JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

AUGUSTIN CAUCHY

Méthode simple et nouvelle pour la détermination complète des sommes alternées formées avec les racines primitives des équations binomes

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 5 (1840), p. 154-168.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1840_1_5__154_0>

MÉTHODE SIMPLE ET NOUVELLE

POUR

LA DÉTERMINATION COMPLÈTE DES SOMMES ALTERNÉES,

FORMÉES AVEC LES RACINES PRIMITIVES DES ÉQUATIONS BINOMES;

PAR M. AUGUSTIN CAUCHY [*].

Il est, dans la théorie des nombres, une question qui, depuis plus de trente ans, a beaucoup occupé les géomètres, et qui, tout récemment encore, a été mentionnée dans plusieurs Notes publiées par divers membres de l'Académie. Elle consiste à déterminer complétement la somme alternée des racines primitives d'une équation binome, ou, ce qui revient au même, la somme de certaines puissances de ces racines, savoir, des puissances qui ont pour exposants les carrés des nombres inférieurs au module donné. Supposons, pour fixer les idées, que le module soit un nombre premier impair. Le carré de la somme dont il s'agit se réduira, au signe près, au module, et sera d'ailleurs positif ou négatif, suivant que le module divisé par 4, donnera pour reste 1 ou 3. C'est ce que M. Gauss avait reconnu dans ses recherches arithmétiques imprimées au commencement de ce siècle. Mais lorsque du carré de la somme on veut revenir à la somme elle-même, on a un signe à déterminer; et cette détermination, comme l'ont observé MM. Gauss et Dirichlet, est un problème qui présente de grandes difficultés. Les méthodes à l'aide desquelles on est parvenu jusqu'ici à surmonter cet obstacle, sont celles que M. Gauss a développées dans son beau Mémoire qui a pour titre : *Summatio serierum quarumdam singularium*, et celle que M. Dirichlet a déduite de la considération des intégrales définies [**]. En réflé-

[*] Cet article et le suivant sont extraits des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*.

[**] Voyez aussi un Mémoire de M. Lebesgue, qui vient de paraître dans ce Journal (février 1840).

chissant sur cette matière, j'ai été assez heureux pour trouver d'autres moyens de parvenir au même but; et d'abord il est assez remarquable que la formule de M. Gauss, qui détermine complétement les sommes alternées avec leurs signes, se trouve comprise comme cas particulier dans une autre formule que j'ai donnée en 1817 dans le *Bulletin de la Société Philomatique*. Cette dernière formule, qui parut digne d'attention à l'auteur de la *Mécanique céleste,* sert à la transformation d'une somme d'exponentielles dont les exposants croissent comme les carrés des nombres naturels; et, lorsqu'on attribue à ces exposants des valeurs imaginaires, on retrouve avec la formule de M. Gauss la loi de réciprocité qui existe entre deux nombres premiers. Mais la formule de 1817 était déduite de la considération des fonctions réciproques, par conséquent de théorèmes relatifs au calcul intégral; et ce que les géomètres apprendront sans doute avec plaisir, c'est que. sans recourir ni au calcul intégral, ni aux séries singulières dont M. Gauss a fait usage, on peut directement, et par une méthode fort simple, transformer en produit une somme alternée, en déterminant le signe qui doit affecter ce même produit. Cette méthode a d'ailleurs l'avantage d'être applicable à d'autres questions du même genre. Ainsi en particulier l'on reconnaîtra sans peine que, si, n étant un nombre premier, $n-1$ est divisible par 3, ou par 5, etc., un facteur primitif de n, correspondant au diviseur 3, sera proportionnel au produit de $\frac{n-1}{3}$ facteurs trinomes, tandis qu'un facteur primitif de n, correspondant au diviseur 5, sera proportionnel au produit de $\frac{n-1}{5}$ facteurs pentanomes ou composés chacun de cinq termes; et le rapport du produit en question au facteur primitif de n sera la somme de certaines racines de l'unité respectivement multipliées par des coefficients qui seront équivalents. suivant le module n, à des quantités connues. J'ajouterai que des formules relatives à la détermination complète d'une somme alternée, dans le cas où n est un nombre premier, on déduit aisément les formules analogues qui se rapportent au cas où n est un nombre composé quelconque, et la démonstration du théorème suivant lequel, dans une semblable somme, ou la plupart des termes positifs, ou la moitié de ces termes, doivent offrir des exposants inférieurs à $\frac{1}{2}n$.

