Journées Équations aux dérivées partielles

PAUL GODIN

# Transformation de Kelvin et ondes non linéaires globales

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1993), p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1993____A4_0>

# Transformation de Kelvin et ondes non linéaires globales

Paul GODIN
Université Libre de Bruxelles
Campus Plaine C.P.214
Boulevard du Triomphe
1050 Bruxelles
Belgique

On considère le problème de Cauchy

$$\Box z = \Sigma f^{ij}(z,z')\partial_{ij}^2 z + f(z,z') \text{ si } t > 0, x \in \mathbf{R}^N, \tag{1}$$

$$\partial_t^j z = z_j, j = 0,1, \tag{2}$$

où $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbf{R}^N$ est la variable d'espace, $t$ (aussi désignée par $x_0$) est la variable de temps, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ si $0 \leq i \leq N$, $z' = (\partial_t z, \partial_1 z, \ldots, \partial_N z)$, $\Box = \partial_t^2 - \sum_{j=1}^N \partial_j^2$; $f^{ij} = f^{ji} \in C^\infty$ dans un voisinage de $(0,0) \in \mathbf{R}^{N+2}$, $f^{ij}(0,0) = \partial^\alpha f(0,0) = 0$ si $|\alpha| \leq 1$. (1) est donc une perturbation quadratique de $\Box$. On ne considèrera que des données initiales $z_j$ "petites" (en des sens qui seront précisés par la suite).

Dans le cas où $z_j \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ et où des normes convenables de $z_j$ sont $\leq \epsilon$ ($\epsilon > 0$ étant petit), on a de nombreux résultats sur la durée de vie des solutions de ce problème (cf. [2], [9], [10], [14], [8], [11], [1],...). En particulier (1), (2) possède une solution globale si $\epsilon$ est assez petit lorsque $N$ est $\geq 5$ (cf. [2] si $N$ est impair, et [11] quelle que soit la parité de $N$). Si $N = 3$, il existe des contre-exemples (cf. par exemple [7]) qui montrent que (1), (2) n'a pas de solution globale en général même si les $z_j \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ sont de "taille" aussi petite que l'on veut. Néanmoins, si $N = 3$ et $f^{ij}, f$ vérifient la condition nulle, (1), (2) possède une solution globale en temps si les données initiales sont suffisamment petites (cf.[9], [2]). La condition nulle, qui porte sur le développement de Taylor de $f^{ij}, f$ en

(0,0), s'exprime ainsi :

$$f^{ij}(z,p) = c\eta^{ij}z + \Sigma c_k^{ij}p_k + \mathcal{O}(z^2 + |p|^2) \text{ si } (z,p) \to (0,0),$$

où $c, c_k^{ij} \in \mathbf{R}$, $\eta^{ij} = 0$ si $i \neq j$, $\eta^{00} = 1$, $\eta^{ii} = -1$ si $i > 0$, et $\Sigma c_k^{ij}p_ip_jp_k \equiv 0$ si $p_0^2 = \sum_1^3 p_k^2$; et

$$f(z,p) = \Sigma c^{ij}p_ip_j + \mathcal{O}(|z|^3 + |p|^3) \text{ si } (z,p) \to (0,0),$$

où $c^{ij} \in \mathbf{R}$ et $\Sigma c^{ij}p_ip_j \equiv 0$ si $p_0^2 = \sum_1^3 p_k^2$.

La démonstration de [2] est basée sur une transformation du problème (1), (2), global en $t > 0$, en un problème sur un intervalle de temps borné. On utilise le principe suivant ([6]): si $(M_1, g_1)$ et $(M_2, g_2)$ sont 2 variétés pseudo-riemanniennes hyperboliques de dimension $n$ et si $\Phi : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$ est une application conforme telle que $\Phi^* g_2 = \lambda g_1$, alors, en désignant par $\Box_j$ et $K_j$ le d'Alembertien et la courbure scalaire de $(M_j, g_j)$, on a:

$$\left(\Box_1 + \frac{n-2}{4(n-1)}K_1\right)\left(\lambda^{\frac{n-2}{4}}(u \circ \Phi)\right) = \lambda^{\frac{n+2}{4}}\left(\left(\Box_2 + \frac{n-2}{4(n-1)}K_2\right)u\right) \circ \Phi \qquad (3)$$

