C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 355 (2017) 365–369

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Combinatoire/Géométrie algébrique

Singularités canoniques et actions horosphériques

Kevin Langlois [1]

Mathematisches Institut, Heinrich Heine Universität, 40225 Düsseldorf, Allemagne

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 30 janvier 2017
Accepté le 7 mars 2017
Disponible sur Internet le 15 mars 2017

Présenté par le comité de rédaction

RÉSUMÉ

Soit G un groupe algébrique linéaire réductif connexe. Nous considérons les G-variétés normales avec orbites horosphériques. Dans cette courte note, nous donnons un critère pour déterminer si ces variétés ont au plus des singularités canoniques, log canoniques ou terminales dans le cas où elles admettent une courbe algébrique comme quotient rationnel. Ce résutat semble nouveau pour le cas spécial des actions de tores algébriques avec orbites générales de codimension 1. Pour la G-variété considérée X, notre critère est exprimé en terme d'une fonction de poids ω_X qui est construite à partir de l'ensemble des valuations G-invariantes du corps des fonctions $k(X)$. Dans le cas log terminal, la fonction génératrice de ω_X correspond au volume motivique des cordes de X. Comme application, nous traitons le cas des $k^{\star}$-surfaces normales.

ABSTRACT

Let G be a connected reductive linear algebraic group. We consider the normal G-varieties with horospherical orbits. In this short note, we provide a criterion to determine whether these varieties have at most canonical, log canonical or terminal singularities in the case where they admit an algebraic curve as rational quotient. This result seems to be new in the special setting of torus actions with general orbits of codimension 1. For the given G-variety X, our criterion is expressed in terms of a weight function ω_X that is constructed from the set of G-invariant valuations of the function field $k(X)$. In the log terminal case, the generating function of ω_X coincides with the stringy motivic volume of X. As an application, we discuss the case of normal $k^{\star}$-surfaces.

1. Introduction

Dans cet article, les variétés algébriques et les groupes algébriques sont définis sur un corps algébriquement clos k de caractéristique 0. Un espace homogène G/H sous un groupe algébrique linéaire réductif connexe G est dit *horosphérique* si le sous-groupe fermé $H \subseteq G$ contient un sous-groupe unipotent maximal. Dans ce cas, le normalisateur $P = N_G(H)$ de H dans G est un sous-groupe parabolique, P/H est un tore algébrique et l'espace homogène G/H est donc réalisé

Adresse e-mail : langlois.kevin18@gmail.com.

[1] Le présent texte est financé par l'université Heinrich-Heine de Düsseldorf.

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2017.03.004

comme P/H-torseur au dessus de la variété des drapeaux G/P (voir [21, Section 2]). Rappelons qu'une G-variété normale est dite *sphérique* si elle possède une orbite ouverte sous l'action d'un sous-groupe de Borel. Comme conséquence de la décomposition de Bruhat, l'espace homogène horosphérique G/H est sphérique.

Nous considérons les G-variétés normales avec orbites horosphériques. Notre but est d'établir un critère pour déterminer si ces variétés supposées $\mathbb{Q}$-Gorenstein ont au plus des singularités canoniques (log canoniques ou terminales) sous la condition d'existence d'un quotient rationnel qui est une courbe algébrique (cas de complexité un). Notre résultat est motivé par le cas des variétés toriques (voir [12,8,20]). Dans [22,23], les singularités toriques intervenant dans le programme du modèle minimal sont caractérisées en termes de géométrie convexe, voir aussi [5, Section 1], [7, Sections 3, 4] pour une exposition.

Ces critères ont été généralisés par Brion dans le cadre sphérique [6] en utilisant la théorie de Luna–Vust (cf. [14]). Recemment, Liendo et Suess [18] ont étudié les singularités des variétés normales avec actions de tores algébriques via la description d'Altmann–Hausen (voir [1,2]). En particulier, ils obtiennent un critère pour les singularités log terminales des variétés normales $\mathbb{Q}$-Gorenstein dotées d'une opération d'un tore algébrique avec orbites générales de codimension 1, voir [18, Corollary 5.4] et [18, Theorem 4.9], [15, Theorem 2.22] pour des généralisations de ce critère.

