Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007) 343–347

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Problèmes mathématiques de la mécanique

Modélisation de films courbés non simples de second gradient

Giuliano Gargiulo [a], Elvira Zappale [b], Hamdi Zorgati [c]

[a] *Dipartimento di Scienze biologiche ed ambientali, Universita' degli Studi del Sannio, 82100 Benevento, Italie*
[b] *DIIMA, Università degli Studi di Salerno, via Ponte Don Melillo, 84084 Fisciano, Italie*
[c] *Faculté des Sciences de Tunis, Campus Universitaire, 2092 Tunis, Tunisie*

Reçu le 3 novembre 2006 ; accepté après révision le 16 janvier 2007

Présenté par Philippe G. Ciarlet

Résumé

Le comportement d'un film courbé mince composé d'un matériau non simple de second gradient est décrit par une énergie interne non convexe dépendant des dérivées secondes de la déformation. On démontre en utilisant des arguments de Γ-convergence, que lorsque l'épaisseur du film tend vers zéro, les quasiminimiseurs de l'énergie tridimensionnelle convergent vers les minimiseurs d'une énergie dépendant d'une déformation bidimensionnelle et d'un vecteur de Cosserat. Une partie de la densité d'énergie est obtenue par des arguments de $\mathcal{A}$-quasiconvexification. ***Pour citer cet article : G. Gargiulo et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***

Abstract

Curved nonsimple grade-two thin films. The behavior of a curved thin film made of a nonsimple grade two material is described by a nonconvex bulk energy depending on the first and second order derivatives of the deformation. We show using Γ-convergence arguments that the quasiminimizers of the three-dimensional energy converge, when the thickness of the curved film vanishes, to the minimizers of an energy which is a function of a two-dimensional deformation and of a Cosserat vector. Part of the energy density is obtained by $\mathcal{A}$-quasiconvexification arguments. ***To cite this article: G. Gargiulo et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***

Abridged English version

Much interest has been devoted to martensitic thin structures and nonsimple grade two materials because of their many applications in micromachines and actuators and because these models take into account the microstructure. We consider in this work a curved thin film made of a nonsimple grade two material (see [1,11,12,3] and the large bibliography contained therein), whose non convex energy depends on the first and second order derivatives of the deformation. The thin film occupies an open domain of the form

Adresses e-mail : gargiulo@diima.unisa.it (G. Gargiulo), zappale@diima.unisa.it (E. Zappale), zorgati@ann.jussieu.fr (H. Zorgati).

1631-073X/$ – see front matter © 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2007.01.018

$$\widetilde{\Omega}_h = \left\{ x \in \mathbb{R}^3,\ \exists \tilde{x} \in \widetilde{S},\ x = \tilde{x} + \eta \tilde{n}(\tilde{x}) \text{ with } \frac{-h}{2} < \eta < \frac{h}{2} \right\}, \tag{1}$$

where $\widetilde{S}$ is the curved midsurface of the film, $\tilde{n}(\tilde{x})$ is the unit vector normal to $\widetilde{S}$ at point $\tilde{x}$, and h is the thickness of the film.

The behavior of the thin film undergoing a deformation $\tilde{\varphi}$ is described by the bulk energy $\tilde{e}^h$ below:

$$\tilde{e}^h(\tilde{\varphi}) = \int_{\widetilde{\Omega}_h} W_1(\nabla \tilde{\varphi}) + W\left(\nabla^2 \tilde{\varphi}\right) \mathrm{d}x, \tag{2}$$

where W_1 represents the elastic energy density and W the grade two energy density satisfying standard growth and coercivity hypotheses and a Lipschitz type continuity assumption, $\nabla \tilde{\varphi}$ is the gradient of the deformation and $\nabla^2 \tilde{\varphi}$ is the $3 \times 3 \times 3$ tensor of its second derivatives.

In this Note, we analyze the asymptotic behavior of the total energy and its quasiminimizers over a set of admissible deformations $\widetilde{V}$ of the form

$$\widetilde{V} = \left\{ \tilde{\varphi} \in W^{2,p}\left(\widetilde{\Omega}_h; \mathbb{R}^3\right),\ \tilde{\varphi}(\tilde{x}) = \tilde{x} \text{ on } \widetilde{\Gamma}_h \right\}, \tag{3}$$

when the thickness of the film h goes to zero, where $\widetilde{\Gamma}_h = \partial\omega \times (\frac{-h}{2}, \frac{h}{2})$ represents the lateral surface of $\widetilde{\Omega}_h$.

We begin the study by rescaling the energy in order to perform our analysis on a domain independent of the thickness h. Then, we study the behavior of the quasiminimizers of the energy when the thickness vanishes. We show, using Γ-convergence arguments, that the quasiminizers of the rescaled energy converge to the minimizers of an energy depending on a two-dimensional deformation and on one Cosserat vector field.