§ I^er. *Valeurs exactes des sommes alternées des racines primitives d'une équation binome.*

Nommons ρ l'une des racines primitives de l'équation binome

$$x^n = 1, \tag{1}$$

et Δ une somme alternée de ces racines, qui soit en même temps une fonction alternée des racines primitives de chacune des équations que l'on peut obtenir, en remplaçant n par un diviseur de n. Si n est un nombre impair dont les facteurs premiers soient inégaux, la valeur de Δ sera égale, au signe près, à celle que donne la formule

$$\Delta = 1 + \rho + \rho^4 + \rho^9 + \ldots + \rho^{(n-1)^2}. \tag{2}$$

Si d'ailleurs on pose, pour abréger,

$$\omega = \frac{2\pi}{n}, \tag{3}$$

on pourra prendre

$$\rho = e^{\omega\sqrt{-1}}, \tag{4}$$

et alors la formule (1) deviendra

$$\Delta = 1 + e^{\omega\sqrt{-1}} + e^{4\omega\sqrt{-1}} + \ldots + e^{(n-1)^2\omega\sqrt{-1}}. \tag{5}$$

Or la valeur de Δ, donnée par l'équation (5), est ce que devient la somme des n premiers termes de la série

$$1,\quad e^{-a^2},\quad e^{-4a^2},\quad e^{-9a^2},\quad \text{etc.}\ldots, \tag{6}$$

quand on y remplace a^2 par $-\omega\sqrt{-1}$; et j'ai remarqué dès l'année 1817, dans le *Bulletin de la Société Philomatique*, comme dans mes leçons au Collége de France, que la considération des fonctions réciproques fournit entre les termes de la série (6) et ceux de la série semblable,

$$1,\quad e^{-b^2},\quad e^{-4b^2},\quad e^{9b^2},\ldots \tag{7}$$

une relation exprimée par la formule

$$(8)\quad a^{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{1}{2}+e^{-a^2}+e^{-4a^2}+\ldots\right)=b^{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{1}{2}+e^{-b^2}+e^{-4b^2}+\ldots\right),$$

quand a et b représentent deux quantités positives, assujéties à vérifier la condition

$$(9)\qquad ab=\pi.$$

La formule (8) parut digne d'attention à l'auteur de la *Mécanique céleste*, qui me dit l'avoir vérifiée dans le cas où l'un des nombres a, b devient très petit. Effectivement la formule (8), qu'on peut encore écrire comme il suit,

$$a\left(\tfrac{1}{2}+e^{-a^2}+e^{-4a^2}+\ldots\right)=\pi^{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{1}{2}+e^{-\frac{\pi^2}{a^2}}+e^{-4\frac{\pi^2}{a^2}}+\ldots\right),$$

donnera sensiblement, si a se réduit à un très petit nombre α,

$$\alpha\left(\tfrac{1}{2}+e^{-\alpha^2}+e^{-4\alpha^2}+\ldots\right)=\tfrac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}};$$

et, pour vérifier cette dernière équation, il suffit d'observer que, d'après la définition des intégrales définies, le produit

$$\alpha\left(1+e^{-\alpha^2}+e^{-4\alpha^2}+\ldots\right)$$

a pour limite l'intégrale

$$(10)\qquad \int_0^{\infty}e^{-x^2}\,dx=\tfrac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}.$$

Il est d'ailleurs facile de s'assurer que la formule (8) peut subsister, comme l'a remarqué M. Poisson, lors même que la constante a devient imaginaire. Nous ajouterons seulement qu'alors la partie réelle de cette constante devra être positive, si elle ne se réduit pas à zéro.