Notations. Nous réunissons maintenant les notations nécessaires pour énoncer notre résultat. Nous utiliserons l'approche de Timashev pour décrire les opérations de groupes algébriques réductifs de complexité un, voir [25]. Nous fixons désormais, une G-variété normale X avec orbites horosphériques ayant un quotient rationnel $\pi : X \dashrightarrow C$ sous l'action de G, où C est une courbe algébrique complète lisse. En particulier, C s'identifie avec l'ensemble des places du corps de fonctions $k(X)^G$. Pour un choix fixé d'un sous-groupe de Borel $B \subseteq G$, nous appellerons *couleur* de X un diviseur premier B-stable de X qui n'est pas G-stable. Les couleurs de X constituent un ensemble fini $\mathscr{F}$. Désignons par $\mathscr{F}_X \subseteq \mathscr{F}$ le sous-ensemble des couleurs contenant une G-orbite. Puisque notre problème est local, on peut supposer qu'il existe un ouvert affine dense B-stable $X_0 \subseteq X$ intersectant toute G-orbite de X [14, Theorem 1.3]. Sous cette condition, X_0 est le complémentaire de la réunion des couleurs appartenant à $\mathscr{F} \setminus \mathscr{F}_X$ [15, Lemma 2.1]. Par ailleurs, X admet un modèle birationnel équivariant de la forme $C \times G/H$, où G/H est un espace homogène horosphérique (voir par exemple [13, Satz 2.2]). Si $G/H \to G/P$ est la projection naturelle vers la variété des drapeaux, alors $\mathscr{F}$ est naturellement en bijection avec l'ensemble des diviseurs de Schubert de G/P. En particulier, $\mathscr{F}$ s'identifie à l'ensemble des racines simples Φ de (G, B) qui ne proviennent pas de P. Pour $\alpha \in \Phi$, le symbole $\alpha^\vee$ représentera la coracine associée et a_α le nombre entier $\langle \sum_{\beta\in\Phi} \beta, \alpha^\vee\rangle$. Nous désignerons par Φ_X le sous-ensemble de Φ correspondant aux couleurs de $\mathscr{F}_X$.

En considérant le radical unipotent U de B, l'algèbre des invariants $A := k[X_0]^U$ est graduée par les poids provenant des fonctions rationnelles propres de X sous l'opération de B. Soient M le réseau des B-poids de A (ou indifféremment de $k(X)$), $N = \mathrm{Hom}(M, \mathbb{Z})$ le dual et $N_\mathbb{Q} = \mathbb{Q} \otimes_\mathbb{Z} N$, $M_\mathbb{Q} = \mathbb{Q} \otimes_\mathbb{Z} M$ les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels associés. Le cône des poids $\sigma^\vee \subseteq M_\mathbb{Q}$ de A est le dual d'un cône polyédral saillant $\sigma \subseteq N_\mathbb{Q}$ (i.e. ayant 0 comme sommet). De plus, en choisissant un ensemble de fonctions rationnelles propres $\mathscr{V} = \{\chi^m \in k(X)^\star, m \in M\}$ sous B avec les conditions $\chi^m \cdot \chi^{m'} = \chi^{m+m'}$ pour tous $m, m' \in M$, l'algèbre A est décrite par une unique fonction linéaire par morceaux

$$\mathscr{D}_{X,\mathscr{V}} : \sigma^\vee \to \mathrm{CaDiv}(C_X),\ m \mapsto \sum_{y\in C_X} \min_{v\in\mathscr{D}_y} \langle m, v\rangle \cdot [y]$$

$$\text{définie par l'égalité } A = A[C_X, \mathscr{D}_{X,\mathscr{V}}] := \bigoplus_{m\in\sigma^\vee\cap M} H^0(C_X, \mathcal{O}_{C_X}(\mathscr{D}_{X,\mathscr{V}}(m))) \cdot \chi^m.$$

