Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007) 421–424

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Théorie des groupes

Asymptotiques de fonctions sur un espace symétrique réductif p-adique

Nathalie Lagier

Institut de Mathématiques de Luminy, UMR 6206 CNRS, université de la Méditerranée, case 907, 163, avenue de Luminy, 13288 Marseille cedex 09, France

Reçu le 7 janvier 2007 ; accepté après révision le 7 février 2007

Disponible sur Internet le 23 mars 2007

Présenté par Michel Duflo

Résumé

Nous établissons une généralisation de la dualité de Casselman aux espaces symétriques réductifs p-adiques et nous étudions le comportement asymptotique de certains coefficients. Nous prouvons aussi un anologue d'un lemme de Langlands grâce auquel nous obtenons un résultat de disjonction de certaines parties de la décomposition de Cartan de l'espace symétrique. ***Pour citer cet article : N. Lagier, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***

Abstract

Asymptotics of functions on a p-adic reductive symmetric space. We establish a generalization of Casselman's pairing to p-adic reductive symmetric spaces and we study the asymptotic behaviour of certain coefficients. Also an analogous of a Langlands lemma is proved and used to get a disjonction result for the Cartan decomposition of the symmetric space. ***To cite this article: N. Lagier, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***

1. Introduction

Nous présentons ici des résultats sur l'analyse harmonique sur les espaces symétriques réductifs p-adiques dont les démonstrations paraitront ultérieurement. Soit F un corps local non archimédien de caractéristique 0, soit G le groupe des points sur F d'un groupe réductif connexe défini sur F et soit σ une involution rationnelle définie sur F de ce groupe algébrique. Un espace symétrique réductif p-adique est le quotient du groupe G par le groupe H des points sur F d'un sous-groupe ouvert du groupe des points fixes de σ. Les groupes réductifs peuvent être vus comme des espaces symétriques.

Harish-Chandra a démontré la formule de Plancherel pour les groupes réductifs réels [7] et les groupes réductifs p-adiques (cf. [14]). La formule de Plancherel pour les espaces symétriques réductifs réels a été établie par deux méthodes différentes par E.P. van den Ban et H. Schlichtkrull d'une part et P. Delorme d'autre part (cf. [13] pour une présentation des deux méthodes).

Adresse e-mail : nathalie.lagier@wanadoo.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2007.02.002

Les fonctions sphériques sur certains espaces symétriques réductifs ont été étudiées (cf. [10–12]). L'analyse harmonique sur les espaces symétriques réductifs p-adiques généraux en est à ses débuts. On dispose de résultats de structure (cf. [9,8]). On note G/H un espace symétrique réductif p-adique. P. Blanc et P. Delorme ont construit des familles rationnelles de formes linéaires H-invariantes sur les représentations paraboliquement induites (cf. [1], voir aussi paragraphe 3 de cette Note). Enfin on dispose d'une décomposition de type Cartan des espaces symétriques réductifs p-adiques (cf. [2,5], voir aussi (3)).

Nos résultats portent d'abord sur l'analogue pour les espaces symétriques réductifs de la dualité de Casselman (cf. [4] et [14] Théorème IV.1.1).

Plus précisément, soit P un sous-groupe parabolique de G tel que P et $\bar{P} := \sigma(P)$ soient opposés. On dit que P est un σ-sous-groupe parabolique de G. Le groupe $M = P \cap \sigma(P)$ est le sous-groupe de Levi σ-stable de P. On associe canoniquement à une forme linéaire H-invariante ξ sur une représentation lisse de G admissible de type fini, (π, V), une forme linéaire $M \cap H$-invariante sur son module de Jacquet le long de P (cf. Théorème 1). Ceci permet de définir le terme constant le long de P des coefficients :

$$gH \mapsto c_{\xi,v}(gH) := \langle \pi^*(g)\xi, v \rangle, \quad g \in G, \ v \in V, \tag{1}$$

où (π^*, V^*) est la représentation $g \mapsto {}^t\pi(g^{-1})$ sur le dual algébrique V^* de V.

