JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

THÉODORE OLIVIER

Sur une Propriété du Paraboloïde osculateur par son sommet en un point d'une surface du second degré

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 3 (1838), p. 249-254.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1838_1_3__249_0>

Sur une Propriété du Paraboloïde osculateur par son sommet en un point d'une surface du second degré;

Par M. Théodore OLIVIER.

Supposons deux surfaces dont les équations soient algébriques, et toutes deux du degré n.

Supposons que ces deux surfaces aient un point de contact; et soient rapportées l'une et l'autre;

1°. A ce point de contact, comme origine des coordonnées;

2°. A leur normale commune, comme axe des Z.

3°. Aux tangentes à leurs lignes de courbure, comme axes des X et des Y.

(Leurs lignes de courbure ayant à l'origine des coordonnées même direction.)

Les équations de ces surfaces étant $\varphi(x,y,z)=0$ et $\psi(x,y,z)=0$, devront être telles qu'elles soient satisfaites par $x=0$, $y=0$, $z=0$, et l'on devra avoir en même temps:

$$\frac{d\varphi}{dx}=0,\quad \frac{d\varphi}{dy}=0,\quad \frac{d^2\varphi}{dxdy}=0,$$

et aussi

$$\frac{d\psi}{dx}=0,\quad \frac{d\psi}{dy}=0,\quad \frac{d^2\psi}{dxdy}=0.$$

Si ensuite on établit que ces deux surfaces ont un contact du $n^{ème}$ ordre, les deux fonctions φ et ψ seront telles qu'en faisant $z=0$ dans l'une et l'autre, on obtiendra la même fonction en x et y, que je désigne par $f(x,y)$.

Dès-lors, on conclut que toutes les surfaces du degré n et ayant en un point un contact de l'ordre n, se coupent suivant une courbe dont l'une des branches est plane et située dans leur plan tangent commun, et que l'équation de cette branche plane est $f(x,y)=0$.

Appliquons ce qui précède à deux surfaces du deuxième degré.

Les équations des deux surfaces ζ et ζ_1 osculatrices l'une à l'autre, seront

$$\text{pour } \zeta \qquad ax^2+by^2+mz^2+nxz+pyz+z=0, \qquad (1)$$
$$\text{pour } \zeta_1 \qquad ax^2+by^2+Mz^2+Nxz+Pyz+z=0. \qquad (2)$$

Cherchons l'équation de la projection sur le plan des xy de la courbe, intersection des deux surfaces données.

Il faudra éliminer z entre les équations (1) et (2).

Ces équations sont satisfaites par $z=0$... (3) et $ax^2+by^2=0$... (4). Ainsi : on voit de suite que les équations (3) et (4) seront celles d'une courbe commune aux deux surfaces ζ et ζ_1, quels que soient les coefficients m, n, p, M, N, P, et que cette courbe est un *point* lorsque a et b sont de même signe et *deux droites*, lorsque a et b sont de signes différents.

Pour effectuer l'élimination, retranchons les deux équations (1) et (2) l'une de l'autre, on aura

$$z[z(m-M)+x(n-N)+y(p-P)]=0,$$

d'où l'on tire les valeurs de z;

$$z=0 \quad \text{et} \quad z=\frac{x(N-n)+y(P-p)}{m-M}.$$

Substituant la seconde valeur de z dans l'équation (1) ou (2), on aura

$$ax^2+by^2+\left[\frac{x(N-n)+y(P-p)}{m-M}\right]\left\{\frac{m}{m-M}[x(N-n)+y(P-p)] + (nx+py+1)\left[\frac{x(N-n)+y(P-p)}{m-M}\right]\right\}=0.$$

et en ordonnant

$$\begin{array}{l|l|l|l}
+a & x^2+b & y^2+\frac{2m(N-n)(P-p)}{(m-M)^2} & xy+\frac{N-n}{m-M}x+\frac{P-p}{m-M}y=0 \quad (5)\\
+\frac{m(N-n)^2}{(m-M)^2} & \quad +\frac{m(P-p)^2}{(m-M)^2} & \quad +\frac{n(P-p)}{m-M} & \\
+\frac{n(N-n)}{m-M} & \quad +\frac{p(P-p)}{m-M} & \quad +\frac{p(N-n)}{m-M} &
\end{array}$$

Ainsi la courbe, intersection des deux surfaces ζ et ζ_1 se composera de deux branches, l'une B invariable, et dont les équations sont (3) et (4), l'autre que je désigne par A et qui sera variable suivant les valeurs attribuées à m, M, n, N, p, P, et dont la projection sur le plan xy (plan tangent au point d'osculation), aura pour équation, l'équation (5).

On voit que la courbe A peut être l'une des trois sections coniques, et qu'elle passe toujours par l'origine des coordonnées qui est le point d'osculation des deux surfaces ζ et ζ_1.

Si 1° $n = \mathrm{N} = 0$ et $p = \mathrm{P} = 0$ ou si 2° $\mathrm{N} = n$, $\mathrm{P} = p$.

L'équation (5) se réduit à

$$ax^2 + by^2 = 0.$$

La courbe complète d'intersection des deux surfaces ζ et ζ_1 est donc dans ce cas :

$$(ax^2 + by^2)^2 = 0. \qquad (6)$$

Ainsi : 1° si a et b sont de même signe, les deux surfaces n'ont d'autres points communs que le *point* de contact; 2° si a et b sont de signe contraire, les deux surfaces n'ont d'autres lignes communes que les deux *génératrices droites* qui se croisent au point de contact.

Dans le 1^{er} cas les deux surfaces ont leurs rayons de courbure *maximum* et *minimum* dirigés dans le même sens; dans le deuxième cas, les rayons de courbure sont dirigés en sens opposé.