Lorsque, dans la série (6), on pose $a^2=-\omega\sqrt{-1}$, la valeur de ω étant fournie par l'équation (3), ou, ce qui revient au même,

$$(11)\qquad a^2=-\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1},$$

la formule (9), ou $a^2 b^2 = \pi^2$, donne

$$b^2 = \frac{n\pi}{2}\sqrt{-1}. \tag{12}$$

Alors les termes distincts de la série (6) se réduisent à une partie de ceux que renferme le second membre de la formule (5), et les termes distincts de la série (7) à ceux qui composent le binome

$$1 + e^{-\frac{n\pi}{2}\sqrt{-1}}. \tag{13}$$

On doit donc s'attendre à voir l'équation (8) fournir la valeur du rapport qui existe entre la somme alternée Δ et le binome dont il s'agit. Or, en effet, pour obtenir cette valeur, il suffira de supposer, dans l'équation (8),

$$a^2 = \alpha^2 - \frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}, \tag{14}$$

α^2 désignant un nombre infiniment petit. Soit, dans cette hypothèse,

$$b^2 = \beta^2 + \frac{n\pi}{2}\sqrt{-1}. \tag{15}$$

β devra s'évanouir avec α, et comme la condition (9) donnera

$$\alpha^2\beta^2 + \pi\left(\frac{n}{2}\alpha^2 - \frac{2}{n}\beta^2\right)\sqrt{-1} = 0,$$

on en tirera sensiblement

$$\frac{4\beta^2}{n^2\alpha^2} = 1,$$

de sorte qu'on pourra prendre

$$\frac{2\beta}{n\alpha} = 1. \tag{16}$$

Cela posé, si l'on multiplie par $n\alpha$ les deux membres de la formule (8), les termes de la somme alternée Δ ou du binome (13) s'y trouveront multipliés par des sommes qui se réduiront sensiblement, dans le premier membre, au produit

$$a^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}},$$

et, dans le second membre, au produit

$$b^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}.$$

Donc, en laissant de côté le facteur

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}},$$

qui deviendra commun aux deux membres de la formule, on trouvera définitivement

$$(17)\qquad a^{\frac{1}{2}}\Delta = b^{\frac{1}{2}}\left(1 + e^{-\frac{n\pi}{2}\sqrt{-1}}\right),$$

ou, ce qui revient au même,

$$(18)\qquad \Delta = \frac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}\left(1 + e^{-\frac{n\pi}{2}\sqrt{-1}}\right) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{a}\left(1 + e^{-\frac{n\pi}{2}\sqrt{-1}}\right),$$

la valeur de a étant fournie par l'équation (11), ou

$$a^2 = \frac{2\pi}{n}e^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}},$$

de laquelle on tirera (voir l'*Analyse algébrique*, chap. VII et IX),

$$a = \left(\frac{2\pi}{n}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}},$$

et par suite

$$(19)\qquad \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{a} = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}} = \frac{n^{\frac{1}{2}}}{2}\left(1 + \sqrt{-1}\right).$$

Donc en supposant Δ déterminé par la formule (5), on aura, non-seulement pour des valeurs impaires du nombre n, mais généralement, et quel que soit ce nombre,

$$(20) \qquad \Delta = \frac{n^{\frac{1}{2}}}{2}\left(1+\sqrt{-1}\right)\left(1+e^{-\frac{n\pi}{2}\sqrt{-1}}\right).$$

On trouvera en particulier, 1° si n est de la forme $4x$,

$$(21) \qquad \Delta = n^{\frac{1}{2}}\left(1+\sqrt{-1}\right);$$

2° si n est de la forme $4x+1$,

$$(22) \qquad \Delta = n^{\frac{1}{2}};$$

3° si n est de la forme $4x+2$,

$$(23) \qquad \Delta = 0;$$

4° si n est de la forme $4x+3$,

$$(24) \qquad \Delta = n^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}.$$