It is worthwhile mentioning that even when there is no convexity hypothesis on the 3D energy density W, the 2D limit-integrand ensures lower semicontinuity of the limit energy, in fact, the 2D energy density is $\mathcal{A}$-quasiconvex (see [4,2] for general lower semicontinuity and relaxation results, [10] for explicit formulation of the operator $\mathcal{A}$ in the framework of grade two materials for flat films and [5] where the Young measures underlying the operator $\mathcal{A}$ are derived via asymptotic analysis from suitable Young measures in the 3D sample), in agreement with the first order case considered by [6,7].

1. Préliminaires

Les matériaux de second gradient sont décrits par des énergies dépendant du tenseur de dérivées secondes de la déformation. Ce type d'énergies est utilisé soit pour les matériaux présentant plusieurs phases (voir [8,9]), où l'on considère un terme quadratique en dérivées secondes, soit en mécanique des solides pour la simulation des bandes de cisaillement. Dans ce travail, on considère un film courbé mince composé d'un matériau non simple de second gradient, d'épaisseur h occupant le domaine $\widetilde{\Omega}_h$ défini dans (1), où $\widetilde{S}$ est la surface moyenne de $\widetilde{\Omega}_h$, une sous-variété bidimensionnelle de classe C^3 de $\mathbb{R}^3$ admettant un atlas comportant une seule carte ψ. Cette carte est un C^3-difféomorphisme. Elle envoie un ouvert borné ω inclus dans $\mathbb{R}^2$ de frontière lipschitzienne sur $\widetilde{S}$, $\tilde{n}(\tilde{x}) = a_3(\psi^{-1}(\tilde{x}))$ est le vecteur normal à $\widetilde{S}$ au point $\tilde{x}$ et a_3 est le troisième vecteur de la base covariante associée à la carte ψ. On considère ensuite le domaine plan Ω_h défini par

$$\Omega_h = \left\{ x \in \mathbb{R}^3,\ x = (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2) \in \omega, \frac{-h}{2} < x_3 < \frac{h}{2} \right\}. \tag{4}$$

Ce domaine est l'image réciproque de $\widetilde{\Omega}_h$ par le C^3-difféomorphisme Ψ défini sur Ω_h par $\Psi(x_1, x_2, x_3) = \psi(x_1, x_2) + x_3 a_3(x_1, x_2)$. Les états d'équilibre du film mince subissant une déformation $\tilde{\varphi}$ sont les minimiseurs de l'énergie $\tilde{e}^h$ définie dans (2), sur l'ensemble des déformations admissibles $\widetilde{V}$ défini dans (3), où $\nabla \tilde{\varphi}$ est le gradient de la déformation, $\nabla^2 \tilde{\varphi}$ est le tenseur $3 \times 3 \times 3$ de ses dérivées secondes.

Soit M_{33} l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3. On note par M_{33}^0 l'ensemble des matrices d'ordre 3 dont la troisième colonne est nulle. Soit $\mathrm{Sym}(M_{333})$ l'ensemble des tenseurs $3 \times 3 \times 3$ vérifiants $P := p_{ijk} = p_{ikj} =: P^T$, $i, j, k = 1, 2, 3$ et on note par $\mathrm{Sym}(M_{333}^0)$ le sous ensemble des tenseurs P de $\mathrm{Sym}(M_{333})$ vérifiant $p_{ijk} = 0$ si $j = 3$ ou $k = 3$ (voir [9]). Soit $W_1 : M_{33} \to \mathbb{R}$ la densité continue d'énergie élastique vérifiant les propriétés de croissance et coercivité suivantes : Il existe $c_1, c_2 > 0$ tels que $\forall A \in M_{33}$ on a

$$c_1\left(|A|^2 - 1\right) \leqslant W_1(A) \leqslant c_2\left(|A|^q + 1\right) \quad \text{avec } 2 \leqslant q < 6$$

et $W:\mathrm{Sym}(M_{333})\to\mathbb{R}$ la densité d'énergie de second gradient vérifiant les propriétés de croissance et de coercivité suivantes : $\exists p\in\,]1,+\infty[$, $\alpha, C,\gamma>0$ et $\beta\geqslant 0$ tels que $\forall H, H'\in\mathrm{Sym}(M_{333})$,

$$\begin{cases} |W(H)|\leqslant\gamma(1+\|H\|^p),\\ W(H)\geqslant\alpha\|H\|^p-\beta,\\ |W(H)-W(H')|\leqslant C(1+\|H\|^{p-1}+\|H'\|^{p-1})\|H-H'\|.\end{cases}\tag{5}$$