Ici $C_X \subseteq C$ est un ouvert dense, les sous-ensembles $\mathscr{D}_y \subseteq N_\mathbb{Q}$ sont des polyèdres avec cône de récession σ étant pour presque tout $y \in C_X$ égaux à σ et $\mathrm{CaDiv}(C_X)$ est l'espace vectoriel des $\mathbb{Q}$-diviseurs de Cartier sur C_X. Le couple $(\mathscr{D}_{X,\mathscr{V}}, \mathscr{F}_X)$ est la contrepartie combinatoire de X et sera appelé un *diviseur polyédral colorié* associé à X (voir [1, Section 2] et [15, Section 1.3]). Nous renvoyons à [25] pour la construction inverse d'une telle G-variété à partir d'un diviseur polyédral colorié abstrait. Le formalisme des diviseurs polyédraux a été introduit dans [1], voir [2,17] pour des généralisations. Dans la suite, nous poserons $\mathrm{supp}(\mathscr{D}_{X,\mathscr{V}}) = \{y \in C_X \mid \mathscr{D}_y \neq \sigma\}$ et noterons par $\deg(\mathscr{D}_{X,\mathscr{V}})$ le sous-ensemble de $N_\mathbb{Q}$ qui est vide si $C_X \neq C$ et qui est égal au polyèdre $\sum_{y\in C} \mathscr{D}_y$ sinon. Notons que l'on a toujours $\deg \mathscr{D} \subseteq \sigma$ (voir [1, Example 2.12]).

Intégration motivique et fonctions de poids. Nous introduisons la fonction de poids ω_X attachée à la donnée $(\mathscr{D}_{X,\mathscr{V}}, \mathscr{F}_X)$. Dans le cas où les singularités de X sont au plus log terminales, cette fonction apparaît dans le calcul du *volume motivique des cordes* défini par l'intégrale motivique

$$\mathcal{E}_{\mathrm{st}}(X) = \int_{\mathscr{L}(X')} \mathbb{L}^{-\mathrm{ord} K_{X'/X}} \mathrm{d}\mu_{X'}.$$

Le symbole $K_{X'/X}$ désigne un diviseur canonique relatif provenant d'une log résolution et $\mathscr{L}(X')$ est le schéma des arcs de la désingularisation. L'intégrale $\mathcal{E}_{\mathrm{st}}(X)$ appartient à une certaine modification et complétion $\mathcal{M}$ du localisé de l'anneau de Grothendieck $K_0(\mathrm{Var}_k)[\mathbb{L}^{-1}]$ de la catégorie des k-variétés par rapport à la classe de la droite affine $\mathbb{L} := [\mathbb{A}^1_k]$ et ne dépend, ni du choix de la log résolution, ni de celui du diviseur canonique relatif $K_{X'/X}$. Nous renvoyons à [9,19,26] pour plus de détails sur l'intégration motivique et à [3] pour la construction des invariants des cordes. Plus precisément, le résultat principal de [16] est la formule suivante inspirée par celle de Batyrev et Moreau dans [4, Theorem 4.3] :

$$\mathcal{E}_{\mathrm{st}}(X) = [G/H] \left(\sum_{[y,\nu,\ell]\in|\mathscr{D}_{X,\mathscr{V}}|} \zeta_\ell \cdot \mathbb{L}^{\omega_X(y,\nu,\ell)} \right),$$

où ζ_ℓ est ici égale à la classe $[C_X \setminus \mathrm{supp}(\mathscr{D}_{X,\mathscr{V}})]$ si $\ell = 0$ et à $\mathbb{L} - 1$ si $\ell \geq 1$ vue dans le complété $\mathcal{M}$, le second membre étant interprété comme la *fonction génératrice* de ω_X.