Ainsi, les formules (20), (21), (22), (23), (24), que M. Gauss a établies dans un de ses plus beaux Mémoires, et dont M. Dirichlet a donné une démonstration nouvelle qui a été justement remarquée des géomètres, se trouvent comprises comme cas particuliers dans la formule (8), de laquelle on déduit immédiatement l'équation (20) en attribuant à l'exposant $-a^2$ une valeur infiniment rapprochée de la valeur imaginaire $\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}$, ou, ce qui revient au même, en réduisant l'exponentielle e^{-a^2} à l'une des racines primitives de l'équation (1), savoir, à celle que détermine la formule (4).

Si l'on supposait a^2 déterminé non plus par la formule (11), mais par la suivante

$$(25) \qquad a^2 = -\frac{2m\pi}{n}\sqrt{-1},$$

m étant premier à n; alors, en opérant comme ci-dessus, on obtiendrait, au lieu de la formule (20), une équation qui, combinée avec cette formule, reproduirait immédiatement la loi de réciprocité entre deux nombres premiers, ou même cette loi étendue à deux nombres impairs quelconques.

§ II. *Transformation des sommes alternées en produits.*

Soit

$$\rho$$

une racine primitive de l'équation

$$(1) \qquad x^n = 1,$$

n étant un nombre premier impair. Les diverses racines primitives de l'équation (1) pourront être représentées, ou par

$$\rho,\ \rho^2,\ \rho^3,\ldots \rho^{n-1},$$

ou par

$$\rho^m,\ \rho^{2m},\ \rho^{3m},\ldots \rho^{(n-1)m},$$

m étant premier à n. Soit d'ailleurs Δ une somme alternée de ces racines primitives. Cette somme sera de la forme

$$(2) \qquad \Delta = \rho^h + \rho^{h'} + \rho^{h''} + \ldots - \rho^k - \rho^{k'} - \rho^{k''} - \ldots,$$

les exposants

$$1,\ 2,\ 3,\ldots n-1,$$

étant ainsi partagés en deux groupes

$$h,\ h',\ h'',\ldots \quad \text{et} \quad k,\ k',\ k'',\ldots$$

dont le premier pourra être censé renfermer les résidus quadratiques

$$1,\ 4,\ \text{etc.},$$

et le second les non-résidus suivant le module n. Si l'on suppose en particulier $n = 3$, on aura simplement

$$\Delta = \rho^1 - \rho^2 = \rho^1 - \rho^{-1},$$

en sorte qu'une somme alternée Δ pourra être représentée, au signe près, par le binome

$$\rho^1 - \rho^{-1},$$

ou plus généralement par le binome

$$\rho^m - \rho^{-m},$$

m étant non divisible par 3. Si n devient égal à 5, les binomes de cette forme se réduiront, au signe près, à l'un des suivants

$$\rho^1 - \rho^4 = \rho^1 - \rho^{-1}, \quad \rho^2 - \rho^3 = \rho^2 - \rho^{-2},$$

et le produit de ces deux binomes

$$(\rho^1 - \rho^4)(\rho^2 - \rho^3) = \rho^2 + \rho^3 - \rho - \rho^4$$

représentera encore, au signe près, la somme alternée

$$\Delta = \rho + \rho^4 - \rho^2 - \rho^3,$$

qui pourra s'écrire comme il suit :

$$\Delta = (\rho^1 - \rho^{-1})(\rho^3 - \rho^{-3}).$$

J'ajoute qu'il en sera généralement de même, et que pour une valeur quelconque du nombre premier n, la somme alternée Δ pourra être réduite au produit P déterminé par la formule

$$(3) \qquad P = (\rho^1 - \rho^{-1})(\rho^3 - \rho^{-3})\ldots[\rho^{n-2} - \rho^{-(n-2)}].$$