On précise au Théorème 2 des propriétés de cette correspondance. Ces résultats, joints à la décomposition de Cartan, nous permettent notamment de démontrer que si π est unitaire, les coefficients $c_{\xi,v}$ sont bornés (cf. Théorème 3), ce qui est l'analogue d'un résultat de M. Flensted-Jensen, T. Oshima, H. Schlichtkrull pour les espaces symétriques réductifs réels (cf. [6]).

Ce thèorème, joint à la comparaison de fonctions sur G/H (cf. (2) et [1] (2.26) pour leur définition), qui n'est pas détaillée dans cette note, montre aussi que la condition restrictive du Théorème 3 de [1] est toujours satisfaite.

Grâce à ce théorème, nous montrons un résultat de disjonction de certaines parties de la décomposition de Cartan (cf. Théorème 4).

2. Principaux résultats

On retient les notations de l'introduction. On considère divers groupes algébriques définis sur F, et on utilisera des abus de terminologie du type suivant : « soit A un tore déployé » signifiera « soit A le groupe des points sur F d'un tore défini et déployé sur F ». Avec ces conventions, soit G un groupe linéaire algébrique réductif et connexe défini sur F. Soit A_0 un tore déployé maximal de G, on note M_0 son centralisateur. Si P est un sous-groupe parabolique de G contenant A_0, il possède un unique sous-groupe de Lévi contenant A_0, noté M. Son radical unipotent sera noté U. On note A_G le plus grand tore déployé dans le centre de G.

On note $X(G)$ le groupe des caractères non ramifiés de G et $X_*(G)$ l'ensemble des sous-groupes à un paramètre de A_G, qui est un réseau. On fixe une fois pour toute une uniformisante de F. On note alors $\Lambda(G)$ l'image de $X_*(G)$ dans G par l'application « évaluation en l'uniformisante », qui est un réseau isomorphe à $X_*(G)$ par cette évaluation.

Notons $\Sigma(A_M)$ l'ensemble des racines de A_M dans l'algèbre de Lie de G et $\Sigma(P)$ l'ensemble des racines de A_M dans l'algèbre de Lie de P et $\Delta(P)$ le sous-ensemble des racines simples.

On reprend les notations et hypothèses de l'introduction notamment pour σ et H.

Un tore déployé de G contenu dans $\{g \in G \mid \sigma(g) = g^{-1}\}$ sera dit tore σ-déployé, ((σ, F)-*split torus* dans [9]).

On fixe désormais $A_\emptyset$ un tore σ-déployé maximal et on suppose A_0 choisi de telle sorte que A_0 soit un tore déployé σ-stable maximal contenant $A_\emptyset$. On note $(A_i)_{i \in I}$, un ensemble de représentants des classes de H-conjugaison de tores σ-déployés maximaux de G, qui est fini (cf. [9], 6.10 et 6.16). On suppose que cet ensemble contient $A_\emptyset$. Les A_i sont tous conjugués sous G (cf. [8], Proposition 1.16). On choisit, pour tout i, un $x_i \in G$, avec $x_i A_\emptyset x_i^{-1} = A_i$ en prenant $x_\emptyset = e$, où e est l'élément neutre de G.

Soit $P_\emptyset$ (resp. P) un σ-sous groupe parabolique minimal de G contenant $A_\emptyset$ (resp. contenant $P_\emptyset$). On note $\overline{W(A_\emptyset)}$ un ensemble de représentants du quotient $W(A_\emptyset)$ du normalisateur dans G de $A_\emptyset$ par son centralisateur. On extrait de l'ensemble $\{x_i w \mid w \in \overline{W(A_\emptyset)}\}$ un ensemble de représentants $\mathcal{W}^G_{M_\emptyset}$ de $(H, P_\emptyset)$-doubles classes ouvertes de G.

On note $X(M)_\sigma$ la composante neutre de l'ensemble des caractères de $X(M)$ anti-invariants par σ. On note δ_P le module de P, qui est un élément de $X(M)_\sigma$.

