Journées Équations aux dérivées partielles

Ahmed Sebbar

Prolongement des solutions d'un opérateur différentiel d'ordre infini

Journées Équations aux dérivées partielles (1980), p. 1-5

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1980____A17_0>

PROLONGEMENT DES SOLUTIONS D'UN OPERATEUR DIFFERENTIEL D'ORDRE INFINI

par A. SEBBAR

1. Introduction

Dans [4] , C. O. Kiselman obtient pour les solutions holomorphes dans un ouvert convexe U de $\mathbb{C}^n$ de $P(D)u = 0$ (où $P(D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{C}$) un théorème de prolongement à un ouvert convexe maximal V, ne dépendant pas de u et dont la forme est gouvernée par les zéros de P_m : partie principale de $P(z) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha z^\alpha$. Ce même théorème est obtenu dans [3] par Bony et Schapira pour les opérateurs différentiels d'ordre fini et à coefficients variables. Ici, suivant la méthode de C. O. Kiselman, nous obtenons un théorème de prolongement pour les opérateurs différentiels d'ordre infini et à coefficients constants, vérifiant une propriété de croissance.

2. Prolongement des solutions

2.1 Définition : On appelle opérateur différentiel d'ordre infini vérifiant la propriété "P", tout opérateur :

$$f(D) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha D^\alpha \ ; \quad \text{où } f(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha$$

est une fonction entière telle que :

(i) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ tel pour tout z dans $\mathbb{C}^n$

$$|f(z)| \leq C_z \exp(\varepsilon \|z\|) \ .$$

(on dit que f est de type exponentiel nul).

(ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R_\varepsilon > 0$ tel que pour tout z dans $\mathbb{C}^n$ vérifiant $|f(z)| \leq 1$ et $\|z\| \geq R_\varepsilon$, on ait : $d(z, W_f) < \varepsilon\|z\|$ où W_f est l'ensemble des zéros de f dans $\mathbb{C}^n$.

2.2 Définition : Soit A une partie non bornée de $\mathbb{C}^n$, on appelle cône asymptotique de A et note $\alpha(A)$ le cône réel fermé engendré par l'origine de $\mathbb{C}^n$ et les valeurs d'adhérences des suites $\zeta_j / \|\zeta_j\|$, $\zeta_j \in A$ et $\lim\limits_{j \to +\infty} \|\zeta_j\| = +\infty$.

On obtient les résultats suivants ([5] [6]) :

2.3 Théorème de prolongement : Soient U un ouvert convexe de $\mathbb{C}^n$,

$V = \Gamma_{\alpha(Wf)}(U) = \bigcap\limits_{\zeta \in a_\alpha(Wf)} \{z \in \mathbb{C}^n ; \mathrm{Re} < z, \zeta > \leqslant H_U(\zeta)\}$ où f est une fonction entière de type exponentiel nul vérifiant la propriété "P". Toute solution u, holomorphe dans U, de $f(D)u = 0$, se prolonge en une solution v, holomorphe dans V, de $f(D)v = 0$.

Ce théorème repose essentiellement sur le :

2.4 Théorème de division : Soient dans $\mathbb{C}^n$ une fonction entière de type exponentiel nul vérifiant "P" et $K \subset L$ deux compacts convexes de $\mathbb{C}^n$ tels que :

$$H_L(\zeta) \leqslant H_K(\zeta) + b\log(2 + \|\zeta\|) \quad \text{si } f(\zeta) = 0$$

Pour toute fonction entière f_1 vérifiant

$$\log|f_1(\zeta)| \leqslant H_L(\zeta) + a_1 \mathrm{Log}(2 + \|\zeta\|), \quad \zeta \in \mathbb{C}^n$$

et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions f_2, f_3 entières dans $\mathbb{C}^n$ telles que :

(i) $f_1 = ff_2 + f_3$

(ii) $\log|f_2(\zeta)| \leqslant H_{L_\varepsilon}(\zeta) + a_2(\varepsilon)\mathrm{Log}(2 + \|\zeta\|), \quad \zeta \in \mathbb{C}^n$

(iii) $\log|f_3(\zeta)| \leqslant H_{K_\varepsilon}(\zeta) + u_3(\varepsilon)\mathrm{Log}(2 + \|\zeta\|), \quad \zeta \in \mathbb{C}^n$

où L (resp K_ε) est le ε- voisinage de L (resp. K). Les constantes $a_2(\varepsilon)$, $a_3(\varepsilon)$ et les fonctions f_2, f_3 dépendent de ε , f, K, L, a_1 et b, mais non de f_1 .

(On a noté par H_L la fonction d'appui de L

$$H_L(\zeta) = \sup_{u \in L} \mathrm{Re}(\zeta_1 u_1 + \ldots + \zeta_n u_n) \quad \text{si} \quad \begin{aligned} \zeta &= (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \\ u &= (u_1, \ldots, u_n) \end{aligned}\Bigg)$$

2.5 Corollaire : Soient U un ouvert convexe de $\mathbb{C}^n$, $V = \Gamma_{\alpha(Wf)}(U)$, f étant comme dans (2.1). Soient $u \in \mathcal{H}(U)$ et $v \in \mathcal{H}(V)$ telles que $f(D)u = v|U$, alors u est prolongeable en une solution u_o holomorphe dans V, de $f(D)u_o = v$.