Effectivement ce produit, égal, au signe près, au suivant

$$(\rho^1 - \rho^n)(\rho^2 - \rho^{n-2})\ldots\left(\rho^{\frac{n-1}{2}} - \rho^{\frac{n+1}{2}}\right),$$

changera tout au plus de signe, quand on y remplacera ρ par ρ^m, attendu qu'alors les termes de la suite

$$\rho, \; \rho^2, \; \rho^3, \ldots \rho^{n-1},$$

se trouveront remplacés par les termes de la suite

$$\rho^m,\ \rho^{2m},\ \rho^{3m},\ldots \rho^{(n-1)m},$$

qui sont les mêmes, à l'ordre près, et un binome de la forme

$$\rho^l - \rho^{-l}$$

par un binome de la même forme

$$\rho^{ml} - \rho^{-ml}.$$

Donc le produit P ne pourra représenter qu'une fonction symétrique ou une fonction alternée des racines primitives de l'équation (1). Donc il sera de l'une des formes

$$\mathrm{a},\ \mathrm{a}\Delta,$$

a désignant une quantité entière positive ou négative, et son carré P^2 sera de l'une des formes

$$\mathrm{a}^2,\ \mathrm{a}^2\Delta^2.$$

Comme on tirera d'ailleurs de l'équation (3), non-seulement

$$\mathrm{P} = \rho^{1+3+5+\ldots+(n-2)}(1-\rho^{-2})(1-\rho^{-6})\ldots[1-\rho^{-2(n-2)}],$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathrm{P} = \rho^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}(1-\rho^{n-2})(1-\rho^{n-6})\ldots(1-\rho^4),$$

mais encore

$$\mathrm{P} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\rho^{-\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}(1-\rho^2)(1-\rho^6)\ldots(1-\rho^{n-4}),$$

et par suite,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}^2 &= (-1)^{\frac{n-1}{2}}(1-\rho^2)(1-\rho^4)(1-\rho^6)\ldots(1-\rho^{n-6})(1-\rho^{n-4})(1-\rho^{n-2})\\ &= (-1)^{\frac{n-1}{2}}(1-\rho)(1-\rho^2)\ldots(1-\rho^{n-1}) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}n,\end{aligned}$$

il est clair que P^2 n'étant pas de la forme a^2, devra être de la forme $a^2\Delta^2$. On aura donc

$$(4)\qquad (-1)^{\frac{n-1}{2}} n = a^2\Delta^2,\quad P = a\Delta.$$

Or Δ^2 ne pouvant être qu'une fonction symétrique de ρ, $\rho^2, \ldots$ et par conséquent un nombre entier, la seule manière de vérifier la première des équations (4) sera de poser

$$a^2 = 1,\quad \Delta^2 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n.$$

On aura donc $\qquad a = \pm 1,$

et par conséquent,

$$(5)\qquad P = \pm \Delta;$$

et toute la difficulté se réduit à déterminer le signe qui doit affecter le second membre de la formule (5). Or si, dans la somme alternée

$$\Delta = \rho^h + \rho^{h'} + \rho^{h''} + \ldots - \rho^k - \rho^{k'} - \rho^{k''} - \text{etc.},$$

on remplace généralement

$$\rho^l \text{ par } \left(\frac{l}{n}\right),$$

cette somme sera remplacée elle-même par la suivante

$$\left(\frac{h}{n}\right) + \left(\frac{h'}{n}\right) + \ldots - \left(\frac{k}{n}\right) - \left(\frac{k'}{n}\right) - \text{etc.} = n - 1 \equiv -1,\quad (\text{mod. } n),$$

