CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

WEISHU SHIH

Sur l'équation intégro-différentielle non-linéaire et la topologie algébrique

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 23, nº 2 (1982), p. 157-163

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1982__23_2_157_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
Vol. XXIII-2 (1982)

3^e COLLOQUE SUR LES CATÉGORIES
DÉDIÉ À CHARLES EHRESMANN
Amiens, Juillet 1980

SUR L'ÉQUATION INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLE NON-LINÉAIRE ET LA TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE

par Weishu SHIH

L'égalité de consommation
pour tous les êtres humains-

En Topologie algébrique, on cherche des invariants algébriques associés à un espace, de sorte que ces invariants nous permettent de caractériser certains propriétés géométriques de l'espace, e.g. la nullité des nombres caractéristiques d'une variété différentielle compacte orientée est une condition nécessaire et suffisante pour que cette variété soit le bord d'une autre variété. Ainsi il est naturel de poser la question suivante: Peut-on construire des invariants analogues pour un système d'équations intégro-différentielles? Le but de ce travail consiste à associer à chacun de ces systèmes d'ordre k quatre invariants algébriques dont la nullité est une condition nécessaire et suffisante pour que le système possède une solution k-fois dérivable; ainsi ceci indique un processus à suivre pour trouver éventuellement une solution. Remarquons qu'une solution k-fois dérivable dans un système non linéaire est la plus faible possible, car chercher une solution dans l'espace des distributions n'a pas de sens. Rappelons qu'une telle théorie d'obstruction a été déjà obtenue [7] pour tout système d'équations aux dérivées partielles non nécessairement linéaires. Ceci est basé sur une nouvelle invariance de la topologie algébrique, dite homologie sectionnaire [6] introduite précisément à cette fin. Nous allons l'appliquer dans la suite de ce travail.

Considérons d'abord l'équation de Boltzmann (simplifiée) [1] que voici: Soit Ω un domaine borné de R^3 et $h: S^2 \to Diff(\mathrm{R}^3 \times \mathrm{R}^3)$ une application C^∞ de la sphère dans le groupe des difféomorphismes de $R^6 = R^3 \times R^3 \ni (x, x')$. On cherche une fonction $f(y, t, x)$ de $\Omega \times R \times R^3$ à valeurs dans R^+ (les nombres réels positifs) telle que

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3} x_i \frac{\partial f}{\partial y_i} + J(f, f)$$

où $y \in \Omega$, $t \in R$, et

$$J(f, f)(y, t, x) =$$
$$= \int \langle \xi, x' - x \rangle \{ f(y, t, p_1 h(\xi)(x, x')) . f(y, t, p_2 h(\xi)(x, x')) - f(y, t, x) . f(y, t, x') \} \, dx' \wedge d\xi)$$

où $\xi \in S^2 \subset R^3$, $\langle\, ,\, \rangle$ le produit scalaire, $p_i : R^3 \times R^3 \to R^3$, $i = 1, 2$, les projections canoniques, le domaine d'intégration étant constitué des couples (ξ, x') tels que $\langle \xi, x' - x \rangle > 0$. Enfin on impose la condition initiale et au bord de :

$$f(y, 0, x) = g_1(y, x)$$

et, pour $(y, t, x) \in \partial\Omega \times R \times R^3$,

$$f(y, t, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \langle y, x \rangle > 0 \\ g_2(y, t, x) & \text{si } \langle y, x \rangle \leq 0, \end{cases}$$

où g_1 et g_2 sont des fonctions C^∞ positives avec

$$g_1(y, x) = g_2(y, 0, x) \quad \text{pour} \quad y \in \partial\Omega .$$

Au lieu d'étudier cette équation directement comme dans les travaux en mathématiques dites appliquées, nous introduisons, en tenant compte de ses aspects particuliers, une classe d'opérateurs, puisqu'une théorie en mathématiques ne peut pas être satisfaite sur une équation particulière, ni même sur un type d'équations, malgré l'importance de ce cas particulier. En effet, la classe d'opérateurs que nous définissons dans la suite contient non seulement celle de Boltzmann et les analogues plus complexes en Physique [5], mais aussi tous les opérateurs dont les noyaux peuvent être des fonctions différentiables d'une inconnue, ainsi que les opérateurs différentiels et les inéquations non linéaires, de sorte que notre théorie d'obstruction s'applique également. Ceci justifie la généralisation qui suit:

