JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de plusieurs quantités positives

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 4 (1839), p. 493-494.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1839_1_4__493_0>

Sur la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de plusieurs quantités positives;

PAR J. LIOUVILLE.

Dans une des notes de son cours d'*Analyse algébrique,* M. Cauchy a prouvé que la première de ces deux moyennes est toujours supérieure ou au moins égale à l'autre, en sorte que l'on a

$$(1) \qquad \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n},$$

lorsque toutes les quantités x_1, x_2, ... x_n sont égales entre elles, et

$$(2) \qquad \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} > \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$$

dans le cas contraire. On démontre assez simplement ce théorème de la manière suivante.

Observons d'abord que les formules (1) et (2) sont nécessairement vérifiées lorsque $n = 2$, car leur premier membre est alors égal à

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2}{2} + \sqrt{x_1 x_2},$$

tandis que le second se réduit à $\sqrt{x_1 x_2}$. Cela étant, il suffit de montrer que si les formules (1) et (2) sont exactes pour une certaine valeur de n, elles ne cesseront pas de l'être en augmentant cette valeur d'une unité : en d'autres termes il s'agit de faire voir qu'en admettant les formules (1) et (2) pour une valeur donnée de n, la fonction

$$y = \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} - x_1 x_2 \ldots x_n x_{n+1}$$

sera toujours positive ou nulle, ce dernier cas n'ayant lieu que quand $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x_{n+1}$. Or en traitant x_{n+1} comme une variable continue, et prenant la dérivée de y par rapport à cette variable, on la trouve égale à

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1}}{n+1}\right)^n - x_1 x_2 \ldots x_n :$$

cette dérivée est donc une fonction croissante de x_{n+1}, laquelle s'évanouit quand

$$x_{n+1} = -(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + (n+1)\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n},$$

valeur qui se réduit à x_1 lorsqu'on a $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$; pour des valeurs de x_{n+1} plus petites ou plus grandes que celle que nous venons d'écrire, cette même dérivée est successivement négative et positive; par suite la fonction y est successivement décroissante et croissante : son minimum a lieu quand la dérivée se réduit à zéro : ce minimum est

$$n . x_1 x_2 \ldots x_n \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} - \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}\right),$$

et d'après les formules (1) et (2) il est nul ou positif; donc *à fortiori* la fonction y est aussi $\geqq 0$; de plus pour qu'elle se réduise à zéro, il faut, 1° que le minimum déterminé ci-dessus soit nul, ce qui exige que $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$; 2° que x_{n+1} ait précisément la valeur qui convient à ce minimum, c'est-à-dire soit aussi égale à x_1.