CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

G. BLANC
M. R. DONNADIEU

Axiomatisation de la catégorie des catégories

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 17, nº 2 (1976), p. 135-170

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1976__17_2_135_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

Vol. XVII-2 (1976)

AXIOMATISATION DE LA CATEGORIE DES CATEGORIES

par G. BLANC et M. R. DONNADIEU

INTRODUCTION

Le désir de considérer la notion de correspondance ou de fonction comme primitive a séduit plus d'un mathématicien, depuis la théorie des classes de Von Neumann (*Math. Zeitsch.*, 1928) jusqu'à la théorie des topos qui permet d'envisager un fondement des Mathématiques (Osius, *J. of Pure and Ap. Algebra*, 1974) [2], en passant notamment par «*Category of categories*» de Lawvere [1]. Dans ce dernier travail, Lawvere propose une description formelle de la catégorie naïve des catégories, que nous nommerons BT dans la suite.

Le but de cet article est de développer une théorie (que nous nommerons CC) équivalente à une certaine extension de BT, ceci constituant l'approche syntaxique du concept de «catégorie des catégories», l'approche sémantique trouvant au contraire avantageusement sa place dans le cadre des catégories fibrées étudiées par J. Bénabou.

Nous avons tout d'abord essayé de trouver un langage mieux adapté (langage à deux types de variables; quelques symboles de constantes ajoutés à l'ensemble des symboles non logiques de BT).

Cette description formelle consistera évidemment à privilégier quelques propriétés caractéristiques de cette catégorie naïve, comme par exemple l'existence du produit fini de catégories ou l'existence de la catégorie des foncteurs et transformations naturelles entre deux catégories variables objets de notre théorie, c'est-à-dire intuitivement deux objets de la méta-catégorie $\mathcal{C}at$ qui constitue l'univers de notre discours. On exigera donc de celle-ci d'être à limites finies et cartésienne fermée (Ax. 2-2, 2-4, 2-6).

D'autre part, plutôt que de décrire *2, 3, 4* par leurs éléments (afin d'en déduire que chaque objet de la théorie est une catégorie), nous avons pensé qu'il était préférable de mettre en évidence le fait que la structure de chaque objet de la théorie est une structure de catégorie (Ax. 2-3). C'est au Chapitre III que nous décrivons les propriétés des éléments *2, 3* et *4* (propriétés qui avaient été posées en axiomes dans BT).

On assurera de plus (Ax. 2-7) l'existence du métafoncteur de $\mathcal{C}at$ dans $\mathcal{C}at$ qui associe à chaque «catégorie» A de $\mathcal{C}at$ la «catégorie» $|A|$, «ensemble des objets de A ».

D'autre part, il est convenu que le théorème de construction de catégories d'après la description énoncée dans BT n'en est pas déductible (une démonstration en a été donnée par A. Preller et G. Blanc dans [3]). Or, comme nous l'avons précisé, le but étant de donner une axiomatisation de la catégorie de toutes les catégories, il est nécessaire que ce théorème soit valable. On doit donc, dans notre théorie, pouvoir déduire ce théorème des axiomes posés. On peut alors poser certains axiomes (par exemple ceux qui décrivent certains coégaliseurs du point de vue de leurs éléments, M.R. Donnadieu [4]), ou bien (comme le suggérait Isbell) prendre cette proposition de construction de catégories d'après description comme axiome. Les hypothèses de cette proposition ne sont rien d'autre que la description d'une esquisse de catégorie [5] et l'Axiome 2-9 n'assure pas autre chose que l'existence d'un métafoncteur d'équivalence de la métacatégorie $\mathcal{C}at$ vers la métacatégorie des esquisses de $\mathcal{C}at$ (Def. 2-4). Nous montrerons au Chapitre V que l'axiome de construction de foncteurs de BT est un théorème de notre théorie; nous aurons pris soin, auparavant, de montrer (Ch. V) que la notion de discret que nous avons choisie était équivalente à celle définie dans BT.

Un des premiers résultats importants que l'on peut obtenir est que la métacatégorie des discrets est un topos bien pointé (Ch. IV). Le Chapitre VI développe l'étude d'«objets infinis» dans cette théorie.

Par la suite, d'autres résultats pourront être développés : On pourra démontrer des métathéorèmes permettant de déduire l'existence de «sous-catégories», l'existence de foncteurs définis à partir de «bonnes formules» [6, 9], ...

I. PRESENTATION DE LA THEORIE

I-0. Avant-propos sur le formalisme de la théorie.

Il faut convenir que le langage mathématique naïf du concept de catégorie ne rentre qu'artificiellement dans le langage formel du premier ordre classique. Quel est le rôle, par exemple, de l'équivalence naturelle vis à vis des propriétés formelles [6] ? Qu'est-ce que l'extension par définition en théorie de catégorie ? Ces remarques ne posent pas de difficultés au niveau de l'utilisation algébrique des catégories, elles en posent au niveau d'un fondement formel par celles-ci, puisqu'elles limitent l'utilisation de métarésultats portant, par exemple, sur certaines classes de formules (*).

Le choix d'un langage pose, dès lors, des a priori difficilement justifiables sur le plan strictement mathématique.

Doit-on, par exemple, considérer certains symboles fonctionnels (comme le produit de deux objets par exemple) comme symboles primitifs de la théorie plutôt que d'autres? La nécessité du choix, qui peut paraître un simple problème d'esthétique au début, s'avère plus tard, lors de critères de construction dans la théorie, être un problème beaucoup plus important sur l'efficacité mathématique.

Nous serons obligés de revenir sur ce point au Chapitre VI.

I-1. Théorie élémentaire des catégories abstraites.

Nous allons considérer un langage à deux types de variables:
les variables de type objet, que l'on notera $A, B, C, \ldots$,
les variables de type flèche, que l'on notera $f, g, h, \ldots$.

Les symboles non logiques du langage sont:
$D(-,-,-)$, prédicat à trois places, la première étant du type flèche la deuxième et la troisième étant du type objet. $D(f, A, B)$ se lira:

f est une flèche de A vers B ,

qu'on notera souvent $A \xrightarrow{f} B$.

(*) Ces problèmes sont en particulier étudiés par le groupe de recherche de «Logique et Théorie des catégories» de l'Université d'Aix-Marseille II, Luminy, et les auteurs ne disposent à ce jour que de communications de Séminaire.

Γ (-,-,-), prédicat à trois places, les trois variables étant de type flèche.

Les axiomes de la théorie seront :

AXIOME 1-1. $\forall f \; \exists ! \; A, B \mid D(f, A, B)$.

AXIOME 1-2. $\forall A \; \exists i \; \phi(A, i) \wedge D(i, A, A)$, où $\phi(A, i)$ est la formule :

$\forall f \; \forall g \; \forall C \; \forall B\, (D(f, A, B) \wedge D(g, C, A) \Longrightarrow \Gamma(i, f, f) \wedge \Gamma(g, i, g))$.

AXIOME 1-3. $[\exists h \; \Gamma(f, g, h)] \Longrightarrow$

$$[\exists A \; \exists B \; \exists C \; D(f, A, B) \wedge D(g, B, C) \wedge D(h, A, C)] .$$

AXIOME 1-3 bis. $D(f, A, B) \wedge D(g, B, C) \Longrightarrow \exists h \; \Gamma(f, g, h)$.

AXIOME 1-4. $\Gamma(f, g, h) \wedge \Gamma(f, g, h') \Longrightarrow h = h'$.

AXIOME 1-5. $\Gamma(f, g, k) \wedge \Gamma(g, h, l) \wedge \Gamma(f, l, m) \wedge \Gamma(k, h, m')$

$$\Longrightarrow m = m' .$$

Cette théorie sera appelée ETAC.

L'axiome 1-1 nous permet de définir les symboles fonctionnels Δ_0 et Δ_1 par :

$\Delta_0(f) = A$ si et seulement si $\exists B \; D(f, A, B)$; alors A est appelé *source de* f ;

$\Delta_1(f) = B$ si et seulement si $\exists A \; D(f, A, B)$; B est appelé le *but de* f.

Soit $\phi(A, i)$ la formule définie dans l'axiome 1-2. On déduit des axiomes 1-2 et 1-4 :

$$\phi(A, i) \wedge \phi(A, j) \Longrightarrow \Gamma(i, j, i) \wedge \Gamma(i, j, j) \Longrightarrow i = j .$$

Ceci nous permet d'introduire le symbole fonctionnel $I(.)$ défini par :

$$I(A) = i \text{ si et seulement si } \phi(A, i).$$

$\Gamma(f, g, h)$ sera noté $f . g = h$ et nous dirons que *f et g sont composables* si et seulement si $\Gamma(f, g, h)$. De plus, nous dirons que

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

commute ssi

$$f: A \to B \ \wedge \ g: B \to C \wedge h: A \to C \ \wedge \ f \cdot g = h .$$

Enfin tout modèle des axiomes 1-1 à 1-5 sera appelé une *catégorie*.

1-2. Théorie élémentaire de la catégorie des catégories.

Cette théorie sera notée CC.

Considérons le langage de ETAC auquel on rajoute les symboles non logiques suivants :

Des symboles de constantes de type objet $0, 1, 2, 3$.

Des symboles de constantes de type flèche $\sigma, \delta_0, \delta_1, \tau, \alpha, \beta, \gamma$:

$|\text{-}|$, symbole fonctionnel défini sur les variables objets à valeurs dans les variables objets.

d, symbole fonctionnel défini sur les variables objets à valeurs dans les variables flèches.

Les axiomes sont :

AXIOME 2-1. La conjonction de tous les axiomes de ETAC.