si $u \in C^\infty(M_2)$. Soit alors $S^N$ munie de sa métrique canonique $m_{S^N}$. Sur $\mathbf{R}_T \times S^N$, on considère la métrique $dT^2 - m_{S^N}$. Dans [2], on considère une application conforme $\Phi : (\mathbf{R}^{N+1}, \eta) \to (\mathbf{R} \times S^N, dT^2 - m_{S^N})$, où $\eta$ est la métrique de Minkowski, telle que $0 \le T < \pi$ sur $\Phi([0, +\infty[\times \mathbf{R}^N)$. Si on transforme (1), (2) en utilisant $\Phi$ et la formule (3), on est ramené à un problème sur un intervalle de temps borné, problème qui possède une solution si les données initiales sont suffisamment petites. La transformation $\Phi$ utilisée dans [2] n'est pas adaptée à l'étude des ondes dans la description desquelles interviennent des surfaces caractéristiques: on peut en effet construire des surfaces caractéristiques de $\Box$ lisses et globales en $t > 0$ dans $(\mathbf{R}^{N+1}, \eta)$ dont l'image par $\Phi$ est la restriction à $\Phi([0, +\infty[\times \mathbf{R}^N)$ de surfaces caractéristiques du d'Alembertien de $\mathbf{R} \times S^N$ qui ne sont pas lisses partout. Il sera plus commode de prendre pour $\Phi$ l'inversion conforme $J : (t,x) \mapsto (T,X)$ où $T = \frac{t}{|x|^2 - t^2}$, $X = \frac{x}{|x|^2 - t^2}$. $J$ échange $C_+$ et $C_-$, où $C_\pm = \{(t,x) \in \mathbf{R}^{N+1}, |x| < |t|, t \gtrless 0\}$. Si $\Phi = J$ et $W(T,X) = \frac{z(t,x)}{(T^2 - |X|^2)^{\frac{N-1}{2}}}$, (3) donne

$$\Box z = (T^2 - |X|^2)^{\frac{N+3}{2}} \Box_{TX} W,$$

où $\Box_{TX} = \partial_T^2 - \Sigma \partial_{X_j}^2$. La transformation $(t,x,z) \mapsto (T,X,W)$ apparaît dans [13] et y est appelée transformation de Kelvin. (1) devient $\Box_{TX} W = \Sigma g^{ij}(T,X,W,DW)D_{ij}^2 W +$

$g(T,X,W,DW)$, où $g^{ij}(T,X,0,0) \equiv 0 \equiv \partial^{\alpha}_{W,DW} g(T,X,0,0)$ pour $|\alpha| \leq 1$. Si $N$ est impair $\geq 5$ ou si $N = 3$ et la condition nulle est satisfaite, $g^{ij}$, $g$ admettent des prolongements $C^{\infty}$ définis pour tout $(T,X) \in \mathbf{R}^{2N+2}$. Si $t_0 > M$, $J(\{(t,x) \in \mathbf{R}^{N+1}, t \geq t_0, |x| \leq t - t_0 + M\}$ $= \{(T,X) \in \mathbf{R}^{N+1}, |X| + T < 0, T \geq t_0(|X|^2 - T^2), |X| - T \leq (M - t_0)^{-1}\}$, et donc la transformation de Kelvin transforme (1), (2) en un problème en temps fini si on remplace $t$ par $t - t_0$ avec $t_0 > M$, où $M$ est tel que $z_j = 0$ si $|x| \geq M$. Cette remarque peut être exploitée pour obtenir des résultats d'existence globale d'ondes soniques et d'oscillations que l'on va décrire maintenant.

**I. Ondes soniques** ([3]).

Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^N_x$ un ouvert borné à frontière $C^{\infty}$, situé localement d'un seul côté de $\partial\Omega$. Soit $\psi \in C^{\infty}(\mathbf{R}^N)$ telle que $\psi < 0$ dans $\Omega$, $\psi > 0$ dans $\mathbf{R}^N \backslash \Omega$, $\psi = 0$ sur $\partial\Omega$ et $d\psi \neq 0$ en tout point de $\partial\Omega$. On fait les hypothèses suivantes sur les fonctions $z_j$ de (2):

$$z_j \in C^{\infty}(\bar{\Omega}) \cap C^{\infty}(\mathbf{R}^N \backslash \Omega) \cap C_0^{1-j}(\mathbf{R}^N), z_j = 0 \text{ si } |x| \geq M; \tag{4}$$

$$|\partial^{\alpha} z_j| \leq C_{\alpha}\epsilon \text{ hors de } \partial\Omega \text{ (où } \epsilon \text{ est un petit paramètre);} \tag{5}$$

$$\text{des conditions de compatibilité convenables sont satisfaites sur } \partial\Omega. \tag{6}$$

Alors, il suit des résultats de [12] que pour $t$ petit, (1), (2) possède une solution unique $z \in C^1$ (onde sonique sortante) qui a la structure suivante: $z \in C^{\infty}$ jusqu'au bord de toute composante connexe du complémentaire de $\Sigma$, où $\Sigma = \Psi^{-1}(0)$ est la surface caractéristique (du linéarisé de (2) en $z$) passant par $\{0\} \times \partial\Omega$ et satisfaisant $\partial_t \Psi < 0$. On fait également l'hypothèse de stricte convexité

$$\partial\Omega \text{ est connexe et } \psi(a) = \Sigma \partial_j \psi(a) v_j = 0 \Rightarrow \Sigma \partial^2_{jk} \psi(a) v_j v_k > 0 \text{ si } v \in \mathbf{R}^N. \tag{7}$$

Sous ces hypothèses, la transformation de Kelvin permet de montrer le résultat suivant (en plaçant les données initiales en $t = t_0$, $t_0$ assez grand).

