jacobi (Journal de M. Crelle, tome III, page 307) :

« M. Poisson, dans ses savantes recherches sur les intégrales définies, a fait connaître plusieurs propriétés de la fonction Θx [*]. Les méthodes délicates propres à cet illustre géomètre trouvent une belle vérification dans la théorie des fonctions elliptiques. Par exemple, M. Poisson démontre, dans le XIX^e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, la formule remarquable

$$\sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{1+2e^{-\pi x}+2e^{-4\pi x}+\ldots}{1+2e^{-\frac{\pi}{x}}+2e^{-\frac{4\pi}{x}}+\ldots}.$$

» Soit $x = \frac{\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}$; en mettant au lieu du module k son complément
» $k' = \sqrt{1-k^2}$, x deviendra $\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{K}'} = \frac{1}{x}$. Or on a

$$\sqrt{\frac{2\mathrm{K}}{\pi}} = 1+2q+2q^4+2q^9+\ldots = 1+2e^{-\pi x}+2e^{-4\pi x}+2e^{-9\pi x}+\ldots$$

» et par suite, en changeant K en K′,

$$\sqrt{\frac{2\mathrm{K}'}{\pi}} = 1+2e^{-\frac{\pi}{x}}+2e^{-\frac{4\pi}{x}}+2e^{-\frac{9\pi}{x}}+\ldots:$$

» de là on tire sur-le-champ la formule de M. Poisson. »

---

[*] La fonction Θx, ou $\Theta\left(\frac{2\mathrm{K}x}{\pi}\right)$ selon les *Fund. nova*, est

$$1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+2q^{16}\cos 8x-\ldots = (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots$$
$$\times(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots$$

Cette belle formule est prouvée directement et indépendamment de la théorie des fonctions elliptiques, à la page 180 des *Fund. nova*.

On peut donc déduire de la théorie des fonctions elliptiques, tous les résultats que M. Cauchy a tirés de sa formule. C'est un nouvel exemple à joindre à ceux déjà donnés par M. Jacobi (Journal de M. Crelle, tome II, pages 191 et 309).

De plus, comme la division de la lemniscate se rapporte elle-même aux fonctions elliptiques, on peut voir par un article de M. Jacobi (Journal de M. Crelle, tome XIX, page 314) et par l'extrait d'une lettre de M. Lejeune-Dirichlet à M. Liouville (page 72 de ce volume), que les propriétés des nombres de la forme $a + b\sqrt{-1}$ se déduiront également de la théorie des fonctions elliptiques.

Au reste, beaucoup de propriétés des nombres sont des conséquences plus ou moins immédiates de certaines identités. Les unes sont empruntées à l'algèbre élémentaire, leur nombre pourrait être augmenté. D'autres sont empruntées à une algèbre plus élevée : telles sont les formules singulières de M. Gauss et autres semblables. D'autres dépendent de l'analyse infinitésimale, ou de certaines intégrales définies, telles que les fonctions elliptiques et les intégrales eulériennes de seconde espèce. Ces dernières applications deviendront sans doute de plus en plus nombreuses et reculeront les bornes de l'arithmétique transcendante; mais peut-être conviendra-t-il, cependant, de chercher des démonstrations purement arithmétiques des théorèmes obtenus par cette voie. Ainsi les belles propositions de M. Dirichlet sur le nombre des formes réduites pour un déterminant donné, par leur élégance et leur simplicité, permettent d'espérer qu'on en obtiendra un jour quelque démonstration plus arithmétique. On a déjà des exemples de ces sortes de simplifications. Ainsi M. Jacobi, après avoir tiré de la considération des fonctions elliptiques un théorème remarquable sur le nombre de solutions de l'équation

$$4n = x^2 + y^2 + z^2 + u^2,$$

en a donné une autre plus élémentaire et fort ingénieuse : *In gratiam virorum arithmeticorum* (voyez Journal de M. Crelle, tome XII, page 167, *De compositione numerorum e quatuor quadratis*).