AXIOME 2-2.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "\sigma"] & 1 \arrow[r, bend left, "\delta_0"] \arrow[r, bend right, "\delta_1"'] & 2 \arrow[l, "\tau"] \arrow[r, bend left, "\alpha"] \arrow[r, "\gamma"] \arrow[r, bend right, "\beta"'] & 3 \end{tikzcd}$$

et toutes les constantes sont distinctes, et 0 est objet initial, 1 est objet final, 2 est générateur.

DEFINITION 2-1. *Interprétation d'une formule de* ETAC *dans un terme objet de* CC : Soit ϕ une formule de ETAC régulière (c'est-à-dire telle qu'aucune variable libre n'ait une occurrence liée et telle que chaque variable liée n'apparaisse que sous une seule quantification). On sait que toute formule est équivalente à une formule régulière. Soit $A, B, \ldots, C$, n variables objets telles que les variables libres de type objet de ϕ figurent parmi $A, B, \ldots, C$, et soit $f, g, \ldots, h$, m variables flèches telles que les variables libres de type flèche figurent parmi $f, g, \ldots, h$. Soit

$$a, b, \dots, c ; x, y, \dots, z,$$

$m+n$ variables flèches toutes distinctes et distinctes de $f, g, \dots, h$, et A' une variable objet. Définissons la formule de CC :

$$\phi^*(A' ; a, b, \dots, c ; x, y, \dots, z),$$

que nous appellerons par commodité interprétation de ϕ dans A', par induction sur la complexité de la formule :

Si ϕ est $D(f, B, C)$, alors $\phi^*(A; x, b, c)$ est la formule

$$x: 2 \to A \wedge b: 1 \to A \wedge c: 1 \to A \wedge \delta_0 x = b \wedge \delta_1 x = c.$$

Si ϕ est $\Gamma(f, g, h)$, alors $\phi^*(A; x, y, z)$ (noté aussi $x \underset{A}{\cdot} y = z$) est la formule

$$\bigwedge_{u=x,y,z} u: 2 \to A \wedge \exists t: 3 \to A \mid \alpha t = x,\ \beta t = y,\ \gamma t = z.$$

Si ϕ est $\psi_1 \wedge \psi_2$, alors $\phi^*(A'; a, \dots; x, \dots)$ est

$$\psi_1^*(A'; a, \dots; x, \dots) \wedge \psi_2^*(A'; a, \dots; x, \dots).$$

Si ϕ est $\exists B\, \psi(B, C, \dots; f, \dots)$, alors $\phi^*(A; c, \dots; x, \dots)$ est

$$\exists b: 1 \to A\ \psi^*(A; b, c, \dots; x, \dots),$$

où b est distinct de $\{c, \dots; x, \dots\}$.

Si ϕ est $\exists f\, \psi$, alors $\phi^*(A; b, \dots; y, \dots)$ est

$$\exists x: 2 \to A\ \psi^*(A; b, \dots; x, y, \dots),$$

où x est distinct de $\{b, \dots; y, \dots\}$.

Si ϕ est $\neg\psi$, alors $\phi^*(A; a, \dots; x, \dots)$ est

$$\neg\psi^*(A; a, \dots; x, \dots).$$

On notera

$$A \models \phi \text{ pour CC } \vdash \phi^*(A).$$

On dira que x est :

une flèche de A pour (CC $\vdash x: 2 \to A$), qu'on notera $x \in A$,

un objet de A pour (CC $\vdash x: 1 \to A$), qu'on notera $x \in A$,

un élément de A pour: x est une flèche ou un objet de A.

AXIOME 2-3. $\forall A \; A \models E$, où nous notons E la conjonction des axiomes de ETAC.

Chaque objet de CC sera appelé une *catégorie* et chaque flèche de CC sera appelée un *foncteur.*

AXIOME 2-4 *(des limites et colimites finies).*

Chaque couple de catégories a un produit et une somme.

Chaque couple de foncteurs de même source et de même but a un égaliseur et un coégaliseur.

AXIOME 2-5 *(du retour de la somme).* Soit

$$\begin{tikzcd} & A+B & \\ A \arrow[ur, "i"] & & B \arrow[ul, "j"'] \end{tikzcd}$$

où i et j sont les injections dans la somme :

$$(\forall x: 2 \to A+B) \; [(\exists\, y: 2 \to A \mid x = yi) \text{ ou } (\exists\, y: 2 \to B \mid x = yj)] \; .$$

AXIOME 2-6. C'est une catégorie cartésienne fermée.

On notera A^B l'exponentiation de A et de B, et

$$e_A^B : B \times A^B \to A$$

le foncteur évaluation. A^B et e_A^B sont définis par la propriété universelle:

$$\forall f: B \times Z \to A \quad \exists!\, h: Z \to A^B \mid (I(B) \times h)\, e_A^B = f.$$

h sera appelé *l'adjointe exponentielle de* f et sera noté $\tilde{f}$.

DEFINITION 2-2 *(d'une catégorie discrète).* A est discrète ssi

$$\forall x: 2 \to A \quad \exists y: 1 \to A \mid x = \tau y.$$

AXIOME 2-7. $|A|$ est discret et d_A est un monomorphisme et

$$(\forall B \text{ discrète}) (\forall f: B \to A) (\exists!\, h: B \to |A| \mid h\, d_A = f).$$

DEFINITION 2-3 *(du symbole* $|\cdot|$ *sur les variables flèches).* Soit $f: A \to B$; alors $g = |f|$ ssi $d_A f = |f|\, d_B$.

AXIOME 2-8 *(du choix).*

$$(\forall f: A \to B)(A \not\cong 0 \text{ et } B \text{ discret} \implies \exists g: B \to A \mid fgf = f).$$

La terminologie d'esquisse employée dans toute la suite doit être comprise comme réalisation de l'esquisse de catégorie au sens de [5] .

DEFINITIONS 2-4.

Une base d'esquisse $\mathcal{E}$ est la donnée de trois catégories discrètes (A_1, A_2, A_3) et de foncteurs d_0, d_1, c, e, a_0, a_1 entre ces catégories, tels que :

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "e"] & A_2 \arrow[l, bend right, "d_1"'] \arrow[l, bend left, "d_0"] & A_3 \arrow[l, "c"] \arrow[l, bend right, "a_1"'] \arrow[l, bend left, "a_0"] \end{tikzcd}$$

La base d'esquisse $\mathcal{E}(A)$ *associée à* A est la donnée de :

$A_i = |A^i|$ $(i = 1, 2, 3)$, $\quad d_i = |A^{\delta_i}|$ $(i = 0, 1)$,

$a_0 = |A^{\alpha}|$ et $a_1 = |A^{\beta}|$ et $c = |A^{\gamma}|$.

Notation : $\mathcal{E}$ étant une base d'esquisse,

$$\phi_{\mathcal{E}}(A_4, b_0, b_1, e_0, e_1, f_0, f_1)$$

désignera la formule suivante :

$$A_4 \overset{b_i}{\underset{f_i}{\rightrightarrows}} A_3 \quad \text{et} \quad A_2 \xrightarrow{e_i} A_3 \qquad (i = 0, 1)$$

$$\text{et} \quad \begin{cases} e_0 a_1 = d_1 c \\ e_0 a_0 = I(A_2) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} e_1 a_0 = d_0 e \\ e_1 a_1 = I(A_1) \end{cases}$$

$$\text{et} \quad \begin{cases} f_0 a_1 = b_0 a_1 \\ f_0 a_0 = b_0 c \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} f_1 a_0 = b_0 a_0 \\ f_1 a_1 = b_1 c \end{cases}$$

et (A_4, b_0, b_1) est un produit fibré de (a_1, a_0) de projections b_0 , b_1 relativement aux discrets.

Une esquisse $\mathcal{E}$ est une base d'esquisse telle que: (A_3, a_1, a_0) est un produit fibré de (d_0, d_1), de projections (a_1, a_0), relativement aux discrets, et

$$e d_0 = e d_1 = I(A_1) \quad \text{et} \quad c d_i = a_i d_i \quad (i = 0, 1) ,$$

et $\quad \phi\,\mathcal{E}(A_4, b_0, b_1, e_0, e_1, f_0, f_1) \Longrightarrow$
$$\bigwedge_{i=0,1} e_i c = I(A_2) \text{ et } f_0 c = f_1 c.$$

Un homomorphisme H de bases d'esquisses entre $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ est la donnée de trois homomorphismes
$$H_i : A_i \to A'_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

On notera
$$H = (H_1, H_2, H_3) \text{ et } H : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'.$$

L'homomorphisme $H(h)$ *de bases d'esquisses associé à un foncteur* $h : A \to B$ est défini par :
$$H(h) = (|h^1|, |h^2|, |h^3|), \text{ où } H(h) : \mathcal{E}(A) \to \mathcal{E}(B).$$

Un homomorphisme d'esquisses entre les esquisses $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ est un homomorphisme de bases d'esquisses (H_1, H_2, H_3) qui vérifie :
$$e H_2 = H_1 e' \text{ et } H_3 a'_0 = a_0 H_2 \text{ et } H_3 a'_1 = a_1 H_2 \text{ et } H_3 c' = c H_2 .$$

Définissons *la composition de deux homomorphismes d'esquisses* : Soit
$$\mathcal{E} \xrightarrow{H} \mathcal{E}' \xrightarrow{K} \mathcal{E}''$$
où
$$H = (H_1, H_2, H_3) \text{ et } K = (K_1, K_2, K_3);$$
alors $HK : \mathcal{E} \to \mathcal{E}''$ est
$$HK = (H_1 K_1, H_2 K_2, H_3 K_3).$$

Il est aisé de vérifier que l'on a une métacatégorie d'esquisses, les objets étant les esquisses, et les flèches les homomorphismes d'esquisses.

