Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007) 373–376
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Géométrie

Sur une classe de variétés complexes dégénérées

Alireza Bahraini

Department of Mathematical Sciences, Sharif University of Technology, P.O. Box 11365-9415, Tehran, Iran

Reçu le 13 février 2006 ; accepté après révision le 16 janvier 2007

Disponible sur Internet le 9 mars 2007

Présenté par Jean-Pierre Demailly

Résumé

On étudie une classe de compactifications de surfaces analytiques complexes ouvertes qui se présente naturellement dans l'étude des singularités des métriques de Calabi–Yau. On obtient pour ces surfaces une nouvelle théorie de Hodge de même qu'un lemme de Dolbeault dégénéré. ***Pour citer cet article : A. Bahraini, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***

Abstract

On a class of degenerate complex manifolds. We study a class of compactifications of open complex analytic surfaces which appear naturally in the study of the singularities of Calabi–Yau metrics. We obtain a new degenerate Hodge theory as well as a degenerate Dolbeault lemma for these surfaces. ***To cite this article: A. Bahraini, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***

Dans cette Note nous voudrions présenter certains des résultats obtenus dans [1]. Ces résultats s'inscrivent dans un plan pour comprendre la topologie des variétés projectives en termes de structures symplectiques et de cycles lagrangiens. On définit un type de structure sur les variétés C^∞ réelles de dimension 4, que l'on espère être le miroir des surfaces analytiques complexes de type général. Comme première étape dans cette direction, on montre pour ces objets l'existence d'une théorie de Hodge et d'une extension d'un lemme de Dolbeault local.

La construction du modèle local est basée sur la structure quaternionienne standard $\{I, J, K\}$ sur $\mathbb{R}^4 = \{(u, v, x, y) \mid u, v, x, y \in \mathbb{R}\}$. On rappelle que I est la structure complexe standard sur $\mathbb{R}^4$, J se définie par :

$$J\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}x, \qquad J\,\mathrm{d}v = -\mathrm{d}y$$

et $K = I \circ J$.

Modèle local : Soit $\mathbb{C}^2 = \{(w, z) \mid w = u + \mathrm{i}v, z = x + \mathrm{i}y\}$ et $\pi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{H}$ l'application holomorphe :

$$\pi(w, z) = \big(w, z^2\big)$$

définie par rapport à la structure I sur $\mathbb{H}$. La structure complexe dégénérée J' que nous considérons est le tiré en arrière de J par π c.à.d. $J' = \pi^*(J)$. La métrique hyperkählérienne standard g sur $\mathbb{H}$ et la forme symplectique ω

Adresse e-mail : bahraini@sharif.ir.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2007.01.009

compatible avec g et J se relèvent aussi respectivement à une métrique $g' = \pi^* g$ et une structure symplectique $\omega' = \pi^*\omega$ dégénérées le long de $z = 0$.

Définition 1. Soit X une variété orientée C^∞ de dimension réelle 4 et $\Sigma_0 \subset X$ une sous-variété orientée C^∞ de dimension réelle 2. Une *structure complexe dégénérée* sur (X, Σ_0) est une structure analytique complexe sur $X \setminus \Sigma_0$, telle qu'il existe autour de chaque point $p \in \Sigma_0$ un ouvert U et une carte $\phi : U \to \mathbb{C}^2$ identifiant $J'|_{U\setminus\Sigma_0}$ avec $\pi^*(J_1)$ où π est comme dans le modèle local précédant et J_1 est une structure complexe analytique définie sur $\pi\phi(U)$ qui coincide avec J le long de $\mathbb{C} \times \{0\}$. Une telle carte sera dite *adaptée*.

Une *métrique kählérienne dégénérée adaptée* est une forme hermitienne positive h' sur $T(X)$, kählérienne sur $X \setminus \Sigma_0$, et, telle que, pour tout point $p \in \Sigma_0$, et toute carte adaptée $\phi : U \to \mathbb{C}^2$, il existe une métrique H, J_1-kählérienne sur $\pi\phi(U)$ telle que $h' - \phi^*\pi^* H$ soit nulle à l'ordre 2 en p.

En particulier si $h' = g' + \mathrm{i}\omega'$, décomposition en parties réelle et imaginaire, g' est une forme quadratique sur l'espace tangent adaptée sur $X \setminus \Sigma_0$, dont la restriction à $T(X)|_{\Sigma_0}$ a son noyau N transverse à $T(\Sigma_0)$, $\det(g') = \mathrm{O}(|z|^2)$ et la forme $\omega'(X, Y) = g'(X, J'Y)$ est antisymétrique fermée de type $(1, 1)$.