Supposons que la G-variété X avec orbites horosphériques associée à la donnée $(\mathscr{D}_{X,\mathscr{V}}, \mathscr{F}_X)$ soit $\mathbb{Q}$-Gorenstein (et possiblement non log terminale). Nous renvoyons à [15, Corollary 2.19] pour un critère explicite de la condition $\mathbb{Q}$-Gorenstein. On définit alors l'ensemble $|\mathscr{D}_{X,\mathscr{V}}|$ par l'égalité

$$|\mathscr{D}_{X,\mathscr{V}}| = \{[y,\nu,\ell] \mid y \in \mathrm{supp}(\mathscr{D}_{X,\mathscr{V}}),\, \nu \in N,\, \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ et } (\nu,\ell) \in C(\mathscr{D}_y)\},$$

où $C(\mathscr{D}_y) \subseteq N_{\mathbb{Q}} \oplus \mathbb{Q}$ est le cône engendré par la réunion de $(\mathscr{D}_y, 1)$ et de $(\sigma, 0)$. Le symbole $[y,\nu,\ell]$ désigne la classe modulo la relation d'équivalence $\sim$ définie par $(y,\nu,\ell) \sim (y'.\nu',\ell')$ si et seulement si $(y = y',\ \nu = \nu',\ \ell = \ell')$ ou $(\ell = \ell' = 0,\ \nu = \nu')$. Soit $C(\mathscr{D}_{X,\mathscr{V}})$ l'ensemble $\bigcup_{y\in C_X}\{y\} \times C(\mathscr{D}_y)$ modulo $\sim$. Sous l'hypothèse $\mathbb{Q}$-Gorenstein, la fonction $\omega_X : C(\mathscr{D}_{X,\mathscr{V}}) \to \mathbb{Q}$ est uniquement déterminée par les conditions suivantes pour tout $y \in C_X$ (voir [16, Section 5.2 et Proposition 5.11]) :

(i) ω_X induit une fonction $\mathbb{Q}$-linéaire sur chaque cône $C(\mathscr{D}_y)$;
(ii) nous avons $\omega_X(y,\rho) = -1$ pour tout vecteur primitif générateur $\rho \in N \oplus \mathbb{Z}$ d'une face de dimension 1 de $C(\mathscr{D}_y)$ tel que l'intersection de $\mathbb{Q}_{\geq 0}\rho$ avec $\deg(\mathscr{D}_{X,\mathscr{V}}) \cup \varrho(\mathscr{D}_{X,\mathscr{V}})$ est vide ;
(iii) on a $\omega_X(y, \alpha^\vee_{|M}, 0) = -a_\alpha$ pour tout $\alpha \in \Phi_X$;
(iv) si $\rho \in N$ est un générateur primitif d'une face de dimension 1 de σ tel que $\mathbb{Q}_{\geq 0}\rho \cap \deg(\mathscr{D}_{X,\mathscr{V}}) \neq \emptyset$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{Q}_{>0}$ tel que $\rho = \lambda v$ où $v = \sum_{z\in C_X} v_z$ et v_z est un sommet de $\mathscr{D}_z$ [16, Lemma 5.22]. Dans ce cas, on a $C_X = C$ et

$$\omega_X(y,\rho,0) = \lambda \left(\deg K_C + \sum_{z\in C} \left(1 - \frac{1}{\kappa(v_z)}\right)\right) \text{ avec } \kappa(v_z) = \inf\{\ell \in \mathbb{Z}_{>0} \mid \ell v_z \in N\}.$$

Les éléments de $|\mathscr{D}_{X,\mathscr{V}}|$ correspondent à certaines valuations (géométriques) G-invariantes de $k(X)$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ dont le centre est une sous-variété fermée irréductible G-stable de X. Pour chaque $\xi \in |\mathscr{D}_{X,\mathscr{V}}|$ correspondant à un diviseur exceptionnel G-stable d'une désingularisation équivariante de X, la valeur $-1 - \omega_X(\xi)$ est égale à sa discrépance (voir [16, Propositions 5.9 et 5.15]).

