Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007) 453–456
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Géométrie différentielle

Obstructions topologiques aux distributions non-intégrables régulières de rang 2

Abdol-Reza Mansouri

Queen's University, Department of Mathematics and Statistics, Kingston, ON K7L 3N6, Canada

Reçu le 24 novembre 2006 ; accepté après révision le 9 février 2007

Disponible sur Internet le 21 mars 2007

Présenté par Étienne Ghys

Résumé

Dans cette Note, nous présentons des obstructions topologiques à l'existence, sur une variété lisse de dimension $\geqslant 4$, de distributions régulières non-intégrables de rang 2. En particulier, nous retrouvons les résultats de Buemi dans les cas où la distribution est de classe (A) et de type $(s_0, 1, 1, \ldots, 1, 2)$ avec $s_0 = 0$ ou 1. ***Pour citer cet article : A.-R. Mansouri, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***

Abstract

Topological obstructions to regular non-integrable rank 2 distributions. In this Note, we present topological obstructions to the existence of a regular non-integrable rank 2 distribution on a smooth manifold of dimension $\geqslant 4$. In particular, we recover the topological obstructions uncovered by Buemi for the case where the distribution is of class (A) and of type $(s_0, 1, 1, \ldots, 1, 2)$ with $s_0 = 0$ or 1. ***To cite this article: A.-R. Mansouri, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***

1. Introduction

Soit M une variété lisse réelle et soit E un sous-fibré vectoriel du fibré tangent de M. Le résultat classique suivant [1] démontre que l'intégrabilité de E donne lieu à des obstructions topologiques :

Théorème 1.1 *(Bott). Si E est un sous-fibré vectoriel intégrable de rang p du fibré tangent TM de la variété réelle n-dimensionnelle M, alors l'anneau généré par les classes de Pontrjagin réelles du fibré quotient TM/E s'annule en dimensions $> 2(n-p)$.*

Notre but dans cette Note est d'établir des obstructions topologiques a la non-intégrabilité (en un sens qui sera précisé) de certains sous-fibrés de rang 2 sur une variété réelle de dimension $\geqslant 4$.

Adresse e-mail : mansouri@mast.queensu.ca.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2007.02.012

Soient donc M une variété lisse de dimension $n+2$ avec $n \geqslant 2$, et $\mathcal{D}$ une distribution non-intégrable de rang 2 sur M, c'est-à-dire un sous-fibré non-intégrable du fibré tangent TM de M de rang 2. L'annulateur du sous-fibré $\mathcal{D}$ est un sous-fibré $\mathcal{I}$ du fibré cotangent $T^\star M$ de M de rang n. Le défaut d'intégrabilité de $\mathcal{D}$ se manifeste dans la suite $(\mathcal{I}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ de sous-fibrés de $T^\star M$, où l'on a posé $\mathcal{I}^{(0)} = \mathcal{I}$ et où $\mathcal{I}^{(k+1)}$ est défini en fonction de $\mathcal{I}^{(k)}$ par la suite courte exacte

$$0 \to \mathcal{I}^{(k+1)} \to \mathcal{I}^{(k)} \to d\mathcal{I}^{(k)} \bmod \mathcal{I}^{(k)} \to 0.$$

La suite $(\mathcal{I}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ se stabilise au plus petit entier $p \in \mathbb{N}$ pour lequel $\mathcal{I}^{(p)} = \mathcal{I}^{(p+1)}$. Soit N cet entier. Deux cas se présentent alors : Si $\mathcal{I}^{(N)}$ est la section nulle de $T^\star M$, alors la distribution intégrable générée par le sous-fibré $\mathcal{D}$ est le fibré tangent tout entier ; sinon, la distribution intégrable générée par le sous-fibré $\mathcal{D}$ est un sous-fibré de TM de codimension non nulle. Pour tout point $x \in M$, nous définissons la suite $(s_k(x))_{k=0}^{N+1}$ d'entiers par : $s_0(x) = \dim(\mathcal{I}^{(N)}(x))$, $s_k(x) = \dim(\mathcal{I}^{(N-k)}(x)/\mathcal{I}^{(N-k+1)}(x))$ pour $1 \leqslant k \leqslant N$ et $s_{N+1}(x) = \dim(T_x^\star M/\mathcal{I}(x))$. La distribution $\mathcal{D}$ est dite régulière si la suite $(s_k(x))_{k=0}^{N+1}$ d'entiers ne dépend pas du point x considéré.

Les distributions non-intégrables régulières de rang 2 ont été classifiées par Gardner [3] et, suivant la suite d'entiers $(s_0, s_1, \ldots, s_{N+1})$ qu'elles determinent, se rangent dans l'une des deux classes suivantes :

Classe (A) Celles pour lesquelles la suite $(s_0, s_1, \ldots, s_{N+1})$ est de la forme $(s_0, 1, 1, \ldots, 1, 2)$,
Classe (B) celles pour lesquelles cette suite est de la forme $(s_0, s_1, \ldots, s_{N-m}, 2, 1, 1, \ldots, 1, 2)$.