tandis que la somme alterne $-\Delta$ se changera en

$$-(n-1) \equiv 1,\quad (\text{mod. } n).$$

Donc, pour décider si dans la formule (5) on doit réduire le double signe au signe $+$ ou au signe $-$, il suffira de chercher la quantité en laquelle se transforme le développement de P quand on y remplace chaque terme de la forme ρ^l par $\left(\frac{l}{n}\right)$, et de voir si cette quantité, divisée par 4, donne pour reste -1 ou $+1$. Or, comme le développement de P se composera de termes de la forme

$$\pm \rho^{\pm 1 \pm 3 \pm 5 \pm \ldots},$$

le signe qui précède ρ étant le produit des signes qui précèdent les nombres $1, 3, 5 \ldots$, la quantité dont il s'agit sera la somme des expressions de la forme

$$\pm \left(\frac{\pm 1 \pm 3 \pm 5 \pm \ldots}{n}\right),$$

le signe placé en dehors des parenthèses étant le produit des signes placés au dedans. Elle sera donc équivalente, suivant le module n, à la somme des expressions de la forme

$$(6) \qquad \pm [\pm 1 \pm 3 \pm 5 \pm \ldots \pm (n-2)]^{\frac{n-1}{2}}.$$

Ainsi, en particulier, elle sera équivalente, pour $n = 3$, à

$$1^1 - (-1)^1 = 2 \equiv -1, \ (\text{mod. } 3);$$

pour $n = 5$, à

$$(1+3)^2 + (-1-3)^2 - (-1+3)^2 - (1-3)^2 \equiv 4 \equiv -1, \ (\text{mod. } 5).$$

D'ailleurs, si l'on suppose le nombre de lettres $a, b, c \ldots$, égal à m, la somme des expressions de la forme

$$(7) \qquad \pm (\pm a \pm b \pm c \pm \ldots)^m,$$

étant développée suivant les puissances ascendantes de $a, b, c \ldots$, ne pourra, si le signe extérieur est le produit des signes intérieurs, renfermer aucun terme dans lequel l'exposant de a, ou de b, ou de $c \ldots$ s'évanouisse, puisque le coefficient d'un semblable terme dans cette somme serait évidemment

$$2^{m-1} - 2^{m-1} = 0.$$

Donc la somme des expressions (7) se réduira au produit de leur nombre 2^m par le seul terme

$$1.2.3 \ldots m.abc \ldots;$$

et si l'on prend pour

$$a,\ b,\ c\ldots$$

les nombres

$$1,\ 3,\ 5\ldots\ 2m-1,$$

cette somme aura pour valeur le produit

$$2^m(1.2.3\ldots m)\,1.3.5\ldots(2m-1) = 1.2.3.4\ldots 2m.$$

Donc la somme des expressions (6) aura elle-même pour valeur le produit

$$1.2.3\ldots(n-1) \equiv -1,\ (\text{mod.}\ n);$$

et P se transformera en une somme équivalente à -1, si l'on y remplace généralement ρ^l par $\left(\frac{l}{n}\right)$; d'où il suit que l'équation (5) devra être réduite à

$$(8) \qquad \mathrm{P} = \Delta.$$

En d'autres termes, on aura

$$(9) \qquad (\rho^1-\rho^{-1})(\rho^3-\rho^{-3})\ldots[\rho^{n-2}-\rho^{-(n-2)}] = \rho^h+\rho^{h'}+\rho^{h''}+\ldots-\rho^k-\rho^{k'}-\rho^{k''}-\ldots,$$

$h, h', h'', \ldots$ étant les résidus, et $k, k', k'', \ldots$ les non-résidus inférieurs au module n. Comme on aura d'ailleurs

$$(10) \qquad 0 = 1+\rho^h+\rho^{h'}+\rho^{h''}+\ldots+\rho^k+\rho^{k'}+\rho^{k''}+\ldots,$$

on tirera des formules (9) et (10), combinées entre elles par voie d'addition,

$$(11) \qquad (\rho^1-\rho^{-1})(\rho^3-\rho^{-3})\ldots[\rho^{n-2}-\rho^{-(n-2)}] = 1+2\rho^h+2\rho^{h'}+2\rho^{h''}+\ldots:$$

par conséquent,

$$(12) \qquad (\rho^1-\rho^{-1})(\rho^3-\rho^{-3})\ldots[\rho^{n-2}-\rho^{-(n-2)}] = 1+\rho+\rho^4+\rho^9+\ldots+\rho^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}.$$