2. Résultat principal

Théorème 2.1. *Soit X une G-variété normale $\mathbb{Q}$-Gorenstein avec orbites horosphériques. Supposons que X admette un quotient rationnel $X \dashrightarrow C$, où C est une courbe algébrique complète lisse, et que X soit décrite par le diviseur polyédral colorié $(\mathscr{D}_{X,\mathscr{V}}, \mathscr{F}_X)$. Alors X a au plus des singularités log canoniques si et seulement si au moins une des assertions (a), (b), (c) est vraie :*

(a) C_X est une courbe algébrique affine ;
(b) C_X s'identifie à la droite projective $\mathbb{P}^1_k$ et $\sum_{y\in C_X}\left(1 - \frac{1}{\kappa_y}\right) \leq 2$, où $\kappa_y = \max\{\kappa(v) \,|\, v \text{ sommet de } \mathscr{D}_y\}$ et $\kappa(v) = \inf\{\ell \in \mathbb{Z}_{>0} \mid \ell v \in N\}$;
(c) C_X est une courbe elliptique et pour tout $y \in C_X$ les sommets du polyèdre $\mathscr{D}_y$ sont des vecteurs entiers.

Par ailleurs, X a au plus des singularités canoniques (resp. terminales) si et seulement si :

(d) pour tout $y \in C_X$ et tout vecteur entier primitif ξ tel que ξ soit dans l'interieur relatif de $C_y(\mathscr{D})$ ou un générateur d'une face de dimension 1 de $C_y(\mathscr{D})$ tel que $\mathbb{Q}_{\geq 0}\xi \cap (\deg(\mathscr{D}_{X,\mathscr{V}}) \cup \varrho(\mathscr{D}_{X,\mathscr{V}})) \neq \emptyset$, on a l'inégalité $\omega_X(y,\xi) \leq -1$ (resp. $\omega_X(y,\xi) < -1$).

Démonstration. Nous commençons par rappeler la construction de [16, Section 5.3] pour une désingularisation de X. Elle est donnée par une suite de morphismes propres birationnels G-equivariants

$$\begin{tikzcd} X' = X(\mathscr{E}') \arrow[r, "q'"] \arrow[rrr, bend right, "\psi"'] & X(\tilde{\mathscr{E}}) \arrow[r, "q"] & X(\mathscr{E}) \arrow[r, "\pi"] & X. \end{tikzcd}$$

Les G-variétés $X(\mathscr{E}')$, $X(\tilde{\mathscr{E}})$, $X(\mathscr{E})$ sont décrites par des ensembles finis de diviseurs polyédraux coloriés, appelés *éventails divisoriels coloriés* (voir [25],[16, Section 3] pour plus de détails), chacun d'autres eux décrivant un recollement en des ouverts G-stables de G-variétés normales avec orbites horosphériques. On a $\mathscr{E} = \{(\mathscr{D}_{X,\mathscr{V}}, \emptyset)\}$ et π est le morphisme naturel de décolorisation (voir [15, Section 2.2]). De plus, en considérant un recouvrement fini $(C^i_X)_{i\in I}$ d'ouverts affines de C_X, l'ensemble $\tilde{\mathscr{E}}$ est $\{(\mathscr{D}_{X,\mathscr{V}|C^i_X}, \emptyset) \mid i \in I\}$ et q est le morphisme de *contraction* ou *d'affinisation* (voir par exemple [1, Theorem 3.1], [16, Section 4.2]). Enfin, la variété lisse $X(\mathscr{E}')$ est induite par une subdivision régulière de $C(\mathscr{D}_{X,\mathscr{V}})$ (voir [16, Section 5.3] pour une construction inspirée de [12]).

En utilisant [16, Proposition 5.9], un diviseur canonique relatif à ψ et porté sur le lieu exceptionnel peut être exprimé comme la somme

$$K_{X'/X} = K_{X'} - \psi^\star K_X = \sum_{i=1}^{r}(-1-\omega_X(y_i,p_i))D_{(y_i,p_i)} + \sum_{j=1}^{s}(-1-\omega_X(y'_j,p'_j))D_{(y'_j,p'_j)}$$
$$+\sum_{\ell=1}^{t}(-1-\omega_X(y''_\ell,p''_\ell))D_{(y''_\ell,p''_\ell)},$$