En étudiant des corepères mobiles locaux adaptés a la suite $(\mathcal{I}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ de sous-fibrés de $T^\star M$, Buemi [2] a montré que pour les distributions non-intégrables régulières de rang 2 sur M de type $(s_0, 1, 1, \ldots, 1, 2)$ avec $s_0 = 0, 1$, le groupe structural du fibré principal des corepères de M pouvait être réduit à un groupe fini, impliquant par la même l'annulation de toutes les classes de Pontrjagin réelles de M.

Notre but dans cette note est d'étendre le résultat de [2] au cas des distributions non-intégrables régulières de rang 2 générales et nous montrons dans ce travail que sur une variété de dimension $\geqslant 4$ des obstructions topologiques se manifestent à l'existence de distributions de classe (A) autres que celles étudiées dans [2], ainsi qu'à l'existence de distributions de classe (B). Nous retrouvons évidemment le résultat de [2] pour les distributions de classe (A) de type $(s_0, 1, 1, \ldots, 1, 2)$ avec $s_0 = 0$ ou 1.

2. Corepères adaptés

Il est montré dans [2] que pour les distributions régulières de type $(0, 1, 1, \ldots, 1, 2)$ ou $(1, 1, 1, \ldots, 1, 2)$ il existe un recouvrement localement fini de M et un corepère local défini dans chaque ouvert de ce recouvrement tels que les fonctions de transition du fibré principal des corepères de M aient, par rapport aux corepères locaux mentionnés, une représentation matricielle triangulaire supérieure. Une construction identique à celle de [2] nous montre l'existence, pour une distribution régulière générale $\mathcal{D}$ de classe (A) et de type $(s_0, 1, 1, \ldots, 1, 2)$ avec $s_0 \leqslant n-2$ (c'est-à-dire excluant les distributions de classe (A) de type $(n-1, 1, 2)$), d'un recouvrement localement fini de M et, pour chaque ouvert U de ce recouvrement, d'un corepère $\theta_U = (\theta_U^k)_{k=1}^{n+2}$ tel que la fonction de transition g_{UV} associée du fibré principal des corepères de M ait, dans les bases données par θ_U et θ_V, la représentation matricielle suivante :

$$g_{UV} = \begin{pmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix} \in GL(n+2, \mathbb{R}) \tag{1}$$

où $A \in GL(s_0, \mathbb{R})$ et C est triangulaire supérieure. Le corepère θ_U est adapté à la distribution $\mathcal{D}$ au sens où $\{\theta_U^1, \ldots, \theta_U^{s_0+k}\}$ forme une base de $\mathcal{I}^{(N-k)}$ au dessus de U pour $k = 0, \ldots, N$. Nous supposons maintenant la variété M munie d'une structure Riemannienne quelconque. Ceci nous permet d'orthonormaliser les corepères adaptés construits ci-dessus suivant la méthode de Gram–Schmidt et nous supposons dorénavant que tous les corepères θ_U ont été ainsi orthonormalisés. Il en découle que les fonctions de transition g_{UV} (correspondant aux corepères adaptés orthonormaux) revêtent la structure

$$g_{UV} = \begin{pmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix} \in O(n+2, \mathbb{R}) \tag{2}$$

où C est triangulaire supérieure, ce qui implique que $A \in O(s_0, \mathbb{R})$, $B = 0$, et C est diagonale avec ± 1 sur la diagonale ; en particulier, C est localement constante sur la variété.

De même, pour une distribution régulière de classe (B) de type $(s_0, s_1, \ldots, s_{N-m}, 2, 1, 1, \ldots, 1, 2)$ avec $s_0 + s_1 + \cdots + s_{N-m} \leqslant n - 4$ (c'est-à-dire excluant les distributions de type $(s_0, s_1, \ldots, s_{N-m}, 2, 1, 2)$), une construction identique a celle de [2] nous montre l'existence d'un recouvrement localement fini de M et, pour chaque ouvert U de ce recouvrement, d'un corepère $\theta_U = (\theta_U^k)_{k=1}^{n+2}$ tel que la fonction de transition g_{UV} associée du fibré principal des corepères de M ait, dans les bases données par θ_U et θ_V, la représentation matricielle (1), avec, cette fois, $A \in GL(s_0 + s_1 + \cdots + s_{N-m} + 2, \mathbb{R})$, et où $C \in GL(n - s_0 - s_1 - \cdots - s_{N-m}, \mathbb{R})$ est triangulaire supérieure. Une orthonormalisation à la Gram–Schmidt permet à nouveau une réduction du groupe structural, plus précisement au sous-groupe de $O(n + 2, \mathbb{R})$ formé des matrices de la forme (2) avec cette fois $A \in O(s_0 + s_1 + \cdots + s_{N-m} + 2, \mathbb{R})$, $B = 0$, et C diagonale avec ± 1 sur la diagonale.