On remarque que la troisième hypothèse dans (5) est assez naturelle, puisqu'elle est vérifiée si W est $\mathcal{A}$-quasiconvexe suivant un opérateur $\mathcal{A}$ convenable (voir [10]). D'autre part, supposer que la fonction W est $\mathcal{A}$-quasiconvexe est nécessaire et suffisant pour avoir la semicontinuité inférieure de la fonctionnelle d'énergie 3D dans (2). Dans notre cas, on ne suppose pas la densité W $\mathcal{A}$-quasiconvexe. On s'intéresse au comportement asymptotique de l'énergie $\tilde{e}^h$ ainsi que celui de ses éventuels minimiseurs sur l'ensemble des déformations admissibles $\widetilde{V}$ lorsque l'épaisseur du film mince tend vers zéro. Tout d'abord, on procède à un changement d'échelle afin de travailler sur un domaine indépendant de l'épaisseur h (voir [7]). En posant pour tout $x\in\Omega_1$, $\varphi(x)=\tilde{\varphi}(\Psi(x_1,x_2,hx_3))$ et $e(h)(\varphi):=\frac{1}{h}\tilde{e}^h(\tilde{\varphi})$, on obtient suivant la même démarche que [8]

$$\begin{aligned} e(h)(\varphi)=\int_{\Omega_1} W\Bigg[\bigg(\bigg(\nabla_p^2\varphi+\frac{1}{h}(e_3\otimes\nabla_p\varphi_{,3}+\nabla_p\varphi_{,3}\otimes e_3)+\frac{1}{h^2}\varphi_{,33}\otimes e_3\otimes e_3\bigg)\overline{\otimes}A_h\bigg)^{\mathrm{T}}\overline{\otimes}A_h\\ +\bigg[\nabla_p\varphi+\frac{1}{h}\varphi_{,3}\otimes e_3\bigg]\overline{\otimes}B_h)\Bigg]+W_1\bigg[\bigg(\nabla_p\varphi+\frac{1}{h}\varphi_{,3}\otimes e_3\bigg)A_h\bigg]d_h(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

où $\varphi_{,i}$, $\varphi_{,ij}$ désignent respectivement la dérivée première par rapport à la $i$ème variable et la dérivée seconde par rapport à la $i$ème et $j$ème variable de φ, et où l'on a posé $d_h(x)=\det\nabla\Psi(x_1,x_2,hx_3)$, $A_h(x)=\nabla\Psi^{-1}(\Psi(x_1,x_2,hx_3))$ et $B_h(x)=\nabla^2\Psi^{-1}(\Psi(x_1,x_2,hx_3)$. On a aussi utilisé les notations $\nabla_p\varphi=\varphi_{,\alpha}\otimes e_\alpha$ et $\nabla_p^2\varphi=\varphi_{,\alpha\beta}\otimes e_\alpha\otimes e_\beta$. Enfin, pour deux tenseurs P et Q d'ordres p et q, $P\overline{\otimes}Q$ désigne le produit tensoriel contracté de P et Q (voir [9]). Le problème de minimisation devient : trouver $\varphi(h)\in V_h$ vérifiant

$$e(h)\big(\varphi(h)\big)=\min_{\varphi\in V_h}e(h)(\varphi),\tag{6}$$

avec $V_h=\{\varphi\in W^{2,p}(\Omega_1;\mathbb{R}^3);\ \varphi(x)=\Psi(x_1,x_2,hx_3)$ sur $\partial\omega\times(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\}$ où $\partial\omega$ désigne la frontière de ω. Pour toute fonction Borelienne $f:\mathrm{Sym}(M^0_{333})\times M^0_{33}\to\mathbb{R}$, on désignera par $\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}f$ la $\mathcal{A}$-quasiconvexification de f rattachée à l'opérateur différentiel $\mathcal{A}$ (i.e. la quasiconvexification de f avec des fonctions test dans le noyeau de l'opérateur $\mathcal{A}$ (voir [4] et [2] pour les notations générales et les résultats obtenus à ce sujet, [10,5] pour les détails et les propriétés de l'opérateur $\mathcal{A}$ suivant)) défini sur $\mathrm{Sym}(M^0_{333})\times M^0_{33}$ par $\mathcal{A}(\zeta,\xi)=(\mathcal{A}_2\zeta,\mathcal{A}_1\xi)$ avec

$$\mathcal{A}_2\zeta=(\zeta_{ij1,2}-\zeta_{ij2,1})_{i=1,2,3,\ j=1,2}\quad\text{et}\quad\mathcal{A}_1\xi=(\xi_{i1,2}-\xi_{i2,1})_{i=1,2,3}.$$