AXIOME 2-9 *(de construction de catégories et foncteurs d'après esquisses).*

1° $\forall A\ \forall B\ \forall h : A \to B$, $\mathcal{E}(A)$ et $\mathcal{E}(B)$ sont des esquisses et $H(h)$ est un homomorphisme d'esquisses entre $\mathcal{E}(A)$ et $\mathcal{E}(B)$.

2° Pour toutes esquisses $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, tout homomorphisme d'esquisses $H : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$, il existe A et A' et il existe un et un seul $h : A \to A'$, et il existe des isomorphismes d'esquisses ψ et ψ' tels que

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \arrow[rr, "H"] \arrow[d, "\psi"'] & & \mathcal{E}' \arrow[d, "\psi'"] \\
\mathcal{E}(A) \arrow[rr, "H(h)"] & & \mathcal{E}(A')
\end{tikzcd}
$$

commute.

II. PREMIERS RESULTATS

II-1. Conséquences immédiates des axiomes.

R-1. *L'axiome 2-3 est équivalent à la conjonction des cinq formules suivantes :*

(ϕ_1): $(\forall x: 2 \to A)(\exists t: 3 \to A)(\alpha t = \tau\, \delta_0 x$ et $\beta t = \gamma t = x)$
$(\exists t': 3 \to A)(\alpha t' = \gamma t' = x$ et $\beta t' = \tau\, \delta_1 x)$.

(ϕ_2): $\delta_1 \alpha = \delta_0 \beta$ et $\delta_0 \alpha = \delta_0 \gamma$ et $\delta_1 \beta = \delta_1 \gamma$.

(ϕ_3): $(\forall x, y: 2 \to A)(\delta_1 y = \delta_0 x \Longrightarrow \exists\, t: 3 \to A \mid \alpha t = x$ et $\beta t = y)$.

(ϕ_4): $(\forall t, t': 3 \to A)(\alpha t = \alpha t'$ et $\beta t = \beta t' \Longrightarrow \gamma t = \gamma t')$.

(ϕ_5): $(\forall t, t', t'', t''': 3 \to A)(\forall f, g, h: 2 \to A)$
$(\alpha t = f$ et $\beta t = g$ et $\alpha t' = g$ et $\beta t' = h$ et $\alpha t'' = f$ et $\beta t'' = \gamma t'$
et $\alpha t''' = \gamma t$ et $\beta t''' = h \Longrightarrow \gamma t'' = \gamma t''')$.

R-2. α, β, γ *sont des monomorphismes.*

Il suffit d'appliquer ϕ_1 à $A = 2$ et $x = I(2)$.

R-3. $\delta_0 \alpha \neq \delta_1 \alpha$ et $\delta_0 \beta \neq \delta_1 \beta$ et $\delta_0 \gamma \neq \delta_1 \gamma$.

D'après l'axiome 2-2 ($\delta_0 \neq \delta_1$), et R-2.

R-3 bis. $3 \models$
$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] & \cdot \arrow[d, "\beta"] \\
& \cdot
\end{tikzcd}
$$

En utilisant les notations introduites au Chapitre I n° I-1 et la définition de l'interprétation interne à 3 d'une formule ϕ.

R-4. τ *est un épimorphisme.*

Car 1 est un objet final, donc $\delta_0 \tau = I(1)$.

R-5. *0 et 1 sont discrets.* (Par définition.)

R-6. *0 est un élément initial strict, c'est-à-dire*

$$f: X \to 0 \implies X \simeq 0 .$$

Ce résultat est valable dans toute catégorie cartésienne fermée.

R-7. $X \not\simeq 0 \implies \exists x: 1 \to X$.

On applique l'axiome du choix à $X \not\simeq 0$ et à 1, discret.

R-8. *Les injections dans la somme de X et de Y sont des monomorphismes.*

Soit

$$\begin{tikzcd} & X+Y & \\ X \arrow[ur, "i"] & & Y \arrow[ul, "j"'] \end{tikzcd}$$

Si $X \simeq 0$, alors i est un monomorphisme, car 0 est élément initial strict. Si $X \not\simeq 0$, on forme $\phi: X+Y \to X$ tel que

$$i\phi = I(X) \quad \text{et} \quad j\phi = \tau_Y x ,$$

où $x: 1 \to X$ et τ_Y est l'unique foncteur de Y dans 1.

R-9. *Soit i et j les injections dans la somme $1+1$; alors $i \neq j$.*

$$(\exists \phi: 1+1 \to 2 \mid i\phi = \delta_0 \text{ et } j\phi = \delta_1)\ \delta_0 \neq \delta_1 \implies i \neq j .$$

R-10. *Soit i et j les injections dans la somme $X+Y$; alors:*

$$(\forall x: 2 \to X+Y)(\forall y: 2 \to X)(\forall z: 2 \to Y)(x = yi \implies x \neq zj).$$

Se déduit du résultat R-9.

II-2. Premiers résultats sur les discrets.

R-11. *1 est générateur pour les discrets.*

Car τ est un épimorphisme.

R-12. *A discret $\implies A \simeq |A|$.*

Il suffit de construire $\phi: A \to |A|$ par la propriété universelle de d_A

qui vérifie $\phi d_A = I(A)$. Alors $d_A \phi = I(|A|)$, car d_A est monic.

R-13. $|I(A)| = I(|A|)$.

Il suffit de vérifier que $I(|A|) d_A = d_A I(A)$.

R-14. *La somme et le produit de deux discrets sont discrets.*

Immédiat pour le produit. Pour la somme, on utilise l'axiome du retour de la somme.

R-15. *A est discret* $\Longleftrightarrow$ $\forall x : 2 \to A \mid \tau \delta_0 x = x$.

R-16. *Tout sous-objet d'un discret est discret.*

Soit $C \overset{m}{\rightarrowtail} A$, où A est discret et où m est un monomorphisme. On montre que C est discret en utilisant R-15.

APPLICATION. L'égaliseur et le produit fibré de deux foncteurs de source une catégorie discrète ont pour source une catégorie discrète.

R-17. *Si $f : A \to B$, $A \not\approx 0$ et B discret, alors*

$$f \text{ épi-mono} \Longleftrightarrow f \text{ est un isomorphisme.}$$

Il suffit d'appliquer l'axiome du choix.

R-18. *Soit S_n la somme de n fois 1. Les injections sont toutes distinctes.*

Se déduit immédiatement du résultat R-9.

R-18 bis. *Si A est discret et a exactement n éléments, alors A est isomorphe à la somme de n fois 1.*

D'après la propriété universelle de la somme on construit $f : S_n \to A$ tel que

$$s_i f = a_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

(où s_i désignent les éléments de S_n et a_i ceux de A). On vérifie que f est un épi-mono. L'application du résultat R-17 nous permet de déduire que c'est un isomorphisme.

II-3. Quelques propriétés des foncteurs A^f et f^A.

R-19. *Soit $B \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} D$; alors* $A^{fg} = A^g A^f$.

Immédiat.

DEFINITION ET NOTATION $\wedge$, $\vee$. Notons $p_A : A \times 1 \to A$ la projection sur A (1 étant objet final, p_A est un isomorphisme).

Si $x : A \to B$, alors par définition

$$\hat{x} : 1 \to |B^A| \quad \text{et} \quad \hat{x} = d_1^{-1} |\widetilde{p_A x}|.$$

Si $y : 1 \to |B^A|$, alors par définition

$$\check{y} : A \to B \quad \text{et} \quad \check{y} = p_A^{-1} (A \times d_{B^A}) e_A^B .$$

R-20. $\forall x : A \to B \mid \check{\hat{x}} = x$ *et* $\forall y : 1 \to |B^A| \mid \hat{\check{y}} = y$.

Vérification immédiate.

R-21. *Si* $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{x} C$, *alors* $\hat{x} | C^f | = \widehat{fx}$.

Vérification immédiate.

R-22. *Si* $C \xrightarrow{x} A \xrightarrow{f} B$, *alors* $\hat{x} | f^C | = \widehat{xf}$.

R-23. $(\forall f, g : A \to B)(f = g \Longleftrightarrow |f^2| = |g^2|)$.

On utilise le fait que 1 est générateur pour les discrets et le résultat R-20.

NOTATION *des éléments de* $|A^3|$. L'axiome 2-9 nous permet de déduire que $|A^3|$ est un produit fibré de $|A^{\delta_0}|$ et $|A^{\delta_1}|$ de projections $|A^\beta|$ et $|A^\alpha|$. D'où

$$\forall u : 1 \to |A^3| \; \exists ! x \; \exists ! y : 1 \to |A^2| \mid u |A^\alpha| = x \text{ et } u |A^\beta| = y .$$

Nous noterons donc :

$$(\forall u \in |A^3|)(u = \langle x, y \rangle \Longleftrightarrow u |A^\alpha| = x \text{ et } u |A^\beta| = y).$$

R-24. $u : 1 \to |A^3| \Longrightarrow$

$$[u |A^\alpha| = \hat{x} \wedge u |A^\beta| = \hat{y} \Longrightarrow \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle |A^\gamma| = x \widehat{\underset{A}{\cdot}} y] .$$

Vérification immédiate à partir des résultats R-20 et R-21 et de la définition de la composition interne à l'objet A.

III. ETUDE DES OBJETS $2, 3, 4$

III-1. Description de 2.

Nous allons montrer que 2 n'a que deux objets δ_0 et δ_1 et qu'une seule flèche non objet $I(2)$.