où $D_{(y_i,p_i)}, D_{(y'_j,p'_j)}, D_{(y''_\ell,p''_\ell)}$ sont les diviseurs premiers correspondants. Ceux de la forme $D_{(y''_\ell,p''_\ell)}$ sont obtenus comme composantes irréductibles du lieu exceptionnel de q' et ceux de la forme $D_{(y_i,p_i)}, D_{(y'_j,p'_j)}$ sont obtenus comme images inverses de composantes irréductibles des lieux exceptionnels de q et π, respectivement. Supposons que X satisfasse au moins une des assertions $(a), (b), (c)$. Nous rappelons que la condition log canonique est équivalente à ce que tous les coefficients de $K_{X'/X}$ sont ≥ -1. Si X vérifie (a), alors $\omega_X \leq 0$ et donc X a des singularités log canoniques. Donc on peut supposer que $C_X = C$ est complète. Dans ce cas, pour toute suite $\underline{v} = (v_y)_{y\in C}$ où v_y est un sommet de $\mathscr{D}_y$, on pose :

$$\delta(\underline{v}) := \deg K_C + \sum_{z\in C}\left(1 - \frac{1}{\kappa(v_z)}\right).$$

Pour tout $1 \leq i \leq r$, l'inégalité $-1-\omega_X(y_i,p_i) \geq -1$ est équivalente à $\delta(\underline{v}^i) \leq 0$, où $\underline{v}^i = (v^i_y)_{y\in C}$ est une suite telle que v^i_y est un sommet de $\mathscr{D}_y$ pour tout $y \in C$ et telle qu'il existe $\lambda \in \mathbb{Q}_{>0}$ tel que $\lambda \cdot p_i = \sum_{y\in C} v^i_y$. Cette dernière condition est consequence de la validité de l'une des assertions (b) ou (c).

Réciproquement, supposons que X ait des singularités log canoniques et que $C_X = C$ soit une courbe complète lisse. Soit $\underline{v} = (v_y)_{y\in C}$ une suite arbitraire telle que pour tout $y \in C$, le vecteur v_y est un sommet de $\mathscr{D}_y$. Notons $v = \sum_{y\in C} v_y$. Alors, en reprenant les notations ci-dessus, les inégalités $\delta(\underline{v}^i) \leq 0$ pour $1 \leq i \leq r$ impliquent $\deg K_C \leq 0$, c'est-à-dire $\deg K_C = -2$ ou $\deg K_C = 0$. Elles impliquent en outre que $(\omega_X)_{|\sigma} \leq 0$. Puisque C_X est complète, on a $(K_X)_{|X_0} = \mathrm{div}(f\chi^e)$ (cf. [15, Section 2.3]) pour le diviseur canonique K_X défini dans [15, Theorem 2.18], où $f\chi^e$ est une fonction rationnelle B-propre de $k(X)$ avec $f \in k(C)^\star$ et $e \in M$. En adaptant l'argument de la preuve de [16, Lemma 5.23], on déduit la formule

$$0 \geq \omega_X(z,v) = \sum_{y\in C}\frac{1}{\kappa(v_y)}\kappa(v_y)(\langle e, v_y\rangle + \mathrm{ord}_y(f)) = \delta(\underline{v}),$$

où $z \in C$. Considérons le cas $\deg K_C = 0$. Alors C_X est une courbe elliptique et l'inégalité $\delta(\underline{v}) \leq 0$ donne $v_y \in N$ pour tout $y \in C$. Comme la suite $(v_y)_{y\in C}$ est choisie de façon arbitraire, on obtient l'assertion (c). Si maintenant $\deg K_C = -2$, alors C_X s'identifie à la droite projective et à nouveau en maximisant $\delta(\underline{v}) \leq 0$ sur toute suite $\underline{v}$, on a (b).

Nous passons au critère pour les singularités canoniques (resp. terminales). Supposons que X ait des singularités canoniques (resp. terminales). Soit $\xi \in C_y(\mathscr{D})$ un vecteur primitif entier où $y \in C_X$. Alors, on peut construire l'application q' de sorte qu'il existe $1 \leq \ell \leq t$ tel que $\xi = (y''_\ell, p''_\ell)$. En particulier, le fait que la discrépance au diviseur $D_{(y''_\ell,p''_\ell)}$ est ≥ 0 (resp. > 0) implique la condition (d). La réciproque est aisée à démontrer et laissée au lecteur. □

Dans l'exemple suivant, nous regardons le cas particulier des surfaces affines normales avec une opération algébrique fidèle du groupe multiplicatif (voir [18, Theorem 5.7] pour le cas des singularités canoniques[2]). Plus généralement, nous renvoyons à [24], [11, Section 7] pour plus de détails sur les singularités de surfaces. Notons que toute surface normale est $\mathbb{Q}$-Gorenstein et que celles ayant des singularités terminales sont lisses.