Des formules (9) et (12), relatives au cas où n est un nombre premier impair, on déduit aisément celles qui sont relatives au cas où n est un nombre composé quelconque, comme je le montrerai plus en détail dans un autre article. J'observerai en finissant que, si, n étant un nombre premier de la forme $3x + 1$, α désigne une racine primitive de l'équivalence

$$x^3 = 1,$$

et m une racine primitive de l'équivalence

$$x^{n-1} \equiv 1, \ (\mathrm{mod.}\ n),$$

on obtiendra un produit P proportionnel à un facteur primitif de n, non-seulement lorsqu'on supposera la valeur de P donnée par la formule (3), mais aussi lorsqu'on prendra

$$\mathrm{P} = \left(\rho + \alpha\rho^{m^{\frac{n-1}{3}}} + \alpha^2\rho^{m^{2\frac{n-1}{3}}}\right)\left(\rho^m + \alpha\rho^{m^{1+\frac{n-1}{3}}} = \alpha^2\rho^{m^{1+2\frac{n-1}{3}}}\right)\ldots$$

le nombre des facteurs trinomes étant $\frac{n-1}{3}$. Le facteur primitif de n, auquel cette dernière valeur de P deviendra proportionnelle, sera

$$\Theta = \rho + \alpha\rho^m + \alpha^2\rho^{m^2} + \rho^{m^3} + \ldots + \alpha^2\rho^{m^{n-2}}.$$

On trouvera par exemple, pour $n = 7$, $m = 3$,

$$(\rho + \alpha\rho^2 + \alpha^2\rho^4)(\rho^3 + \alpha\rho^6 + \alpha^2\rho^5) = \alpha^2[\rho + \rho^6 + \alpha(\rho^3 + \rho^4) + \alpha^2(\rho^2 + \rho^5)],$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathrm{P} = \alpha^2\Theta;$$

pour $n = 13$, $m = 6$,

$$\begin{gathered}(\rho + \alpha\rho^9 + \alpha^2\rho^3)(\rho^6 + \alpha\rho^2 + \alpha^2\rho^5)(\rho^{10} + \alpha\rho^{12} + \alpha^2\rho^4)(\rho^8 + \alpha\rho^7 + \alpha^2\rho^{11}) \\ = (1 + 2\alpha)[\rho + \rho^8 + \rho^{12} + \rho^5 + \alpha(\rho^6 + \rho^9 + \rho^7 + \rho^4) + \alpha^2(\rho^{10} + \rho^2 + \rho^3 + \rho^{11})]\end{gathered}$$

ou $$\mathrm{P} = (1 + 2\alpha)\Theta, \text{ etc}\ldots$$

D'ailleurs, pour établir la proportionnalité de P et de Θ considérés comme fonction de ρ, il suffira d'observer que P se change en $\frac{\mathrm{P}}{\alpha}$ quand on y remplace ρ par ρ^m. Quant au rapport $\frac{P}{\Theta}$, il ne pourra être qu'une fonction entière de α, que l'on pourra réduire à la forme

$$a + b\alpha;$$

et une méthode semblable à celle par laquelle nous avons déterminé le signe de Δ dans la formule (17), fera connaître les nombres entiers a, b, ou du moins des quantités équivalentes à ces mêmes nombres suivant le module n. Enfin l'on pourrait étendre les propositions que nous venons d'indiquer à des produits P composés de facteurs polynomes dont chacun offrirait plus de 3 termes; par exemple, 5 termes si $n - 1$ était divisible par 5, 7 termes si $n - 1$ était divisible par 7, etc...