Nous nous donnons une fois pour toutes des espaces fibrés $\pi: X \to B$, $\tilde{\pi}: Z \to X$, où X, B, Z sont des variétés indéfiniment dérivables, orientées ainsi que π et $\tilde{\pi}$, une fibre vectorielle réelle $E_0 \to B$ et on note $E = \pi^* E_0$, les morphismes d'espaces fibrés $i: Z \to E$, $g: E \to Z$. Désignons par $X \oplus X$ le produit fibré de π par lui-même et $p_i: X \oplus X \to X$, $i = 1, 2$ les deux projections. Ceci étant, considérons une submersion $\beta: Y \to X \oplus X$ et un morphisme d'espaces fibrés ρ à support compact:

$$\rho: \beta^*(J^k(X,Z) \oplus J^k(X,Z)) \to \Lambda^* T(Y) \oplus \beta^* p_1^* E,$$

et un difféomorphisme d'espaces fibrés λ :

$$\begin{tikzcd}
\beta^*(J^k(X,Z) \oplus J^k(X,Z)) \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d] & \beta^*(J^k(X,Z) \oplus J^k(X,Z)) \arrow[d] \\
Y \arrow[r, "\lambda"] & Y
\end{tikzcd}$$

tel que $\pi \circ \beta = \pi \circ \beta \circ \lambda$, où $J^k(X,Z)$ est la variété [4] formée par les k-jets $j^k f$ de $f \in C^\infty(X,Z)$, espace des sections C^∞ de X dans Z, et $\Lambda^* TY$ l'algèbre extérieure de l'espace cotangent de Y. Enfin notons Y_0 une sous-variété de Y. Alors on peut définir l'opérateur

$$I_{\beta,\rho,\lambda,Y_0}: C^\infty(X,Z) \to C^\infty(X,E)$$

associé à β, ρ, λ et Y_0 par

$$I_{\beta,\rho,\lambda,Y_0}(f)(x_0) = \int_{\beta^{-1}(x_0,\, \pi^{-1}(\pi(x_0))) \cap Y_0} \rho \circ \lambda(j^k f, j^k f),$$

où $f \in C^\infty(X,Z)$, $x_0 \in X$ et $(j^k f, j^k f)$ désigne la section de

$$\beta^*(J^k(X,Z) \oplus J^k(X,Z))$$

induite par f. Les morphismes d'espaces fibrés i, g et la structure additive du fibré vectoriel E nous permettent de faire les opérations suivantes: composition finie des opérateurs $I_{\beta,\rho,\lambda,Y_0}$ et des opérateurs différentiels, sommes finies, intégration le long des fibres de π et morphismes des espaces fibrés. Alors un opérateur obtenu par ces opérations

$$I: C^\infty(X,Z) \to C^\infty(X,E)$$

est appelé un *opérateur intégro-différentiel.*

Le problème de Cauchy que nous proposons d'étudier pour un tel opérateur I s'énonce comme suit: étant donné les sous-variétés

$$W \subset X, \quad D_0 \subset J^{k_0}(W, Z), \quad D \subset J^k(X, Z), \quad \text{où} \quad k_0 \leq k,$$

et les sections

$$h \in C^\infty(W, Z), \quad g \in C^\infty(X, E) \quad \text{telles que} \quad j^{k_0}(h) \subset D_0,$$

on se pose le problème de l'existence d'une section $f \in C^\infty(X, Z)$ avec

$$f|_W = h, \quad j^k f \subset D, \quad I(f) = g.$$

On vérifie aussitôt que l'équation de Boltzmann est bien un exemple de ce problème de Cauchy.

Maintenant rappelons que, à chaque application continue f d'un espace topologique W dans un autre X on a associé [6] une suite de groupes abéliens

$$H_m(f)_s = H_m(X, W)_s, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

appelés *groupes d'homologie sectionnaire de* f, qui possèdent la plupart des propriétés d'algèbre homologique d'une théorie d'homologie. Cependant on peut remarquer que l'homologie sectionnaire n'est pas un invariant du type d'homotopie de f, et dans le cas où f est une application indéfiniment dérivable entre deux variétés différentielles, les groupes sectionnaires obtenus par divers degrés de dérivabilité des simplexes utilisés sont différents. C'est bien naturel, car le problème des équations aux dérivées partielles et intégrales en général n'est pas invariant par homotopie, donc les théories d'homologie connues sont difficiles à adopter ici, ainsi que la théorie des faisceaux puisqu'il ne s'agit pas toujours de problèmes linéaires. Ceci justifie d'introduire des groupes d'homologie nouveaux. Dans le cas où la variété W est munie d'un idéal différentiel [3], alors on peut considérer les simplexes indéfiniment dérivables qui annulent cet idéal; le groupe obtenu est appelé groupe d'homologie sectionnaire attaché à cet idéal [6]. Quand X est une variété orientée de dimension n et W un espace topologique, la notion d'homologie sectionnaire permet de définir le degré de f comme le nombre d'éléments du groupe quotient

$$H_n(X, \mathbb{Z})/Im(H_n(f)_s) = \mathbb{Z}/Im(H_n(f)_s)$$

moins un. Il faut remarquer que, même dans le cas où W est aussi une variété orientée de dimension n (ainsi le degré classique est défini pour f) notre degré sectionnaire peut être strictement plus grand que le degré classique.