Une classe d'exemples pour ces structures s'obtient en démarrant d'une surface de Calabi–Yau, c'est à dire une surface analytique complexe munie d'une métrique de Calabi–Yau g associée à une structure hyperkählérienne ω, en particulier une surface $K3$. Soient I_1 la structure complexe de X et $\{I_1, J_1\}$ la structure quaternionienne sur X (voir [2] page 265 pour les définitions). Comme dans [2] (page 42) soit B un diviseur sur Y et $\mathcal{L}$ un fibré en droite sur Y tels que $\mathcal{O}_Y(B) = \mathcal{L}^2$. On désigne par L l'espace total de $\mathcal{L}$ et par $p : L \to Y$ la projection du fibré sur sa base. Étant donnés une section $s \in \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y(B))$ qui s'annule exactement le long de B et la section tautologique $t \in \Gamma(L, p^*\mathcal{L})$, alors la solution de $p^*s - t^2 = 0$ définit un sous-espace analytique X de L. La projection $p|_X : X \to Y$ est un revêtement ramifié d'ordre 2 le long de B. À présent les relèvements p^*g, $p^*\omega$ produisent une structure hyperkählérienne dégénérée, du type qu'on voulait, sur X.

Pour voir que cet exemple est comme ce qui est décrit dans la définition précédante il suffit de choisir des coordonnées (Z, W) dans un voisinage d'un point sur B telles que B se décrive par $Z = 0$ et que les directions ∂_Z et $\bar\partial_Z$ soient perpendiculaires à B par rapport à la métrique de Calabi–Yau fixée au départ. Il y a alors des coordonnées (z, w) sur X telles que $\pi(z, w) = (z^2, w)$. En effet le modèle local de X est $Z = z^2$ dans $\mathbb{C}^3$ avec des coordonnées (Z, W, z) et on projette sur (Z, W). L'orthogonalité de $(\partial_Z, \bar\partial_Z)$ avec $T(B)$ assure que $J_1(\partial_W|_B) = (a\partial_Z|_B + b\bar\partial_Z|_B)$. En changeant la structure conforme sur B on a W' tel que $J_1(\partial_{W'}|_B) = \bar\partial_Z|_B$.

Théorie de Hodge dégénérée : Afin de développer les éléments d'une théorie de Hodge pour les surfaces définies ci-dessus, on décrit d'abord l'espace des formes différentielles singulière pertinentes. Soit X une surface complexe dégénérée au sens de la définition précédente. Avec les mêmes notations on note $V := \pi\phi(U)$ et on désigne par $A^k(U)$ l'ensemble des sections C^∞ du fibré $\phi^*\pi^*\Lambda^p(T^*V)$.

Définition 2. $A^k(X) \subset \Omega^k(X)$ est l'ensemble des formes différentielles lisses, dont la restriction à chaque voisinage U d'un point sur Σ_0 appartient à $A^k(U)$. On note

$$A^{p,q}(X) = A^{p+q}(X) \cap A^{p,q}(X \setminus \Sigma_0)$$

et pour un élément $\theta \in A^{p,q}(X)$ on définit $\|\theta\|'_\infty := \sup_{x\in X} \|\theta(x)\|_{g'}$.

Les sous-espaces des (p, q)-formes bornées

$$B^{p,q}(X) = \left\{\theta \in A^{p,q}(X) \text{ t.q. } \|\theta\|'_\infty < \infty \text{ et } \|\bar\partial_{J'}\theta\|'_\infty < \infty\right\}$$

constituent un complexe de $\bar\partial_{J'}$:

$$\cdots \to B^{p,q-1} \xrightarrow{\bar\partial_{J'}} B^{p,q} \xrightarrow{\bar\partial_{J'}} B^{p,q+1} \to \cdots. \tag{1}$$

On désigne la cohomologie associée à ce complexe par $H_B^{p,q}(X)$. La métrique dégénérée g' induit une forme de volume dégénérée $\Phi_{g'}$ qui possède un zéro d'ordre deux le long de la surface Σ_0. Alors pour $\alpha, \beta \in A^{p,q}$, on peut considérer le produit scalaire suivant :

$$(\alpha, \beta)'_2 = \int_X (\alpha, \beta)_{g'} \Phi_{g'}.$$

De même l'opérateur $*$ se défini par la relation :

$$(\psi,\eta)_{g'}\Phi_{g'} = \psi \wedge *\eta, \quad \forall \psi \in A^{p,q}. \tag{2}$$

On vérifie que $*$ envoie $A^{p,q}(U)$ dans $A^{n-p,n-q}(U)$. Ainsi l'opérateur $\bar{\partial}^*_{J'}$, adjoint de $\bar{\partial}'_J$ pour la métrique $(,)'_2$, satisfait à : $\bar{\partial}^*_{J'} = - * \bar{\partial}_{J'} *$.