Exemple 2.2. $k^\star$-surfaces. *Supposons que X soit une surface affine normale et que le groupe opérant G soit le groupe $\mathbb{G}_m(k) = (k^\star, \times)$. Alors on a $X = X_0$, $M = \mathbb{Z}$ et $\mathscr{F}_X = \emptyset$. Si $\sigma \neq 0$, alors on peut supposer que $\sigma = \mathbb{Q}_{\geq 0}$ et donc que $\mathscr{D}$ est uniquement déterminé par le diviseur $D := \mathscr{D}(1)$. Dans ce cas, on dit que la $k^\star$-surface X est de type* parabolique *si C_X est affine et de type* elliptique *si C_X est complète. Le cas restant est celui où $\sigma = \{0\}$, C_X est affine, et $\mathscr{D}$ est alors uniquement déterminé par le couple (D_-, D_+), où $D_- = \mathscr{D}(-1)$ et $D_+ = \mathscr{D}(1)$; la surface correspondante est dite de type* hyperbolique. *Voir [10] pour une description géométrique de cette trichotomie. Si X est elliptique, alors d'après le théorème 2.1, X est log canonique si et seulement si l'un des deux cas suivant est vrai :*

[2] Le lecteur notera que la série E dans *loc. cit.* devrait être $E_i : \frac{1}{2}\cdot[0] + \frac{1}{3}\cdot[1] - \frac{i-4}{i-3}\cdot[\infty]$ pour $i = 6, 7, 8$.

(1) *(X est rationnelle) la courbe* C_X *s'identifie à la droite projective* $\mathbb{P}^1_k$ *et après réductions par des isomorphismes* $k^\star$*-equivariants (i.e., en changeant* D *par* $D+E$ *où* E *est un diviseur entier de degré* 0 *sur* C_X*), on peut écrire le diviseur* D *comme la somme*

$$D = \frac{e_1}{m_1}\cdot[0] + \frac{e_2}{m_2}\cdot[1] + \frac{e_3}{m_3}\cdot[2] + \frac{e_4}{m_4}\cdot[\infty],$$

où pour tout $1 \le i \le 4$*, les entiers* e_i, m_i *sont premiers entre eux et le quadruplet* (m_1, m_2, m_3, m_4) *est de la forme* $(2, 2, r, 1)$ *(pour* $r \in \mathbb{Z}_{>1}$*),* $(1, p, q, 1)$ *(pour des entiers* $p \ge q \ge 1$*),* $(2, 3, 3, 1)$, $(2, 3, 4, 1)$, $(2, 3, 5, 1)$, $(2, 3, 6, 1)$, $(2, 4, 4, 1)$, $(3, 3, 3, 1)$, *et* $(2, 2, 2, 2)$ *;*

(2) *(X n'est pas rationnelle) alors* C_X *est une courbe elliptique et* D *est un diviseur entier de degré* > 0. *En particulier, tout cône affine normal au-dessus d'une courbe elliptique a des singularités log canoniques, ces derniers correspondant au cas où* D *est très ample, c'est-à-dire satisfaisant la condition* $\deg D \ge 3$.