Plus généralement, on définira le degré d'un sous-ensemble G de $\mathbb{Z}$ par:

$$deg\,G = \begin{cases} \infty & \text{si } G \cap \mathbb{Z}_+ = \emptyset \\ \inf\limits_{x \in G \cap \mathbb{Z}_+} \{ |x-1| \} & \text{si } G \cap \mathbb{Z}_+ \neq \emptyset \end{cases}$$

Enfin étant donné un simplexe σ, un cycle c, une classe d'homologie θ, nous écrivons $\sigma \in c$, $c \in \theta$ quand le coefficient de σ dans c n'est pas nul et c appartient à la classe θ. Soit c un cycle sectionnaire de f et τ un simplexe de X avec $\tau \in f(c)$, on désigne par $\delta(\sigma)$ le nombre de simplexes γ de W tel que $(\sigma, \gamma) \in c$.

Rappelons que Cartan [2] et Ehresmann [4] ont introduit l'idéal ou système de Pfaff canonique [8] pour la variété $J^k(X, Z)$; ainsi nous pouvons considérer l'homologie sectionnaire attachée à cet idéal de l'application source $\alpha : J^k(X, Z) \to X$. Nous la notons simplement

$$H_*(X, J^k(X, Z))_s .$$

On peut alors démontrer que chaque opérateur I intégro-différentiel au sens que l'on vient de définir induit une application

$$I_*: H_n(X, J^k(X, Z))_s \to H_n(X, E)_s ,$$

où n est la dimension de X.

Revenons maintenant au problème de Cauchy pour I, D et D_0. Rappelons d'abord que l'on a construit [6] deux classes d'obstruction

$$\tilde{\rho}_1 \in H_m(i, p) \quad , \quad \tilde{\rho}_2 \in Cauchy(D, D_0),$$

où $i: W \to W$ est l'application identique et $p: J^k(X, Z)|_W \to J^{k_0}(W, Z)$ la projection canonique, et m la dimension de W. Supposons que les classes $\tilde{\rho}_1$ et $\tilde{\rho}_2$ soient nulles ; on va construire les degrés de I et D, D_0

$$deg(I, D, D_0), \quad deg'(I, D, D_0) \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$$

comme suit : Désignons par

$$i*: H_m(W, D \cap p^{-1}(D_0))_s \to H_m(W, D_0)_s\,,$$

$$j*: H_m(W, D \cap p^{-1}(D_0))_s \to H_m(W, D|_W)_s\,,$$

$$\partial*: H_n(X, D)_s \to H_m(W, D|_W)_s$$

les morphismes naturels [6] entre les groupes d'homologie sectionnaire, a désignant la restriction à D de l'application source et

$$a*: H_n(X, D)_s \to H_n(X, \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}$$

le morphisme induit par a . Soit

$$[\tilde{X}] \in H_n(X, E)_s \quad (\text{resp. } [W] \in H_m(W, D_0)_s\,)$$

la classe fondamentale déterminée par la donnée initiale et la classe $[X]$ d'orientation de X (resp. de W). Alors on définit

$$deg(I, D, D_0) = deg\, Im\, a*(\partial_*^{-1} j* i_*^{-1} [W] \cap I_*^{-1} [\tilde{X}])\,.$$

Au cas où $deg(I, D, D_0) = 0$, le degré secondaire est donné par

$$deg'(I, D, D_0) = \inf_{\substack{c \in \theta,\ a*(\theta) = [X] \\ \theta \in \partial_*^{-1} j* i_*^{-1} [W] \cap I_*^{-1} [\tilde{X}]}} \{ \sup_{\sigma \in a(c)} \{\delta(\sigma)\}\} - 1\,.$$

Donc, nous avons la réponse à la question posée au début de cet exposé :

Pour que le problème de Cauchy associé à l'opérateur intégro-différentiel I et D, D_0 possède une solution k-fois dérivable sur X, il faut et il suffit que les deux classes d'obstruction et les deux degrés soient nuls.

RÉFÉRENCES.

1. BOLTZMANN, L., *Wissenschaftliche Abhandlungen,* Hasenöchl ed., Leipzig 1909.
2. CARTAN, E., *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*, Hermann, Paris, 1945.
3. EHRESMANN, C., Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudogroupes de Lie, *Colloque International du C.N.R.S.,* Strasbourg 1953.
4. EHRESMANN, C., *Compte-rendus Acad. Sc. Paris* 239 (1954).
5. GREMELA, M,, *Helv. Phys. Acta* 50 (1977).
6. SHIH, W., *Compte-rendus Acad. Sc. Paris* 285, série A (1977).
7. SHIH, W., *Compte-rendus Acad. Sc. Paris* 286, série A (1978).
8. THOM, R., *Bull. Soc. Math. France* 87 (1959).

I.H.E.S.
35 route de Chartres
91440 BURES-SUR-YVETTE