Commençons par construire la catégorie D finie suivante

$$a \cdot \xrightarrow{\quad x \quad} \cdot\, b$$

en utilisant l'axiome 2-9 de construction de catégories d'après esquisses.

Posons

$$A_1 = 1+1, \quad A_2 = 1+1+1, \quad A_3 = 1+1+1+1.$$

A_1, A_2 et A_3 sont discrètes (résultat R-14). En utilisant la propriété universelle de la somme et le fait que 1 est générateur pour les discrets, on peut construire $(e, d_0, d_1, c, a_0, a_1)$ tels que

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "e"] & A_2 \arrow[l, bend right=50, "d_0"'] \arrow[l, bend left=50, "d_1"] & A_3 \arrow[l, "c"'] \arrow[l, bend right=50, "a_0"'] \arrow[l, bend left=50, "a_1"]
\end{tikzcd}$$

et

$$e\,d_0 = e\,d_1 = I(A_1), \quad a_1 d_0 = a_0 d_1, \quad c\,d_i = a_i d_i \;(i = 0, 1).$$

On doit montrer que (A_3, a_1, a_0) est le produit fibré de d_0 et d_1. Soit (P, p_1, p_0) leur produit fibré : P est discret (R-16); on montre que P a exactement quatre éléments. On construit alors un isomorphisme ϕ: $A_3 \to P$ qui fasse commuter a_0 et p_0, a_1 et p_1. Donc (A_3, a_1, a_0) est un produit fibré de d_0, d_1.

On pose $A_4 = 1+1+1+1$ et on construit b_0, b_1. On peut alors montrer comme ci-dessus que (A_4, b_1, b_0) est le produit fibré de a_0, a_1. De même on construit les foncteurs e_0, e_1, f_0, f_1 et on montre qu'ils vé-
la formule $\phi(A_4, b_0, b_1, e_0, e_1, f_0, f_1)$ et les conditions

$$e_i\,c = I(A_2) \quad \text{et} \quad f_0\,c = f_1\,c.$$

Tous ces foncteurs sont faciles à construire, puisqu'ils ont pour source une somme finie de n fois 1. Donc $(A_1, A_2, A_3, d_0, d_1, c)$ définit une esquisse $\mathcal{E}$ et, d'après l'axiome 2-9, il existe une catégorie D et un isomorphisme d'esquisses de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}(D)$. On en déduit donc que

$$|D^1| \simeq 1+1, \quad |D^2| \simeq 1+1+1,$$

c'est-à-dire que D a exactement deux objets (que l'on notera a' et b') et trois flèches (que l'on notera a, b et x) dont deux sont des identités d'objets ($a = \tau a'$, $b = \tau b'$) et une seule, x, n'est pas une identité d'objets.

Nous allons montrer maintenant que D est isomorphe à 2. Tout d'abord construisons un homomorphisme d'esquisses entre $\mathcal{E}(D)$ et $\mathcal{E}(2)$. Pour cela, donnons-nous trois flèches

$$(g_i)_{i=1,2,3}, \text{ où } g_i : |D^i| \to |2^i|.$$

Remarquons que, $|D^i|$ étant la somme de n fois 1, il suffit d'avoir n flèches de 1 dans $|2^i|$ pour définir g_i. Par exemple, décrivons

$$g_2 : |D^2| \to |2^2| \text{ par}$$
$$\hat{a} g_2 = \widehat{\tau \delta_0} \text{ et } \hat{b} g_2 = \widehat{\tau \delta_1} \text{ et } \hat{x} g_2 = \widehat{I(2)}.$$

De même on peut écrire g_1 et g_3 et vérifier que :

$$|D^\tau| g_2 = g_1 |2^\tau|, \quad g_3 |2^t| = |D^t| g_2 \text{ pour } t = \alpha, \beta, \gamma.$$

Ces égalités se vérifient point par point, puisque ces foncteurs partent de $|D^i|$ dont on connait exactement les éléments (on utilise les résultats R-20-21-22 et 23). L'axiome 2-9 nous permet alors de déduire :

$$\exists!\, f : D \to 2 \text{ tel que } |f^2| = g_2$$
$$\Longrightarrow \hat{x} |f^2| = \hat{x} g_2 \Longrightarrow \widehat{xf} = \widehat{I(2)} \Longrightarrow xf = I(2).$$

Nous avons donc $xf = I(2)$; reste à vérifier que $fx = I(D)$ (ce qui se fait point par point, puisque fx a D comme source et que l'on connait tous les éléments de D). D est donc isomorphe à 2, ce qui permet de conclure :

$$(\forall x)(x : 2 \to 2 \Longrightarrow x = \tau \delta_0 \vee x = \tau \delta_1 \vee x = I(2)),$$

$$(\forall x)(x : 1 \to 2 \implies x = \delta_0 \vee x = \delta_1).$$

III-2. *2* est rétract de tout générateur.

Rappelons la définition de A *rétract de* B : A est rétract de B ssi

$$(\exists f : A \to B)(\exists g : B \to A)(fg = I(A)).$$

Soit C un générateur ; nous allons montrer qu'il existe $f : 2 \to C$ et $g : C \to 2$ tels que $fg = I(2)$.

De la même façon que l'on a construit la catégorie D , nous pouvons construire la catégorie E suivante

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "p"] \arrow[r, bend right, "q"'] & b \end{tikzcd}$$

qui a deux objets a et b distincts et deux flèches q et p de même source a et de même but b .

La catégorie E vérifie :

$$(\exists p, q : 2 \to E)(p \neq q \vee \delta_0 p = \delta_1 p \vee \delta_1 p = \delta_1 q).$$

C étant générateur, alors

$$\exists x : C \to 2 \mid xp \neq xq.$$

2 étant un générateur, alors

$$\exists y : 2 \to C \mid yxp \neq yxq.$$

Nous allons montrer que $yx = I(2)$; il suffit pour cela de montrer que

$$yx \neq \tau\delta_0 \quad \text{et} \quad yx \neq \tau\delta_1 ,$$

puisqu'on a montré au n° III-1 que 2 n'a que trois flèches.

III-2. Description de *3*.

Nous avons montré au Chapitre II que

$$3 \models \quad \begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] & \cdot \arrow[d, "\beta"] \\ & \cdot \end{tikzcd}$$

Dans ce paragraphe nous allons montrer que 3 n'a pas d'autres éléments.

Pour cela, construisons à l'aide de l'axiome de construction de catégories d'après esquisses la catégorie T dont les seuls objets sont a, b, c et les seules flèches x, y, z, et qui vérifie :

$$T \models \begin{tikzcd} a \arrow[r, "x"] \arrow[dr, "z"'] & b \arrow[d, "y"] \\ & c \end{tikzcd}$$

A cette fin, on pose

$$A_1 = 1+1+1 = S_3, \quad A_2 = S_6, \quad A_3 = S_7 ;$$

les foncteurs $d_0, d_1, c, \dots$ se définissent en utilisant la propriété universelle de la somme ; on vérifie ensuite qu'on a bien décrit une esquisse, d'où l'existence d'une catégorie T telle que :

$$|T^i| \simeq A_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Nous allons maintenant construire un foncteur $g: T \to 3$ d'après esquisse ; c'est-à-dire que nous devons décrire trois foncteurs

$$g_i : |T^i| \to |3^i|$$

qui forment un homomorphisme d'esquisses entre $\mathfrak{S}(T)$ et $\mathfrak{S}(3)$; les foncteurs g_i sont facilement définissables, puisqu'ils ont pour source $|T^i|$ qui est isomorphe à la somme de n fois 1 ; il suffit ensuite de vérifier les commutativités exigées pour qu'ils forment un homomorphisme d'esquisses, ce qui est aisé puisqu'on est amené à démontrer l'égalité de foncteurs ayant pour sources des catégories dont on connait exactement les éléments.

Notons que :

$$x \underset{T}{.} y = z \implies \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle \in |T^3| \iff \exists t : 3 \to T \mid \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle = \hat{t}.$$

Nous définissons

$$\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle g_3 = \widehat{I(3)} ;$$

or $\widehat{I(3)} |3^\alpha| = \alpha \widehat{I(3)} = \alpha$; de même $\widehat{I(3)} |3^\beta| = \hat{\beta}$; donc

$$\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle g_3 = \widehat{I(3)} = \langle \hat{\alpha} . \hat{\beta} \rangle$$

Nous allons montrer que $tg = I(3)$ et $gt = I(T)$; en effet,

$$\hat{t}\,|g^3| = \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle\, |g^3| = \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle g_3 = \widehat{I(3)} = \widehat{tg},$$

d'où $tg = I(3)$. On vérifie point par point que $gt = I(T)$.

III-4. 3 est la somme amalgamée de δ_0 et δ_1.

Soit à montrer la propriété universelle.

$$\begin{tikzcd}
A & & \\
& 3 \arrow[ul, dashed, "t"'] & 2 \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[ull, bend right, "x"'] \\
& 2 \arrow[u, "\beta"] \arrow[uul, bend left, "y"] & 1 \arrow[l, "\delta_0"] \arrow[u, "\delta_1"']
\end{tikzcd}$$

Considérons des éléments x et y de A tels que $\delta_0 x = \delta_1 y$. D'après le résultat R-1 du Chapitre II :

$$\exists t : 3 \to A \mid \alpha t = x \text{ et } \beta t = y.$$

Si

$$\exists t' : 3 \to A \mid \alpha t' = x \text{ et } \beta t' = y,$$

alors $\gamma t = \gamma t'$ (cela suit de R-1, Chapitre II). Or, comme on vient de montrer que 3 n'a pas d'autres flèches que α, β, γ (et leurs sources et buts), il s'ensuit que $t = t'$.