2.1. Vecteurs-distributions H-invariants et modules de Jacquet

On considère $P = MU$ un σ-sous groupe parabolique de G, de sous-groupe de Lévi σ-stable M et de radical unipotent U. Pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, on note

$$A_M^-(\varepsilon) := \{a \in A_M;\ |\alpha(a)|_F \leqslant \varepsilon,\ \alpha \in \Delta(P)\},$$

où $|.|_F$ est la valuation normalisée de F. On pose $A_M^- := A_M^-(1)$.

Soit (π, V) une représentation lisse admissible de G, notons V_P le module de Jacquet de V relativement à P et $j_P : V \to V_P$ la projection naturelle. On munit V_P de la représentation lisse admissible π_P de M définie par $\pi_P(m) j_P(v) := \delta_P(m)^{-1/2} j_P(\pi(m)v)$ pour tout $m \in M,\ v \in V$.

Lemme 1. *Si K est un sous groupe ouvert compact, il existe un sous groupe ouvert compact K' de K possédant la propriété suivante* :

Pour toute représentation lisse admissible (π, V) de G, pour tout élément ξ de V^{*H} et pour tout $v \in V^K$, on a :

$$\langle \pi^*(k)\xi, \pi(a)v\rangle = \langle \xi, \pi(a)v\rangle, \quad a \in A_M^-,\ k \in K'.$$

Soit (π, V) une représentation lisse admissible de type fini de G.

Théorème 1. *Soit $\xi \in V^{*H}$. Alors il existe un unique $j_P^*(\xi) \in (V_P)^{*M\cap H}$ vérifiant* :

pour tout $v \in V$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\delta_P(a)^{-1/2}\langle \xi, \pi(a)v\rangle = \langle j_P^*(\xi), \pi_P(a) j_P(v)\rangle, \quad a \in A_M^-(\varepsilon).$$

De plus, on peut choisir ε indépendamment de $\xi \in V^{*H}$.

On note $\Sigma(P_\emptyset, A_\emptyset)$ l'ensemble des racines de $A_\emptyset$ dans l'algèbre de Lie de $P_\emptyset$. On note $\Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)$ l'ensemble des racines simples de $\Sigma(P_\emptyset, A_\emptyset)$. Soient $P = MU$ un σ-sous groupe parabolique contenant $P_\emptyset$ et $\Delta(U, A_\emptyset)$ les racines de $A_\emptyset$ dans l'algèbre de Lie de U qui sont éléments de $\Delta(P_\emptyset, A_\emptyset)$. Pour $\varepsilon > 0$, soit $A_\emptyset^-(P, < \varepsilon)$ l'ensemble :

$$\{a \in A_\emptyset;\ |\alpha(a)|_F < \varepsilon,\ \alpha \in \Delta(U, A_\emptyset) \text{ et } |\alpha(a)|_F \leqslant 1,\ \alpha \in \Delta(P_\emptyset, A_\emptyset) \setminus \Delta(U, A_\emptyset)\}.$$

Théorème 2. *Pour tout $v \in V$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\xi \in V^{*H}$, on ait* :

$$\delta_P(a)^{-1/2}\langle \xi, \pi(a)v\rangle = \langle j_P^*(\xi), \pi_P(a) j_P(v)\rangle, \quad a \in A_\emptyset^-(P, < \varepsilon).$$

Fixons un plongement algébrique $\tau : G \to GL_n(F)$. On peut supposer, et l'on suppose, que $\tau(K) \subset GL_n(\mathcal{O})$ où $\mathcal{O}$ est l'anneau des entiers de F (cf. [14] I.1). Pour $g \in G$, écrivons : $\tau(g) = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n},\ \tau(g^{-1}) = (b_{i,j})_{i,j=1,\dots,n},\ \|g\| = \sup_{i,j} \sup(|a_{i,j}|_F, |b_{i,j}|_F)$ et :

$$\|gH\| := \|g\sigma(g^{-1})\|. \tag{2}$$

Théorème 3. (i) *Soit $\xi \in V^{*H}$. Il existe $c > 0$ tel que, pour tout $v \in V$, il existe $C_v > 0$ vérifiant* :

$$|\langle \pi^*(g)\xi, v\rangle| \leqslant C_v \|gH\|^c, \quad g \in G.$$

(ii) *Si (π, V) est une représentation lisse unitaire irréductible de G et $\xi \in V^{*H}$, alors pour tout $v \in V$, la fonction $c_{\xi,v}$ définie en* (1) *est bornée.*