L'opérateur elliptique dégénéré associé à $\bar{\partial}_{J'}$, agit sur un espace de Sobolev pondéré des (p,q)-formes singulières désigné par $H^{p,q}_{2,s,1}$. Cet espace se constitue des (p,q)-formes à coefficient dans un espace de Hilbert $H_{(2,s,1)}$, introduit dans [3] et [4]. L'idée de sa définition consiste à considérer des distributions $u(w,z)$ sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ telles que les dérivées $D^\alpha_z \tilde{u}(\xi,z)$, $|\alpha| \leqslant 2$ soient des fonctions L^1_{loc} et que la norme suivante soit finie :

$$\|u\|_{(2,s,1)} := \left(\sum_{|\alpha|\leqslant 2} \int \left\| \left(1+|\xi|^{1/2}+|\xi||z|\right)^{2-|\alpha|} D^\alpha_z \tilde{u}(\xi,z) \right\|^2 \left(1+|\xi|^2\right)^s \mathrm{d}\xi \right)^{1/2}$$

où $\tilde{u}(\xi,z)$ est la transformée de Fourier de $u(w,z)$ en w et $\|v(z)\|$ est la norme dans $L_2(\mathbb{R}^2_z)$.

Soit f une fonction C^∞ réelle nulle transverslement d'ordre un sur Σ_0 et $\rho := |f|$. Introduisons aussi l'espace de Sobolev $H^{p,q}_{g'}$, la complétion de $B^{p,q}$ pour le produit scalaire :

$$(\alpha,\beta)_2 = \int_X (\alpha,\beta)_{g'}\Phi$$

où $\Phi = 1/\rho^2 \Phi_{g'}$ est une forme de volume non-dégénérée. Alors pour l'opérateur elliptique dégénérée, $P := \rho^2 \Delta_{g'}$ on peut montrer :

Proposition 1. *L'opérateur $P : H^{(p,q)}_{(2,0,1)} \to H^{(p,q)}_{g'}$ est Fredholm, hypoelliptique et auto-adjoint sur $B^{p,q}$.*

Il s'ensuit que l'ensemble des (p,q)-formes que l'on appelle spéciales harmoniques

$$\mathcal{H}^{p,q}(X) = \left\{ \alpha \in H^{p,q}_{g'} \mid \Delta_{g'}\alpha = 0 \right\}$$

est un espace vectoriel de dimension finie. Si $\mathcal{H}$ désigne la projection orthogonale avec la métrique $(,)'_2$ sur $\mathcal{H}^{p,q}$, alors on obtient :

Théorème 1. *Pour la cohomologie $H^{p,q}_B(X)$ du complexe* (1) *on a*

(a) $$H^{p,q}_B(X) \cong \mathcal{H}^{p,q}(X) \tag{3}$$
donc c'est un espace de dimension finie.

(b) *La projection orthogonale*

$$\mathcal{H} : B^{p,q}(X) \to \mathcal{H}^{p,q}(X)$$

est bien définie et il existe un opérateur de Green $G : B^{p,q}(X) \to B^{p,q}(X)$ tel que :

$$\mathrm{Id} = \mathcal{H} + \Delta_{g'} G$$

avec $G(\mathcal{H}^{p,q}(X)) = 0$, $\bar{\partial}G = G\bar{\partial}$, $\bar{\partial}^* G = G\bar{\partial}^*$.

(c) *L'opérateur $*$ de la métrique g' réalise un isomorphisme*

$$H^{p,q}_B(X) \xrightarrow{\cong} H^{n-p,n-q}_B(X).$$

Théorème 2 *(lemme de Dolbeault dégénéré). Soit U ouvert de $\mathbb{R}^4$ muni d'une structure complexe dégénérée J' comme dans le modèle locale, et $\alpha^{p,q} \in B^{p,q}(U)$. Si $\bar{\partial}_{J'}\alpha = 0$ alors il existe près de chaque point de U une forme C^∞, β et une forme holomorphe ξ telles que $\alpha = \bar{\partial}_{J'}\beta + \xi$.*

Remarque. En appliquant des techniques similaires on peut obtenir aussi une généralisation du Théorème 1 aux dimensions supérieur à 2.

Remerciements

Je tiens à remercier ici mon directeur de thèse Prof. D.Bennequin pour son aide et ses encouragements.

Références

[1] A. Bahraini, Super-symétrie et géométrie complexe, Thèse de Doctorat à l'Université Paris 7, 2004.
[2] W. Barth, C. Peters, A. van de Ven, Compact Complex Surfaces, Ergebnisse der Mathematik, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
[3] V.V. Grusin, A certain class of elliptic pseudodifferential operators degenerate on a submanifold, Mat. Sb. (N.S.) 84 (126) (1971) 163–195.
[4] V.V. Grusin, A certain class of hypoelliptic operators, Mat. Sb. (N.S.) 83 (125) (1970) 456–473.