III-5. Définition et propriété de 4.

Définissons 4 comme étant la catégorie

$$4 \models \quad \begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "x"] \arrow[d, "w"'] \arrow[dr, "v"] & \bullet \arrow[d, "y"] \arrow[dl, "u"'] \\
\bullet & \bullet \arrow[l, "z"]
\end{tikzcd}$$

On va la construire à l'aide de l'esquisse $\mathcal{E}$ (de la même manière que l'on a construit les catégories D et T aux paragraphes précédents).

L'esquisse $\mathcal{E}$ est donnée par :

$$A_1 = 1+1+1+1 = S_4,\quad A_2 = S_6,\quad \ldots\ ;$$

$d_0, d_1, c, \ldots, f_0, f_1, \ldots$ sont décrits point par point ; on vérifie les égalités écrites dans la définition de l'esquisse, en particulier $f_0 c = f_1 c$. On déduit l'existence d'une catégorie (Ax. 2-9), notée 4, qui vérifie $\mathcal{E}(4) \simeq \mathcal{E}$. La condition $f_0\, c = f_1\, c$ nous permet de conclure que :

$$(x \underset{4}{.} y) \underset{4}{.} z = x \underset{4}{.} (y \underset{4}{.} z).$$

Nous allons montrer que 4 est la somme amalgamée suivante :

$$\begin{tikzcd} 4 & 3 \arrow[l, "t"'] \\ 2 \arrow[u, "z"] & 1 \arrow[l, "\delta_0"] \arrow[u, "\delta_1\gamma"'] \end{tikzcd}$$

où t est caractérisé par

$$\alpha t = x \text{ et } \beta t = y, \text{ donc } \gamma t = v .$$

Pour montrer la propriété universelle de la somme, considérons

$$t' : 3 \to A \quad \text{et} \quad z' : 2 \to A \quad \text{tels que} \quad \delta_1 \gamma t' = \delta_0 z',$$

et montrons qu'il existe un seul foncteur g de 4 dans A tel que $tg = t'$ et $zg = z'$. Pour cela, il nous suffit de construire un homomorphisme d'esquisses H entre $\mathcal{E}(4)$ et $\mathcal{E}(A)$ tel que le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}(A) & & \\ & \mathcal{E}(4) \arrow[ul, "H"'] \arrow[d, "H(z)"] & \mathcal{E}(3) \arrow[l, "H(t)"] \arrow[ull, bend right, "H(t')"'] \\ & \mathcal{E}(2) \arrow[uul, bend left, "H(z')"] & \end{tikzcd}$$

Il est aisé de construire

$$H_i : |4^i| \to |A^i| \quad (i = 1, 2, 3)$$

et de vérifier que :

$$|4^\tau|\, H_2 = H_1\, |A^\tau| \quad \text{et} \quad |4^\alpha|\, H_2 = H_3\, |A^\alpha| \text{ et } |4^\beta|\, H_2 = H_3\, |A^\beta|.$$

Mais remarquons que, pour vérifier $|4^\gamma|\, H_2 = H_3\, |A^\gamma|$, on doit utiliser l'axiome 2-3 qui dit que, dans l'interprétation interne à un objet, la composition est associative.

L'axiome 2-9 nous permet de conclure à l'existence d'un foncteur $g: 4 \to A$ tel que $|g^i| = H_i$. Pour montrer que $tg = t'$ et $zg = z'$, il est nécessaire et suffisant de montrer que

$$|t^2||g^2| = |t'^2| \quad \text{et} \quad \hat{z}|g^2| = \hat{z}'$$

(R-22 et R-23), ce qui se fait point par point, puisqu'on connait tous les éléments de $|3^2|$ et $|4^2|$; et $|g^2| = H_2$ a été construit explicitement.

L'unicité du foncteur g (vérifiant $tg = t'$ et $zg = z'$) est immédiate à vérifier.

IV. LES CATEGORIES DISCRETES FORMENT UN TOPOS BIEN POINTE

Le but de ce chapitre est de montrer que la métacatégorie des catégories discrètes est un topos bien pointé ; le langage de cette théorie étant interprétable dans celui de CC, nous allons montrer que tous les axiomes de cette théorie où les quantificateurs sont relativisés par le prédicat « être discret » sont démontrables dans CC.

Nous définissons le prédicat $disc(.)$ par :

$$disc(A) \text{ ssi } A \text{ est discret.}$$

IV-1. Existence des limites finies.

a) La somme et le produit de deux discrets étant discrets (R-14), la somme et le produit de deux discrets existent dans la métacatégorie des discrets.

b) L'égaliseur de deux foncteurs de source un discret a pour source un discret (R-16). Donc il existe un égaliseur de deux foncteurs entre deux discrets dans la métacatégorie des discrets. Ainsi la formule suivante est vérifiée :

$$(\forall A\ disc(A)\ \forall B\ disc(B)\ \forall f: A \to B\ \ \forall g: A \to B\ \exists E\ disc(E)\ \exists e: E \to A)$$
$$(ef = eg \text{ et } \forall C\ dis(C)\ \forall h: C \to A | hf = hg\ \exists !\, k: C \to E \mid ke = h).$$

c) Nous allons montrer que le coégaliseur de deux foncteurs de but discret est un foncteur de but discret, d'où l'on déduira l'existence d'un coégaliseur pour deux foncteurs entre discrets dans la métacategorie des discrets.

Nous allons tout d'abord démontrer quelques lemmes qui nous permettront d'établir que tout foncteur entre deux discrets est décomposable en épi-mono ; le théorème s'ensuivra.

Notons :

a) v et n les deux seuls éléments distincts de 1 dans $1+1$;

b) $x \in f$ ssi $f: A \to B$ et $\exists y: 1 \to A \mid x = yf$.

LEMME 1. *Soit* $f: A \to B$:

$$(\forall x: 1 \to B)(x \notin f \Longrightarrow \exists h: B \to 1+1 \mid fh = \tau_A n \text{ et } xh = v).$$

Construisons

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "f"'] \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "i_A"] & 1 \arrow[d, "n"] \\
B \arrow[r, bend right, "g"'] & 1+A \arrow[l, bend right, "j"'] \arrow[r, "s"] & 1+1 \\
& 1 \arrow[ul, "x"] \arrow[u, "i_1"'] \arrow[r, equal] & 1 \arrow[u, "v"']
\end{tikzcd}$$

où :

i_A et i_1 sont les injections dans la somme ;

j est défini par $i_A j = f$ et $i_1 j = x$;

g existe d'après l'axiome du choix et vérifie $jgj = j$;

$s = \tau_A \oplus I(1)$, c'est-à-dire s est caractérisé par

$$i_A s = \tau_A n \quad \text{et} \quad i_1 s = I(1)v.$$

Il suffit de prendre $h = gs$.

LEMME 2. *Soit* $f: A \to B$, *où* A *et* B *sont discrets. Alors :*

f *est un épimorphisme* $\Longleftrightarrow$ f *est surjectif;*

f *est un monomorphisme* $\Longleftrightarrow$ f *est injectif.*

COROLLAIRE. *Soit* $f: A \to B$, *où* A *et* B *sont discrets :*

f *est épi-mono* $\Longleftrightarrow$ f *est bijectif* $\Longleftrightarrow$ f *est un isomorphisme.*

DEFINITION *de l'image* (J, j) *d'un foncteur* $f: A \to B$. Soit

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p"'] & B \arrow[r, bend left, "s"] \arrow[r, bend right, "r"'] & B+B \arrow[r, "k"] & K \\ & J \arrow[u, "j"'] & & \end{tikzcd}$$

où :

s et r sont les injections dans la somme $B+B$,

k est le coégaliseur de fs et fr,

j est l'égaliseur de sk et rk,

p est défini par $pj = f$ (propriété universelle de l'égaliseur).

Alors (J, j, p) est appelé l'image de f.

LEMME 3. *Soit* $f: A \to B$ *d'image* (J, j, p), *où* B *est discret.*

a) $\forall x \in B \; (x \in J \iff x \in f)$.

b) J *est discret.*

c) p *est un épimorphisme.*

On utilise le Lemme 1 pour démontrer a, le résultat R-16 pour démontrer b, et on montre que p est surjectif pour démontrer que c'est un épimorphisme (Lemme 2).

THEOREME. *Le coégaliseur de foncteurs de but discret a pour but un discret.*

Soit

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & B \arrow[r, two heads, "k"] & C \\ & {|B|} \arrow[u, "d_B"] \arrow[r, "|k|"] \arrow[dr, "q"'] & {|C|} \arrow[u, "d_C"'] \\ & & J \arrow[u, tail, "i"'] \end{tikzcd}$$

où k est le coégaliseur de f et g dans CC. (J, i, q) est l'image de $|k|$, car $|B|$ et $|C|$ sont discrets. Rappelons que d_B est un isomorphisme (R-12), car B est discret. De plus

$$f d_B^{-1} q = g d_B^{-1} q \quad (\text{car } i \text{ et } d_C \text{ sont des monomorphismes})$$
$$\Longrightarrow \exists l : C \to J \mid k l = d_B^{-1} q .$$

On vérifie que

$$l i d_C = I(C), \quad i d_C l = I(J).$$

Donc $(d_B^{-1} q, J)$ est isomorphe à (k, C). On en déduit que $(d_B^{-1} q, J)$ est un coégaliseur de f et g. Ceci montre que le but des coégaliseurs de foncteurs de but discret est discret.

d) La métacatégorie des discrets possède un objet final et un objet initial, car 1 et 0 sont discrets.