3. Contraintes topologiques

Il résulte des constructions de la section précédente que l'existence d'une distribution régulière de rang 2 de classe (A) et de type $(s_0, 1, 1, \ldots, 1, 2)$ avec $s_0 \leqslant n - 2$ sur une variété M de dimension $n + 2 \geqslant 4$ implique que le fibré cotangent $T^\star M$ de M est somme directe d'un sous-fibré vectoriel réel de rang s_0 et d'un sous-fibré vectoriel réel à groupe structural fini. De même, l'existence d'une distribution régulière de rang 2 de classe (B) et de type $(s_0, s_1, \ldots, s_{N-m}, 2, 1, 1, \ldots, 1, 2)$ avec $s_0 + s_1 + \cdots + s_{N-m} \leqslant n - 4$ sur une variété M de dimension $n + 2 \geqslant 4$ implique que le fibré cotangent $T^\star M$ de M est somme directe d'un sous-fibré vectoriel réel de rang $s_0 + s_1 + \cdots + s_{N-m} + 2$ et d'un sous-fibré vectoriel réel à groupe structural fini. Les théorèmes suivants sont la conséquence directe de cette observation :

Théorème 3.1. *Soit M une variété lisse de dimension $n + 2 \geqslant 4$ et soit $\mathcal{D}$ une distribution régulière de rang* 2 *de classe* (A) *et de type* $(s_0, 1, 1, \ldots, 1, 2)$ *sur M avec $s_0 \leqslant n - 2$; alors, $p_k(M) = 0$ $\forall k > s_0/2$, $p_k(M) \in H^{4k}(M; \mathbb{R})$ dénotant la k-ième classe de Pontrjagin réelle du fibré tangent TM de M.*

Remarque 1. Pour $n > 2$, la condition est trivialement vérifiée pour les distributions de classe (A) de type $(n - 1, 1, 2)$ pour raisons de dimension.

Remarque 2. Il est à noter que nous retrouvons le résultat de [2] pour $s_0 = 0$ $(n \geqslant 2)$ ou 1 $(n > 2)$.

Théorème 3.2. *Soit M une variété lisse de dimension $n + 2 \geqslant 4$ et soit $\mathcal{D}$ une distribution régulière de rang* 2 *de classe* (B) *et de type* $(s_0, s_1, \ldots, s_{N-m}, 2, 1, 1, \ldots, 1, 2)$ *sur M ; alors, $p_k(M) = 0$ $\forall k > 1 + (s_0 + s_1 + \cdots + s_{N-m})/2$.*

Remarque 3. La condition est trivialement vérifiée pour les distributions de classe (B) de type $(s_0, s_1, \ldots, s_{N-m}, 2, 1, 2)$ pour raisons de dimension.

Remarque 4. Si la distribution régulière $\mathcal{D}$ est de classe (A) et de type $(s_0, 1, 1, \ldots, 1, 2)$ pour un certain $s_0 \leqslant n - 2$, alors, la plus petite distribution complètement intégrable E sur M générée par $\mathcal{D}$ a pour rang $n + 2 - s_0$. De même, si elle est de classe (B) et de type $(s_0, s_1, \ldots, s_{N-m}, 2, 1, 1, \ldots, 1, 2)$ avec $s_0 + s_1 + \cdots + s_{N-m} \leqslant n - 4$, alors la plus petite distribution complètement intégrable E sur M générée par $\mathcal{D}$ a pour rang $n - s_0 - \cdots - s_{N-m}$. Des contraintes sur les classes de Pontrjagin réelles du sous-fibré E de TM peuvent être établies en mettant à profit la relation $p(M) = p(E)p(TM/E)$ (où $p(.)$ denote la classe de Pontrjagin réelle totale du fibré vectoriel considéré) ainsi que les Théorèmes 3.1, 3.2 et le théorème de Bott [1].

Remerciements

L'auteur tient à remercier le Professeur Niky Kamran de lui avoir indiqué la réference [2], ainsi que le lecteur anonyme, dont les commentaires ont été fort précieux. Cette recherche a été subventionnée en partie par le Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada.

Références

[1] R. Bott, On a topological obstruction to integrability, in: Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 16, American Mathematical Society, 1970, reprinted 1983.
[2] R. Buemi, An obstruction to certain non-integrable 2-plane fields, Topology 16 (1976) 173–176.
[3] R. Gardner, Invariants of Pfaffian systems, Trans. Amer. Math. Soc. 126 (1967) 514–533.