2.6 Théorème : Soient f comme dans (2.1) et $\alpha(Wf)$ son cône asymptotique. Si toute solution u, holomorphe dans U de $f(D)u = 0$ se prolonge en une solution v, holomorphe dans V_1 de $f(D)v = 0$, alors $V_1 \subset V = \Gamma_{\alpha(Wf)}(U)$.

Contrairement au cas des opérateurs différentiels d'ordre fini, on a :

2.7 Proposition :

Soit f une fonction entière de type exponentiel nul qui n'est pas un polynôme. Si le cône asymptotique $\alpha(Wf)$ est stable par multiplication complexe, pour tout ouvert convexe U de $\mathbb{C}^n$, on a :

$$U = V = \Gamma_{\alpha(Wf)}(U)$$

Exemples :

(i) Une fonction entière f dans $\mathbb{C}^2$ vérifiant "P" et telle que $\alpha(Wf) \neq \mathbb{C}^2$:

$$f(z_1,z_2) = \prod_{n \geq 0} \left(1 - \frac{z_1^2 + z_2^2}{\alpha_n}\right) \quad , \quad \alpha_n = e^{e^n} .$$

(ii) Une fonction entière de type nul ne vérifiant "P" (Kiselman)

$$f(z) = \prod_{k \geq 0} \left(1 - \frac{z}{a^k}\right)^{n^k} \quad ; \quad a > n > 2 .$$

3. Classe normale

3.1 Définition : On appelle classe normale, la classe de toutes les fonctions pluri-sous-harmoniques V, $V(0) > -\infty$ vérifiant

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{r \displaystyle\int_r^{+\infty} \frac{\nu(t)}{t^2}\, dt}{\displaystyle\int_0^r \frac{\nu(t)}{t}\, dt} = 0$$

(où on a désigné par $\nu(t) = \nu(0,t) = (2n-2)t^{2-2n} \mu(0,t)$ $\mu(0,t)$ étant la masse portée par la boule $B(0,t)$ pour la mesure de Radon μ associée à V). Une fonction entière f, $f(0) \neq 0$ est dite de la classe normale si la fonction pluri-sous-harmonique $V = \mathrm{Log}|f|$ est de la classe normale.

Les résultats suivants s'appuient sur la méthode des boules d'exclusion de V. Aranissian [1] , [2].

3.2 <u>Proposition</u> : Toute fonction entière f, non constante, f (O) $\neq$ O et est telle que:

$$M(R,f) = \sup_{\|z\| \leqslant R} \mathrm{Log}|f(z)| = O((\mathrm{Log}\ R)^2)$$

est de la classe normale.

3.3 <u>Théorème</u> : Soit f une fonction entière de la classe normale, f(O) = 1 et non constante. Soient $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ qui à r associe

$$\sup_{x \geqslant r} \left\{ \frac{x \int_x^{+\infty} \frac{\nu(t)}{t^2}\, dt}{\int_0^x \frac{\nu(t)}{t}\, dt} \right\}^{1/4n}$$

et Ω_φ le φ-voisinage fermé de Wf

$$\Omega_\varphi = \{ z \in \mathbb{C}^n ,\ d(z,Wf) \leqslant \varphi(\|z\|)\|z\| \}$$

Si $\mathbb{C}^n \setminus \Omega_\varphi$ est non vide, on a uniformément par rapport au vecteur a, $|a| = 1$

$$\lim_{R \to +\infty} \frac{\mathrm{Log}|f(Ra)|}{M(R,f)} = 1 \quad , \quad z = Ra \in \mathbb{C}^n \setminus \Omega_\varphi$$

3.4 <u>Corollaire</u> : Toute fonction entière de la classe normale, non constante et telle que f(O) = 1 vérifie la propriété "P".

---

[1] V. Avanissian : Comptes rendus, 274, série A, 1972, p.1915.

[2] V. Avanissian : Quelques applications de la méthode des "boules d'exclusion". (Izvestia, série "Mathematika", Ac. Sc. Armenia VIII,n° 4, 1973).

[3] J. M. Bony et P. Schapira : Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles. Inventiones Math. 17 (1972) p.95-105.

[4] C. O. Kiselman : Prolongement des solutions d'une équation aux dérivées partielles à coefficients constants.
(Bull. Soc. Math. Fr. 97, 1969, p.329-356).

[5] A. Sebbar : Prolongement des solutions d'un opérateur différentiel d'ordre infini. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 289, série A, p.735-738.

[6] A. Sebbar : Prolongement des solutions d'un opérateur différentiel d'ordre infini. Séminaire Lelong-Skoda,année 1979, à paraître , Lecture Notes, et thèse de 3ème cycle, Bordeaux 1980.

***