IV-3. Elle est cartésienne fermée.

Nous allons montrer que :

$$\forall A \; disc(A) \; \forall B \; disc(B) \; \exists C \; disc(C) \; \exists e : A \times C \to B$$
$$\forall Z \; disc(Z) \; \forall f : A \times Z \to B \; \exists ! \; g : Z \to C \mid (I(A) \times g) e = f .$$

PROPOSITION. *Si B est discret, alors B^A est discret.*

Nous savons que CC est cartésienne fermée, donc pour tous A et B il existe un objet C, noté B^A, qui possède la propriété universelle de l'évaluation. Il nous reste à montrer que B^A est discret, ce qui, en utilisant le résultat R-15, se traduit par :

$$\forall y : 2 \to B^A \mid y = \tau \delta_0 \, y$$
$$\Longleftrightarrow \forall y : 2 \to B^A \mid (A \times y) e = (A \times \tau \delta_0 \, y) e$$
$$\Longleftrightarrow \forall u : 2 \to A \times 2 \mid u (A \times y) e = u (A \times \tau \delta_0 \, y) e$$
$$\Longleftrightarrow \forall z : 2 \to A \mid \bigwedge_{d = I(2),\, \tau\delta_0,\, \tau\delta_1} (z, d)(A \times y) e = (z, d)(A \times \tau \delta_0 y) e ,$$

car les seuls éléments de 2 sont $I(2)$, $\tau \delta_0$ et $\tau \delta_1$. Cette proposition est vérifiée car B est discret.

IV-4. $1 + 1$ est un sous-objet classifiant pour les discrets.

Notre but est de montrer :

$$(\forall A\ disc(A)\ \forall B\ disc(B)\ \forall m : B \to X)$$
$$(m \text{ mono} \Longrightarrow \exists !\ \xi : X \to 1+1 \mid (B, \tau_B, m) \text{ produit fibré de } (v, \xi)).$$

LEMME 4. *Soit* $f : A \to B$ *et* $h : C \to B$, *où* B *est discret. Alors*

$$(\exists x : 1 \to C \mid xh \in f) \Longrightarrow (\exists k : C \to A)(h = kf).$$

Pour $A \simeq 0$ ou $C \simeq 0$ le résultat est immédiat. Si $A \not\simeq 0$, on construit $g : B \to A$ par l'axiome du choix, et on vérifie que, si on pose $k = hg$, alors $h = kf$.

DEFINITION *de l'union.* Etant donné $a : J \to (1+1)^X$, nous allons définir l'union de a comme étant un monomorphisme de but X ($u : U \rightarrowtail X$). Soit $a : J \to (1+1)^X$; construisons :

$$\begin{tikzcd} X & U \arrow[l, "u"'] \\ X \times J \arrow[u, "p_0"] & P \arrow[l, "r"'] \arrow[u] \arrow[d] \\ 1+1 \arrow[from=2-1, "\tilde{a}"'] & 1 \arrow[l, "v"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A_j \arrow[r] \arrow[d, "a_j"'] & 1 \arrow[d, "v"] \\ X \arrow[r, "\tilde{j}_a"'] & 1+1 \end{tikzcd}$$

où :

P est le produit fibré de v et $\tilde{a}$,

$\tilde{a}$ est l'adjointe exponentielle de a,

p_0 est la projection sur X,

(U, u) est l'image de rp_0 (Lemme 3),

A_j est le produit fibré de $\tilde{j}_a$ et v.

Par définition, l'union de a est (U, u).

LEMME 5. $(\forall x \in X)(x \in U \Longrightarrow \exists j : 1 \to J \mid x = A_j)$.

DEFINITION *du complémentaire d'un monomorphisme.* Etant donné $m : A \to X$ où m est un monomorphisme, nous allons construire $\bar{m} : \bar{A} \to X$ tel que A et $\bar{A}$ soient disjoints. Notons

$$\emptyset_X : 1 \to 1+1^X \quad \text{tel que} \quad \emptyset_X = \widetilde{\tau_X n}.$$

Construisons le produit fibré (J, a, τ_J) de $(1+1)^m$ et de $\emptyset_A$. Par définition le complémentaire de $m: A \to X$ est l'union de a. On note $\overline{m}: \overline{A} \to X$ ce complémentaire.

LEMME 6. $(\forall x \in X)(x \in \overline{A} \iff x \notin A)$.

LEMME 7. *Soit* $d: A + \overline{A} \to X$ *le foncteur caractérisé par*

$$s_A d = m \quad et \quad s_{\overline{A}} d = \overline{m}$$

(où s_A *et* $s_{\overline{A}}$ *sont les injections dans la somme* $A + \overline{A}$ *);* d *est un isomorphisme.*

On vérifie que d est bijectif en utilisant l'axiome du retour de la somme et le Lemme 11.

THEOREME. *$1 + 1$ est un sous-objet classifiant pour les discrets.*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "v"'] & A \arrow[l, "\tau_A"'] \arrow[d, "m"] \\ 1+1 & X \arrow[l, "\xi"] \end{tikzcd}$$

Construisons $\xi: X \to 1 + 1$. Pour cela, considérons l'isomorphisme d de $A + \overline{A}$ dans X décrit au Lemme 7 et le foncteur $\lambda: A + \overline{A} \to 1 + 1$ caractérisé par $\lambda s_A = \tau_A$ et $\lambda s_{\overline{A}} = \tau_{\overline{A}}$. On pose $\xi = d^{-1} \lambda$; il est immédiat de vérifier $\tau_A v = m \xi$. La vérification de la propriété universelle est laissée au lecteur.

IV-5. Le topos est bien pointé.

En effet, l'objet classifiant $1 + 1$ n'a que deux éléments et ces éléments sont distincts (R-9). De plus, si $A \simeq 0$, alors A possède un élément (R-7).

IV-6. Application.

Les épimorphismes sont surjectifs sur les objets.

Soit $f: A \to B$. Le but de la démonstration est de construire deux foncteurs différents de source B qui coégalisent f, dans le cas où f n'est pas surjectif sur les objets.

LEMME. *Il existe une catégorie C qui vérifie*

$$C \models \begin{tikzcd} a' \arrow[r, bend left, "u"] & b' \arrow[l, bend left, "v"] \end{tikzcd}$$

Il suffit de la construire à l'aide de l'axiome de construction de catégories d'après esquisses, en posant :

$$A_1 = 1+1, \quad A_2 = 1+1+1+1, \ldots .$$

Notons :

a' et b' ses deux objets, $1 \to C$,

a, b, u, v ses flèches, $2 \to C$ ($a = \tau a'$ et $b = \tau b'$).

En utilisant les résultats concernant le langage dans les topos et en particulier l'équivalence de l'interprétation interne et de l'interprétation externe dans le cas d'un topos bien pointé (la métacatégorie des discrets est un topos bien pointé, n° IV-5), nous pouvons considérer les quatre sous-catégories M, J, K, L de $|B^2|$ suivantes (convenons de noter

$$|A^2| = A', \quad |B^2| = B', \quad |f^2| = f', \quad |B^{\tau\delta_0}| = d_0, \quad |B^{\tau\delta_1}| = d_1) :$$

$$M = \{ y \in B' \mid (\exists x \in A')(xf'd_0 = yd_0 \wedge xf'd_1 = yd_1) \},$$

$$J = \{ y \in B' \mid (\exists x \in A')(xf' = yd_0) \wedge (\forall x \in A')(xf' \neq yd_1) \},$$

$$K = \{ y \in B' \mid (\forall x \in A')(xf' \neq yd_0) \wedge (\exists x \in A')(xf' = yd_1) \},$$

$$L = \{ y \in B' \mid (\forall x \in A')(xf' \neq yd_0) \wedge (\forall x \in A')(xf' \neq yd_1) \}.$$

M, J, K, L étant des sous-catégories de $|B^2|$, soit ϕ le foncteur canonique

$$M+J+K+L \xrightarrow{\phi} |B^2| ;$$

ϕ est un isomorphisme (il suffit pour cela de montrer qu'il est injectif et surjectif, Lemme IV-1-2). Ceci nous permet de construire :

$$\theta_2 : |B^2| \simeq M+J+K+L \to |C^2|$$

défini par

$$
\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d] & {|C^2|} \\ 1 \arrow[ur, "\hat{a}"'] & \end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd} J \arrow[r] \arrow[d] & {|C^2|} \\ 1 \arrow[ur, "\hat{u}"'] & \end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[d] & {|C^2|} \\ 1 \arrow[ur, "\hat{v}"'] & \end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd} L \arrow[r] \arrow[d] & {|C^2|} \\ 1 \arrow[ur, "\hat{b}"'] & \end{tikzcd}
$$

$$\theta_1 : |B^1| \to |C^1| \quad \text{et} \quad \theta_3 : |B^3| \to |C^3|$$

s'en déduisent de façon naturelle. Il est laissé au lecteur le soin de vérifier que l'on a bien défini un homomorphisme d'esquisses entre $\mathcal{E}(B)$ et $\mathcal{E}(C)$. On peut donc conclure à l'existence d'un foncteur $g: B \to C$ qui vérifie

(1) $$\forall \hat{x} \in M \;\; xg = a, \quad \forall \hat{x} \in L \;\; xg = b \;.$$

Considérons maintenant le foncteur $h: B \to C$ défini par $h = \tau_B a'$.

Si f n'est pas surjectif sur les objets, alors il existe

$$c: 1 \to B \quad \text{tel que} \quad \forall x: 2 \to A \mid xf \neq \tau c$$

$$\Longrightarrow \tau c g = b \neq a = \tau c h \quad \Longrightarrow \quad g \neq h \;.$$

D'autre part, $fg = fh$ (d'après (1)).