Références

[1] K. Altmann, J. Hausen, Polyhedral divisors and algebraic torus actions, Math. Ann. 334 (2006) 557–607.
[2] K. Altmann, J. Hausen, H. Suess, Gluing affine torus actions via divisorial fans, Transform. Groups 13 (2008) 215–242.
[3] V. Batyrev, Stringy Hodge numbers of varieties with Gorenstein canonical singularities, in : Integrable Systems and Algebraic Geometry, Kobe/Kyoto, 1997, World Sci. Publ., River Edge, NJ, USA, 1998, pp. 1–32.
[4] V. Batyrev, A. Moreau, The arc space of horospherical varieties and motivic integration, Compos. Math. 149 (8) (2013) 1327–1352.
[5] C. Bouvier, G. Gonzalez-Sprinberg, Système générateur minimal, diviseurs essentiels et G-désingularisations de variétés toriques, Tohoku Math. J. (2) 47 (1) (1995) 125–149.
[6] M. Brion, Variétés sphériques et théorie de Mori, Duke Math. J. 72 (2) (1993) 369–404.
[7] D. Dais, Resolving 3-Dimensional Toric Singularities. Geometry of Toric Varieties, Semin. Congr., vol. 6, Soc. Math. France, Paris, 2002, pp. 155–186.
[8] V.I. Danilov, The geometry of toric varieties, Usp. Mat. Nauk 33 (2(200)) (1978) 85–134, 247.
[9] J. Denef, F. Loeser, Germs of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration, Invent. Math. 135 (1) (1999) 201–232.
[10] H. Flenner, M. Zaidenberg, Normal affine surfaces with $\mathbb{C}^\star$-actions, Osaka J. Math. 40 (4) (2003) 981–1009.
[11] S. Ishii, Introduction to Singularities, Springer, Tokyo, 2014.
[12] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat, Toroidal Embeddings. I, Lect. Notes Math., vol. 339, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1973.
[13] F. Knop, Weylgruppe und Momentabbildung, Invent. Math. 99 (1) (1990) 1–23.
[14] F. Knop, The Luna-Vust theory of spherical embeddings, in : Proceedings of the Hyderabad Conference on Algebraic Groups, Hyderabad, 1989, Manoj Prakashan, Madras, India, 1991, pp. 225–249.
[15] K. Langlois, R. Terpereau, On the geometry of normal horospherical G-varieties of complexity one, J. Lie Theory 26 (1) (2016) 49–78.
[16] K. Langlois, C. Pech, M. Raibaut, Stringy invariants for horospherical varieties of complexity one, arXiv :1511.03852.
[17] K. Langlois, On the classification of normal *G*-varieties with spherical orbits, arXiv :1610.02837.
[18] A. Liendo, H. Suess, Normal singularities with torus actions, Tohoku Math. J. (2) 65 (1) (2013) 105–130.
[19] F. Loeser, Seattle lectures on motivic integration, in : Algebraic Geometry, Seattle 2005, in : Proc. Symp. Pure Math., vol. 80 (Part 2), American Mathematical Society, Providence, RI, USA, 2009, pp. 745–784.
[20] T. Oda, Torus embeddings and applications, in : Based on Joint Work with Katsuya Miyake, in : Tata Inst. Fund. Res. Lect. Math. Phys., vol. 57, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1978.
[21] B. Pasquier, Variétés horosphériques de Fano, Bull. Soc. Math. Fr. 136 (2) (2008) 195–225.
[22] M. Reid, Canonical 3-folds, in : Journées de Géometrie Algébrique D'Angers, Juillet 1979/Algebraic Geometry, Angers, France, 1979, Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn–Germantown, Md., 1980, pp. 273–310.
[23] M. Reid, Decomposition of toric morphisms, in : Arithmetic and Geometry, Vol. II, in : Prog. Math., vol. 36, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983, pp. 395–418.
[24] E.b.M. Demazure, H. Pinkham, B. Teissier, Séminaire sur les singularités des surfaces, in : Centre de mathématiques de l'École polytechnique, Palaiseau, 1976–1977, in : Lect. Notes Math., vol. 777, Springer, Berlin, 1980.
[25] D.A. Timashëv, Classification of *G*-manifolds of complexity 1, (Russian) Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. 61 (2) (1997) 127–162, translation in Izv. Math. 61 (2) (1997) 363–397.
[26] W. Veys, Arc spaces, motivic integration and stringy invariants, in : Singularity Theory and Its Applications, in : Adv. Stud. Pure Math., vol. 43, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2006, pp. 529–572.