2.2. Sur la décomposition de Cartan de G/H

On note $\Lambda_T^-(A_\emptyset) := \{\lambda \in \Lambda(A_\emptyset);\ |\alpha(\lambda)|_F \leqslant e^{-T},\ \alpha \in \Delta(P_\emptyset)\}$, où $T \geqslant 0$ et $\Lambda^-(A_\emptyset) := \Lambda_0^-(A_\emptyset)$.

La décomposition de Cartan (cf. [2,5]) donne l'existence d'une partie compacte Ω telle que :

$$G = \bigcup_{y \in \overline{\mathcal{W}}_{M_\emptyset}^G} \Omega \Lambda^-(A_\emptyset) y^{-1} H. \tag{3}$$

A l'aide de l'analogue d'un Lemme de Langlands (cf. [3], ch. IV, Lemme 4.4) que l'on établit, on montre :

Théorème 4. *Il existe $T > 0$ tel que la réunion $\bigcup_{y \in \mathcal{W}^G_{M_\emptyset}} \Omega \Lambda^-_T(A_\emptyset) y^{-1} H$ soit disjointe.*

Remerciement

Nous remercions J. Bernstein pour d'utiles conversations.

Références

[1] P. Blanc, P. Delorme, Vecteurs distributions H-invariants de représentations induites, pour un espace symétrique réductif p-adique G/H, A paraitre aux Ann. Inst. Fourier.
[2] Y. Benoist, H. Oh, Polar decomposition for p-adic symmetric spaces, Preprint arxiv : math.GR/0612305.
[3] A. Borel, N.R. Wallach, Continuous Cohomology, Discrete Subgroups, and Representations of Reductive Groups, Annals of Mathematics Studies, vol. 94, Princeton University Press, University of Tokyo Press, Princeton, NJ, Tokyo, 1980.
[4] W. Casselman, Introduction to the theory of admissible representations of p-adic reductive groups, Non publié.
[5] P. Delorme, V. Sécherre, An analogue of the Cartan decomposition for p-adic reductive symmetric spaces, Preprint, arxiv: math.RT/0612545.
[6] M. Flensted-Jensen, T. Oshima, H. Schlichtkrull, Boundedness of certain unitarizable Harish-Chandra modules, in: Representations of Lie Groups Kyoto, Hiroshima, 1986, in: Adv. Stud. Pure Math., vol. 14, Academic Press, Boston, MA, 1988, pp. 651–660.
[7] Harish-Chandra, Harmonic analysis on real reductive groups. III. The Maass–Selberg relations and the Plancherel formula, Ann. of Math. (2) 104 (1976) 117–201.
[8] A.G. Helminck, G.F. Helminck, A class of parabolic k-subgroups associated with symmetric k-varieties, Trans. Amer. Math. Soc. 350 (1998) 4669–4691.
[9] A.G. Helminck, S.P. Wang, On rationality properties of involutions of reductive groups, Adv. Math. 99 (1993) 26–96.
[10] Y. Hironaka, Spherical functions and local densities on Hermitian forms, J. Math. Soc. Japan 51 (1999) 553–581.
[11] Y. Hironaka, F. Sato, Spherical functions and local densities of alternating forms, Amer. J. Math. 110 (1988) 473–512.
[12] O. Offen, Relative spherical functions on $\wp$-adic symmetric spaces (three cases), Pacific J. Math. 215 (2004) 97–149.
[13] E.P. van den Ban, H. Schlichtkrull, P. Delorme, Harmonic Analysis on Symmetric Spaces – General Plancherel Theorems, Lie Theory, Progress in Mathematics, vol. 229, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2005.
[14] J.-L. Waldspurger, La formule de Plancherel pour les groupes p-adiques (d'après Harish-Chandra), J. Inst. Math. Jussieu 2 (2003) 235–333.