Donc f n'est pas un épimorphisme.

V. COMPARAISON DE CC ET BT

Le but de ce chapitre est de démontrer quelques théorèmes qui sont posés comme axiomes dans la théorie de base de la catégorie des catégories de F.W. Lawvere [1], et de prouver que la notion de discret que nous avons donnée est celle définie dans cet article.

V-1. Propriété caractéristique d'un discret.

THEOREME. *A est discret si et seulement si $A^\tau : A^1 \to A^2$ est un isomorphisme.*

LEMME 1. *Si A^τ est un isomorphisme entre A^1 et A^2, alors*

$$(A^\tau)^{-1} = A^{\delta_0}$$

et $|A^\tau|$ est un isomorphisme.

LEMME 2. *A^{τ} est un isomorphisme $\Longrightarrow$ A est discret.*

On montre que

$$\forall x: 2 \to A \mid \tau\, \delta_0\, x = x$$

(R-15). Pour cela on utilise les résultats R-20-21 et le Lemme 1.

LEMME 3. *A est discret* $\Longrightarrow$

$$(\forall x: 2\times 2 \to A)\,(\forall u, v: 2 \to 2\times 2)\,(u x = v x).$$

Il suffit de le vérifier. (On utilise le fait que les seuls endofoncteurs de 2 sont: $I(2)$, $\tau\,\delta_0$, $\tau\,\delta_1$.)

V-2. Existence de la catégorie des composantes connexes.

Nous nous proposons de démontrer la propriété duale de celle de la catégorie des objets $|A|$ pour une catégorie donnée A. Nous allons donc vérifier :

$$(\forall A\ \exists!\, B\ \exists h: A \to B)$$
$$[\,disc(B) \wedge \forall C\ disc(C)\ \forall \phi: A \to C\ \exists!\ k: B \to C \mid h k = \phi\,].$$

B est appelée *la catégorie des composantes connexes de A* et nous la noterons $\mathcal{C}(A)$.

Considérons le coégaliseur g de $|A^{\delta_0}|$, $|A^{\delta_1}|$, $I|A^2|$, c'est-à-dire g est tel que

$$|A^{\delta_0}|\, g = |A^{\delta_1}|\, g = I|A^2|\, g$$

et est universel pour cette propriété. Il est facile de vérifier qu'il peut être construit dans CC. Notons D son but (discret puisque $|A^2|$ l'est).

Il est trivial de montrer que, si l'on pose

$$B_1 = B_2 = B_3 = D, \quad d_0 = d_1 = e = \ldots = I(D),$$

on a décrit une esquisse ; notons-la $\overline{\mathcal{E}}(D)$. Donc, d'après l'Axiome 2-9, il existe une catégorie B telle que $\mathcal{E}(B) \simeq \overline{\mathcal{E}}(D)$. Notons $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ l'isomorphisme d'esquisses correspondant.

Nous allons construire un homomorphisme d'esquisses entre $\mathcal{E}(A)$

et $\mathcal{E}(B)$. Soit

$$\begin{tikzcd}
{|A^1|} \arrow[d, "{|A^\tau|}"] \arrow[r, "H_1"] & D \arrow[d, equal] \arrow[r, "\theta_1"] & {|B^1|} \arrow[d] \\
{|A^2|} \arrow[u, bend left] \arrow[u, bend right] \arrow[r, "H_2 = g"] & D \arrow[d, equal] \arrow[r, "\theta_2"] & {|B^2|} \arrow[u, bend left, "{|B^{\delta_0}|}"] \arrow[u, bend right, "{|B^{\delta_1}|}"'] \\
{|A^3|} \arrow[u] \arrow[u, bend left] \arrow[u, bend right] \arrow[r, "H_3"] & D \arrow[r, "\theta_3"] & {|B^3|} \arrow[u, "{|B^\gamma|}"] \arrow[u, bend left, "{|B^\alpha|}"] \arrow[u, bend right, "{|B^\beta|}"']
\end{tikzcd}$$

On pose :

$$H_1 = |A^\tau| g, \quad H_2 = g, \quad H_3 = |A^\alpha| g.$$

On montre que $(H_1 \theta_1, H_2 \theta_2, H_3 \theta_3)$ est un homomorphisme d'esquisses. L'Axiome 2-9 nous permet de déduire que

$$\exists h : A \to B \ | \ |h^i| = H_i \theta_i \quad (i = 1, 2, 3);$$

en particulier $|h^2| = g\theta_2$.

Nous allons montrer que B et h sont respectivement la catégorie des composantes connexes de A et le foncteur canonique de A dans $B = \mathcal{C}(A)$.

B est discret, puisque $|B^\tau|$ est un isomorphisme (en effet, $\theta_1 |B^\tau| = \theta_2$, où θ_1 et θ_2 sont des isomorphismes). Pour vérifier la propriété universelle, nous devons montrer :

$$\forall C \ disc(C) \ \forall \phi : A \to C \ \exists k : B \to C \ | \ hk = \phi.$$

$$\begin{tikzcd}
{|A^2|} \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, equal] & {|A^2|} \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "{|\phi^2|}"'] & D \arrow[r, "\theta_2"] \arrow[d, dashed, "f"] & {|B^2|} \arrow[dl, dashed, "k_2"] \\
& & {|C^2|} &
\end{tikzcd}$$

C étant discret, $|\phi^2|$ coégalise $|A^{\tau\delta_0}|$, $|A^{\tau\delta_1}|$ et $1|A^2|$. Comme g est le coégaliseur de ces foncteurs, il existe un foncteur $f : D \to |C^2|$ tel que $gf = |\phi^2|$.

On forme l'homomorphisme K de bases d'esquisses entre $\mathcal{E}(D)$ et $\mathcal{E}(C)$ tel que

$$K = (f\,|C^{\delta_0}|,\ f,\ f\,|C^{\tau_3\,\delta_0}|).$$

On vérifie que c'est un homomorphisme d'esquisses. L'Axiome 2-9 nous permet de conclure à l'existence d'un foncteur

$$k: B \to C \ \text{ tel que } \ |k^2| = \theta_2^{-1} f,$$

d'où l'on déduit $hk = \phi$ (R-23).

Reste à montrer l'unicité du foncteur k vérifiant $hk = \phi$. Il suffit de montrer que h est un épimorphisme, ce qui est vérifié car $|h^2| = g\,\theta_2$ est surjectif.

V-2. Construction de foncteurs.

THEOREME. *Soit* $g: |A^2| \to |B^2|$; *alors*

$$(\forall t: 3 \to A)(\exists!\, u: 3 \to B)(|u^2| = |t^2|\,g) \Longrightarrow (\exists!\, f: A \to B)(g = |f^2|).$$

Nous allons construire un homomorphisme d'esquisses H entre $\mathcal{E}(A)$ et $\mathcal{E}(B)$, où $H_2 = g$. Alors, d'après l'Axiome 2-9, on en déduira l'existence d'un foncteur $f: A \to B$ tel que $g = |f^2|$. L'unicité provient du résultat R-23.

Nous construisons l'homomorphisme de bases d'esquisses H entre $\mathcal{E}(A)$ et $\mathcal{E}(B)$ en posant :

$$H_2 = g,\quad H_1 = |A^\tau|\,g\,|B^{\delta_0}|,$$

$$H_3\,|B^\alpha| = |A^\alpha|\,g \quad\text{et}\quad H_3\,|B^\beta| = |A^\beta|\,g.$$

H_3 est parfaitement défini, car $(|B^3|, |B^\alpha|, |B^\beta|)$ est le produit fibré de $|B^{\delta_0}|$, $|B^{\delta_1}|$ et car

$$|A^\alpha|\,g\,|B^{\delta_1}| = |A^\beta|\,g\,|B^{\delta_0}|.$$

On vérifie que (H_1, H_2, H_3) est un homomorphisme d'esquisses. L'Axiome 2-9 nous permet de conclure à l'existence du foncteur (unique) f cherché.

VI. OBJET INFINI DANS CC

Ainsi que le remarquait Lawvere dans son article original [1], la théorie décrite n'a pas besoin d'axiome explicite de l'infini, et ce qui était une erreur technique dans la construction proposée de l'objet **N** [3] correspond à une analyse exacte du concept, comme nous pouvons le montrer dans cette nouvelle axiomatique.

L'idée intuitive qui justifie l'existence d'une catégorie infinie dans CC, sans avoir besoin de l'expliciter, est que l'existence de toute catégorie finie implique l'existence d'une catégorie infinie. Situation tout à fait différente d'une théorie à base d'ensembles pour laquelle évidemment l'existence de tout ensemble fini naïf n'implique pas celle d'un ensemble infini au sens naïf.

Dans ce chapitre, l'utilisation d'un langage formel de théorie de catégorie s'avèrerait fort utile pour l'utilisation des concepts. Ainsi, disposant d'une formule ϕ exprimant une propriété du graphe G construit sur les variables libres $(X_1, \dots, X_m, x_1, \dots, x_n)$, nous parlerions de la métacatégorie $CC(G, \phi)$ ainsi définie; la donnée d'un objet de $CC(G, \phi)$ correspond à la donnée de m termes objets $A_1, \dots, A_m$ et de n termes flèches $f_1, \dots, f_n$ de CC tels que leur configuration graphique dans CC soit celle de G pour $X_1, \dots, X_m, x_1, \dots, x_n$, et que $\phi(A_1, \dots, A_m, f_1, \dots, f_n)$ soit démontrable dans CC.