Dans le deuxième cas, les surfaces sont *gauches*, dans le premier cas elles ne sont pas *gauches*.

L'équation (6) prouve que les deux surfaces ont, dans les deux cas, un contact du troisième ordre, ce qui doit avoir lieu en effet : car les équations seront : si $n = \mathrm{N} = 0$ et $p = \mathrm{P} = 0$,

$$\text{pour } \zeta \qquad ax^2 + by^2 + mz^2 + z = 0,$$
$$\text{pour } \zeta_1 \qquad ax^2 + by^2 + \mathrm{M}z^2 + z = 0,$$

et l'on voit que ces deux surfaces ont deux plans diamétraux principaux communs, qui sont les plans des xz et des yz; le point d'osculation est donc en même temps le sommet de l'une et l'autre surface :

ainsi se trouve vérifié le résultat déjà connu, savoir, que lorsque deux surfaces du deuxième degré ont une osculation par leurs sommets, l'ordre du contact est pair.

Et les équations seront : si $n = \mathrm{N}$, $p = \mathrm{P}$,

$$\begin{array}{ll} \text{pour } \zeta & ax^2 + by^2 + mz^2 + nxz + pyz + z = 0, \\ \text{pour } \zeta_1 & ax^2 + by^2 + \mathrm{M}z^2 + nxz + pyz + z = 0, \end{array}$$

et alors les deux surfaces ont un plan diamétral principal commun, et passant par le point d'osculation ; et en effet dans ce cas, le contact du troisième ordre doit exister.

Car, si par la normale au point d'osculation, normale qui n'est autre que l'axe des z, et par le centre de la surface ζ (ce centre étant à distance finie ou infinie), on fait passer un plan R, les cordes conjuguées de ce plan diamétral R seront parallèles au plan XY, qui est le plan tangent au point d'osculation, et à une certaine droite B. Ces cordes se projetteront donc sur le plan R suivant des perpendiculaires à l'axe des Z; dès-lors un plan Q passant par la normale Z et parallèle à la droite B, coupera la surface ζ suivant une *conique* δ ayant son sommet au point d'osculation.

Faisant la même construction pour la surface ζ_1, on aura la *conique* δ_1. Si les deux courbes δ et δ_1 sont dans un même plan Q, elles auront un contact du troisième ordre en leur sommet commun, car ces deux *coniques* ayant un sommet commun et une osculation en ce sommet, ne peuvent y avoir qu'un contact d'ordre impair.

Or, ce que nous venons de dire n'aura lieu qu'autant que les centres des deux surfaces et la normale Z seront dans un même plan R ; qu'autant que les deux surfaces ζ et ζ_1, auront un plan diamétral R commun et passant par le point d'osculation.

Et si ce plan R est un plan diamétral principal pour les deux surfaces, alors tous les plans Q', Q'',... passant par le point d'osculation et perpendiculaires au plan R couperont les deux surfaces suivant des couples de *coniques* δ' et δ'_1, δ'' et δ''_1,... qui auront une osculation du troisième ordre; les deux surfaces ζ et ζ_1 auront donc une osculation du troisième ordre, quand elles auront un plan diamétral principal commun.

Si l'on suppose que $M = o$, $P = o$, $N = o$.

Alors la surface ζ_1 sera un paraboloïde osculateur par son sommet à la surface ζ.

L'équation de la projection de la courbe A deviendra

$$ax^2 + by^2 - \frac{n}{m}x - \frac{p}{m}y = o. \qquad (7)$$

Les coordonnées du centre de cette courbe, seront :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{l'abscisse} & \alpha = -\dfrac{n}{2am}, \\ \text{l'ordonnée} & \mathcal{E} = -\dfrac{p}{2bm}. \end{array}\right\} \qquad (8)$$

La courbe rapportée à son centre et à ses axes, sera

$$ax^2 + by^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{n^2}{am^2} + \frac{p^2}{bm^2}\right). \qquad (9)$$

L'équation (7) montre que la projection, sur le plan tangent au point d'osculation, de l'intersection d'une surface du deuxième degré avec son paraboloïde osculateur par son sommet, sera une courbe de même nature que *l'indicatrice* du deuxième ordre, et que les axes de cette courbe d'intersection seront parallèles et proportionnels aux axes de *l'indicatrice*, propriété remarquable qui n'appartient pas seulement au paraboloïde osculateur par son sommet, comme nous le verrons plus loin.

Si dans l'équation (7) on suppose que $a = b$ (a et b étant de même signe). Alors la projection de l'intersection sera un cercle, alors la surface ζ sera coupée par des plans parallèles au plan des xy, qui est le plan tangent, suivant des cercles et le paraboloïde osculateur sera de révolution.

Le point d'osculation sera alors un des *ombilics* de la surface ζ, résultat déjà connu et qui se trouve vérifié.

Si l'on avait une seconde surface ζ' du second degré et dont l'équation serait :

$$ax^2 + by^2 + m'z^2 + n'xz + p'yz + z = 0,$$

l'on voit par l'équation (7) que si $\frac{n'}{m'} = \frac{n}{m} = \text{constante} = \text{C}$ et si, en même temps, $\frac{p'}{m'} = \frac{p}{m} = \text{constante} = \text{C}'$, toutes les surfaces telles que ζ' et ζ auront le même paraboloïde osculateur et se couperont toutes, suivant une même courbe plane, *ellipse* ou *hyperbole* (suivant que ces surfaces ne seront pas ou seront *gauches*), qui se projettera sur le plan tangent au point d'osculation, suivant une courbe, ayant pour équation

$$ax^2 + by^2 - \text{C}x - \text{C}'y = 0.$$