**Théorème 1**([3]). *Supposons que $N \geq 3$ est impair et que la condition nulle est réalisée si $N = 3$. Sous les hypothèses précédentes, (1), (2) possède, pour $\epsilon$ suffisamment petit, une unique solution globale $z$ qui est une onde sonique sortante $C^{\infty}$ par morceaux, associée* *à $\Sigma$, et $\Sigma$ est elle-même $C^\infty$ et globale dans le futur. De plus, avec des constantes $C, \tilde{C}_\alpha$ indépendantes de $\epsilon$, on a:*

$$|\partial^\alpha z(t,x)| \le \tilde{C}_\alpha \epsilon (1+t+|x|)^{-\frac{N-1}{2}}(1+|t-|x||)^{-\frac{N-1}{2}} \textit{ hors de } \Sigma, -M \le t-|x| \le C \textit{ sur } \Sigma.$$

Si $N = 3$, la condition nulle est importante pour ce résultat; et si $N > 3$ et $\Omega$ n'est pas strictement convexe, ce résultat est également en défaut. On a en effet le

**Théorème 2** ([3]). *Supposons que $\Omega$ est convexe et qu'en $a \in \partial\Omega$, il y a au plus 2 courbures principales strictement $> 0$ dans la direction de $-|\psi'(a)|^{-1}\psi'(a)$. Supposons que $f^{00}(z,p) < 1$ et que $\Sigma \frac{\partial f^{ij}}{\partial p_k}(0,0)q_i q_j q_k \ne 0$ si $q = (-|\psi'(a)|, \partial_1\psi(a), \ldots, \partial_N\psi(a))$. Alors on peut trouver des données initiales $z_j$ compatibles vérifiant les hypothèses précédentes avec $\epsilon$ fixé aussi petit que l'on veut, et qui ont la propriété suivante: il existe $T < \infty$ tel que si $z$ et une onde sonique sortante solution de (1), (2), associée à la surface caractéristique $\Sigma$, alors $\Sigma$ est lisse jusqu'au temps $T$ mais $\sum\limits_{|\alpha|\le 2} \sup\limits_{t<T,(t,x)\notin\Sigma} |\partial^\alpha z(t,x)| = +\infty$.*

**II. Oscillations** ([4]).

Soit $\psi \in C^\infty(\mathbf{R}^N)$ qui a la propriété suivante: il existe $a, b \in \mathbf{R}$ avec $a < b$ tels que pour tout $\lambda \in [a,b]$, $\{x \in \mathbf{R}^N, \psi(x) < \lambda\}$ est un ouvert convexe à bord $C^\infty$ strictement convexe. Soit $B_1$ un borné fixe $\subset \psi^{-1}]a,b[$ et soit $B_2$ un borné fixe quelconque. Soit $\varphi$ solution de $\varphi_t + |\varphi_x| = 0$, $\varphi|_{t=0} = \psi$. A l'aide d'une transformation de Kelvin, on peut montrer le résultat suivant (voir [5] pour un résultat analogue, local en temps, pour des systèmes symétriques hyperboliques de 1er ordre).

**Théorème 3** ([4]). *On suppose toujours que $N$ est impair $\ge 3$, et que la condition nulle est vérifiée si $N = 3$. Soit $\mu \in \mathbf{N}$, $\mu \ge 2$. On se donne $\zeta_j(x,\theta) \in C_0^\infty(\bar{B}_1 \times [0,2\pi])$, $2 \le j \le \mu$, périodiques et de période $2\pi$ en $\theta$, telles que $\int_0^{2\pi} \zeta_j(x,\theta)d\theta = 0$. Si $N \ge 5$, on suppose que $|\frac{\partial\zeta_2}{\partial\theta}|$ est assez petit. On se donne aussi $\omega_j^k \in C_0^\infty(\bar{B}_2)$, $1 \le j \le \mu$, $k = 0, 1$. Alors il existe des fonctions $z_j(t,x,\theta)$, $1 \le j \le \mu$, $t > 0$, $x \in \mathbf{R}^N$, $0 \le \theta \le 2\pi$, avec $z_1$ indépendante de $\theta$, telles que:*