On définit alors une flèche de $CC(G, \phi)$,

de $(A_1, \dots, A_m, f_1, \dots, f_n)$ vers $(A'_1, \dots, A'_m, f'_1, \dots, f'_n)$,

comme la donnée de m termes flèches $g_1, \dots, g_m$ de CC tels que

$$g_i : A_i \to A'_i \quad \text{et} \quad f_k g_j = g_i f'_k \quad (\text{pour } f_k : A_i \to A_j)$$

soient démontrables dans CC.

Cette notion de métacatégorie se prolonge aussi naturellement en une notion de métafoncteur. Ainsi, par exemple, en désignant par $CC(\mathfrak{S})$ la métacatégorie des esquisses définie dans le Chapitre I, et par $CC(1)$ la métacatégorie définie par la formule «$X = X$» qui est en fait l'Univers de notre discours (i.e. de la théorie CC), l'Axiome 2-9 ne fait qu'évoquer l'existence d'un métafoncteur d'équivalence de CC(1) vers CC($\mathfrak{S}$), qu'il construit «point par point».

On devine la commodité d'une telle terminologie pour les modalités techniques de démonstration. Malheureusement, elle ne peut, suivant les remarques du Chapitre I, trouver pour l'instant un cadre mathématique précis de formulation.

Nous utiliserons néanmoins ces terminologies au sens naïf; il est loisible au lecteur de vérifier «point par point» les propositions avancées sous cette forme. Nous savons (Chapitre IV) que la théorie des topos bien pointés s'interprète dans CC; dans notre appellation la métacatégorie $\mathfrak{D}$ des discrets de CC est un topos bien pointé. Nous allons montrer que $\mathfrak{D}$ possède un objet des entiers naturels [7].

THEOREME. *$\mathfrak{D}$ possède un objet des entiers naturels.*

La démonstration est basée sur une suite de vérifications de propriétés (équivalence ou adjonction) pour certains métafoncteurs.

NOTATIONS. - CC(MC) désigne la métacatégorie des monoïdes cycliques de CC, ainsi définis : Un monoïde cyclique de CC est un objet au-dessous de 2, $x: 2 \to X$, égalisant δ_0 et δ_1 (i.e. $\delta_0 x = \delta_1 x$) sans sous-objet strict.

- $\mathfrak{D}$(SP) désigne la métacatégorie des systèmes pointés ainsi définis : un système pointé est un triplet de $\mathfrak{D}$:

$$1 \xrightarrow{x_0} X \xleftarrow{x_1} X .$$

- $\mathfrak{D}$(PSP) désigne la métacatégorie des présystèmes de Peano [3] ainsi définis : un présystème de Peano est un système pointé

$$1 \xrightarrow{a} S \xleftarrow{s} S$$

qui n'a pas d'autre sous-objet que l'identité dans $\mathfrak{D}$(SP).

- $\mathfrak{D}$(MC) désigne la métacatégorie des monoïdes cycliques de $\mathfrak{D}$ définis comme suit : Un monoïde cyclique $\langle e, l, M, \eta \rangle$ de $\mathfrak{D}$ est la réalisation dans $\mathfrak{D}$ d'une esquisse de monoïde :

$$1 \xrightarrow{e} M \xleftarrow{\eta} M \times M$$

et la donnée d'une flèche $l: 1 \to M$ telle que, si $u: V \rightarrowtail M$ définit un sous-monoïde de M à travers lequel l se factorise, alors $u = I(M)$.

La démonstration qui nous préoccupe proviendra d'une suite de propositions conduisant à :

1° Les métacatégories CC(MC) et $\mathfrak{D}$(MC) sont naturellement équivalentes.

2° Les métacatégories $\mathfrak{D}$(MC) et $\mathfrak{D}$(PSP) sont isomorphes.

3° L'inclusion $\mathfrak{D}$(PSP) $\rightarrowtail$ $\mathfrak{D}$(SP) possède un méta-adjoint à droite. L'existence d'un objet initial dans CC(MC) (le coégaliseur de (δ_0, δ_1)) implique alors l'existence d'un objet initial dans $\mathfrak{D}$(SP), c'est-à-dire d'un objet des entiers naturels.

PROPOSITION. CC(MC) *est naturellement équivalente à* $\mathfrak{D}$(MC).

Si $l: 2 \to A$ est un monoïde cyclique de CC, il est aisé de vérifier que l est un épimorphisme, donc $|A^1| \simeq 1$, les épimorphismes de CC étant surjectifs sur les objets. Par suite l'esquisse d'un monoïde cyclique de CC est un monoïde de $\mathfrak{D}$, et par ailleurs la catégorie associée à un monoïde cyclique de $\mathfrak{D}$ par l'axiome 2-9 n'a qu'un seul objet. Il est aisé de vérifier que cette correspondance définit bien une équivalence naturelle de CC(MC) vers $\mathfrak{D}$(MC).

Les points 2 et 3 ne sont en fait que des problèmes de topos bien pointés, et les techniques de démonstration sont suffisamment familières aujourd'hui dans les topos pour que nous nous limitions à énoncer les vérifications successives.

PROPOSITION. *L'inclusion* $\mathfrak{D}$(PSP) $\rightarrowtail$ $\mathfrak{D}$(SP) *admet un adjoint à droite.*

Remarquant que $\mathfrak{D}$(PSP) est en fait un préordre, il suffit d'extraire un présystème de Peano (a, S, s) de chaque système pointé (x_0, E, x) :

$$(a, S, s) \overset{i}{\rightarrowtail} (x_0, E, x).$$

Soit, en effet;

$$(b, U, u) \xrightarrow{k} (x_0, E, f) ,$$

et P le produit fibré de (j, k). Nécessairement $P \rightarrowtail U$ est un isomorphisme, d'où $U \xrightarrow{\sim} P \to S$; un tel présystème de Peano s'extrait alors en considérant

$$S = \{ X \in 1+1^E \mid x_0 \in X \text{ et } (\exists f)(X) \subset X \} .$$

Cette construction est classique dans un topos bien pointé.

PROPOSITION. *Les présystèmes de Peano permettent les démonstrations par induction.*

Plus précisément, si (a, S, s) est un présystème de Peano, soit

$$a^n = [a]_{n \text{ fois}} \quad \text{et} \quad s^n_p : S^n \to S^n$$

défini par

$$s^n_p = \underset{i \leqslant n}{\times} s_i \quad \text{avec} \quad s_i = S \text{ si } i \neq p \quad \text{et} \quad s_p = s .$$

Le seul sous-objet de S^n stable par les s^n_p et contenant a^n est S^n. C'est la démonstration classique dans le cas de l'objet des entiers naturels [8] .

Soit (a, S, s) un présystème de Peano, $\phi : S^S \to S$ la flèche

$$(\tau_{S^S} a, I(S^S))\, e^S_S$$

et $\hat{S}$ la flèche canonique $\hat{S} : 1 \to S^S$.

PROPOSITION ϕ *est un morphisme de* $\mathfrak{D}$(SP)*:*

$$\phi : (\hat{S}, S^S, s^S) \to (a, S, s) .$$

Soit $j : U \rightarrowtail S^S$ l'égaliseur de s^S et S^s .

PROPOSITION. $\hat{S} \in U$ *et* U *est stable par* s^S.

PROPOSITION. $j.\phi$ *est injectif.*

On déduit alors l'isomorphisme $\rho : S \xrightarrow{\sim} U$, puis

$$\eta : S \to S^S = \rho . j ,$$

et enfin $\eta : S \times S \to S$.

PROPOSITION. *(a, S, η) est un monoïde de $\mathfrak{D}$.*

PROPOSITION. *$<a, a.s, S, \eta>$ est un monoïde cyclique de $\mathfrak{D}$.*

PROPOSITION. *Un monoïde cyclique de $\mathfrak{D}$ est un monoïde commutatif.*

PROPOSITION. *Soit $< e, l, M, \gamma >$ un monoïde cyclique de $\mathfrak{D}$;*

$$(e,\ M.[M, \tau_M l]\gamma)$$

est alors un présystème de Peano.

Ces constructions établissent alors un méta-isomorphisme de $\mathfrak{D}$(PSP) vers $\mathfrak{D}$(MC).

BIBLIOGRAPHIE

1. F. W. LAWVERE, The category of categories as a foundation of Mathematics, *Proc. Conf. on Categorical Algebra*, La Jolla, Springer, 1966.

2. G. OSIUS, Categorical Set Theory, *J. Pure and Ap. Algebra* 4 (1974).

3. G. BLANC et A. PRELLER, Lawvere's basic Theory of the category of categories, *J. Symbolic Logic* (1975), 25-29.

4. M. R. DONNADIEU, Démonstration du « Théorème de construction de catégories d'après description » de Lawvere sous certains axiomes, *C. R. A. S. Paris*, t. 280 (1975).

5. C. EHRESMANN, Esquisses et types de structures algébriques, *Bul. Inst. Polit. Iaşi* XIV (1968).

6. G. BLANC, Langage du premier ordre sur graphe et théorie sur catégorie, *Cahier Math. de Montpellier* (1975).

7. P. FREYD, Aspect of topoi, *Bull. Austral. Math. Soc.* 7 (1972).

8. J. BENABOU, Problèmes dans les topos, *Inst. Math. Pures et Ap., rapport* 34, Univ. Catholique de Louvain (1973).

9. M. R. DONNADIEU, *Une axiomatisation de la « Catégorie des catégories »*, Thèse de 3^e cycle, Luminy, Avril 1976.

U.E.R. scientifique de Luminy
70 route Léon Lachamp
13288 MARSEILLE CEDEX 2