*(1)* $\partial_\theta z_j|_{t=0} = \zeta_j$ *si* $2 \le j \le \mu$, $\partial_t^k \int_0^{2\pi} z_j(t,x,\theta)d\theta|_{t=0} = \omega_j^k$ *si* $k = 0, 1$ *et* $1 \le j \le \mu$;

(2) *la fonction* $z^\epsilon(t,x) \equiv \sum_{j=1}^{\mu} \epsilon^j z_j(t,x,\frac{\varphi}{\epsilon})$ *vérifie, pour* $\epsilon$ *suffisamment petit:*

$$\Box z^\epsilon - \Sigma f^{ij}(z^\epsilon,(z^\epsilon)')\partial^2_{ij} z^\epsilon - f(z^\epsilon,(z^\epsilon)') = \epsilon^\mu g_\epsilon,$$

*où* $|\partial^\alpha_{tx} g_\epsilon| \leq C_\alpha \epsilon^{-(|\alpha|-1)^+}(1+t+|x|)^{-\frac{N+3}{2}}(1+|t-|x||)^{-\frac{N+3}{2}}$, *et* $|\partial^\alpha_{tx}\partial^\nu_{tx} z_\epsilon| \leq C_\alpha \epsilon^{1-|\alpha|}(1+t+|x|)^{-\frac{N-1}{2}}(1+|t-|x||)^{-\frac{N-1}{2}}$ *si* $|\nu| \leq 1$.

D'autre part, une tranformation de Kelvin et les résultats de [5] permettent de montrer le théorème suivant.

**Théorème 4** ([4]). *Sous les hypothèses précédentes, si* $\mu > \frac{N}{2}+1$ *et si* $\epsilon$ *est suffisamment petit, (1) possède une solution globale* $z$ *telle que* $\partial^j_t(z-z^\epsilon)|_{t=0} = 0$ *si* $j \leq 1$, *et telle que*

$$|\partial^\alpha_{tx}\partial^\nu_{tx}(z^\epsilon - z)| \leq C_\alpha \epsilon^{\mu-1-[(N+1)/2]-|\alpha|}(1+t+|x|)^{-\frac{N-1}{2}}(1+|t-|x||)^{-\frac{N-1}{2}}$$

*si* $|\nu| \leq 1$, $|\alpha| \leq \mu - [\frac{N+1}{2}] - 1$.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] S.ALINHAC, *Temps de vie et comportement explosif des solutions d'équations d'ondes quasilinéaires en dimension deux.* I, prépublication 92-77 de l'Université de Paris-Sud, 1992; II, prépublication 93-23 de l'Université Paris-Sud, 1993.

[2] D.CHRISTODOULOU, *Global solutions of nonlinear hyperbolic equations for small initial data*, Comm. Pure Appl. Math. 39 (1986), 267-282.

[3] P.GODIN, *Global sound waves for quasilinear second order wave equations*, preprint.

[4] P.GODIN, article en cours de rédaction.

[5] O.GUES, *Développement asymptotique de solutions exactes de systèmes hyperboliques quasilinéaires*, Asymptotic Analysis 6 (1993), 241-269.

[6] S.HELGASON, *Wave equations on homogeneous spaces*, Springer Lecture Notes in Math. 1077 (1984), 254-287.

[7] F.JOHN, *Non-existence of global solutions of* $\Box u = \frac{\partial}{\partial t}F(u_t)$ *in two and three space dimensions*, Supplemento al Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo; Série II, 8 (1985), 229-249.

[8] L.HÖRMANDER, *The lifespan of classical solutions of non-linear hyperbolic equations*, Springer Lecture Notes in Math. 1256 (1987), 214-280.

[9] S.KLAINERMAN, *Uniform decay estimates and the Lorentz invariance of the classical wave equation*, Comm. Pure Appl. Math. 38 (1985), 321-332.

[10] S.KLAINERMAN, *The null condition and global existence to nonlinear wave equations*, Lect. Appl. Math. 23, vol.I (1986), 293-326.

[11] T.T.LI et Y.M.CHEN, *Initial value problems for nonlinear wave equations*, Comm. Part. Diff. Eq. 13 (1988), 383-422.

[12] G.METIVIER, *Ondes soniques*, J. Math. Pures Appl. 70 (1991), 197-268.

[13] K.MORAWETZ, *Energy decay for star-shaped obstacles*, dans P.D.LAX et R.PHILLIPS, Scattering theory, Academic Press (1967).

[14] J.SHATAH, *Global existence of small solutions to nonlinear evolution equations*, J. Diff. Eq. 46 (1982), 409-425.