On peut facilement vérifier (voir [5]) que

$$\bigg\{\zeta\in C^\infty\big(Q_3;\mathrm{Sym}\big(M^0_{333}\big)\big):\ \mathcal{A}_2\zeta=0,\int_{Q_2}\zeta\,\mathrm{d}x=0\bigg\}=\big\{\nabla_p^2u:\ u\in C^\infty_{\mathrm{per}}\big(Q_2,\mathbb{R}^3\big)\big\},$$

où Q_2 désigne le carré $]0,1[^2$ et

$$\bigg\{\xi\in C^\infty\big(Q_2,M^0_{33}\big):\ \mathcal{A}_1\xi=0,\int_{Q_2}\xi\,\mathrm{d}x=0\bigg\}=\big\{\nabla_pv:\ v\in C^\infty_{\mathrm{per}}\big(Q_2,\mathbb{R}^3\big)\big\}.$$

On peut donc écrire (voir [4] et [2]) :

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}f(\varphi)&:=\inf\bigg\{\int_{Q_2}f\big(\varphi+w(x)\big)\,\mathrm{d}x:\ w\in C^\infty_{\mathrm{per}}\big(Q_2;\mathrm{Sym}\big(M^0_{333}\big)\times M^0_{33}\big)\cap\mathrm{Ker}\mathcal{A},\int_{Q_2}w(y)\,\mathrm{d}y=0\bigg\}\\ &=\inf\bigg\{\int_{Q_2}f\big(\varphi+\big(\nabla_p^2u,\nabla_pv\big)\big)\,\mathrm{d}x:\ u,v\in C^\infty_{\mathrm{per}}\big(Q_2;\mathbb{R}^3\big)\bigg\}.\end{aligned}\tag{7}$$

On vérifie que $\mathcal{A}$ est un opérateur de rang constant comme l'éxige la notion de $\mathcal{A}$-quasiconvexification dans [4] (voir [4] pour des propriétés générales et [10,5] pour notre opérateur particulier).

2. Résultats principaux

On obtient tout d'abord un lemme sur les déformations à énergie bornée :

Lemme 2.1. *Soit $\varphi_h \in L^p(\Omega_1;\mathbb{R}^3)$ une suite vérifiant $e(h)(\varphi_h) \leqslant c$ avec c une constante positive. Il existe alors $(\varphi^0,\bar{b},\bar{c}) \in V_0$ tels que pour une sous-suite de φ_h (encore notée φ_h) on a*

$$\begin{cases} \varphi_h \rightharpoonup \varphi^0 & \text{dans } W^{2,p}\big(\Omega_1;\mathbb{R}^3\big) \quad \text{faible}, \\ \dfrac{1}{h}\varphi_{h,3} \rightharpoonup \bar{b} & \text{dans } W^{1,p}\big(\Omega_1;\mathbb{R}^3\big) \quad \text{faible}, \\ \dfrac{1}{h^2}\varphi_{h,33} \rightharpoonup \bar{c} & \text{dans } L^p\big(\Omega_1;\mathbb{R}^3\big) \quad \text{faible} \end{cases} \tag{8}$$

avec

$$V_0 = \Big\{(\varphi,b,c) \in W^{2,p}\big(\Omega_1;\mathbb{R}^3\big) \times W^{1,p}\big(\Omega_1;\mathbb{R}^3\big) \times L^p\big(\Omega_1;\mathbb{R}^3\big) \text{ vérifiant}$$
$$\varphi_{,3} = 0,\ b_{,3} = 0 \text{ et } \varphi(x) = \Psi(x_1,x_2,0),\ b(x) = a_3(x_1,x_2) \text{ sur } \partial\omega \times \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\Big\}.$$

On définit ensuite $W_0 : \overline{\omega} \times M^0_{33} \times \mathbb{R}^3 \times \mathrm{Sym}(M^0_{333}) \times M^0_{33} \to \mathbb{R}$ par

$$W_0(x,\overline{F},z,K,\xi) := \inf_{c\in\mathbb{R}^3} W\big[\big(\big(K + (e_3\otimes\xi + \xi\otimes e_3) + c\otimes e_3\otimes e_3\big)\,\overline{\otimes}\,A_0\big)^{\mathrm{T}}\,\overline{\otimes}\,A_0 + [\overline{F} + z\otimes e_3]\,\overline{\otimes}\,B_0\big]. \tag{9}$$

On rappelle que $A_0(x) = \nabla\Psi^{-1}(\Psi(x_1,x_2,0))$ et $B_0(x) = \nabla^2\Psi^{-1}(\Psi(x_1,x_2,0))$. D'autre part, on pose (voir (7))

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}W_0(x,\overline{F},z,K,\xi) := \inf\Big\{\int_{Q_2} W_0\big(x,\overline{F},z,K + \nabla^2_p u, \xi + \nabla_p v\big):\ u,v \in C^\infty_{\mathrm{per}}\big(Q_2;\mathbb{R}^3\big)\Big\}.$$

Après prolongement de l'énergie $e(h)$ sur $L^p(\Omega_1;\mathbb{R}^3)$ tout entier, on passe au calcul de sa Γ-limite. Celui-ci est précédé d'un dédoublement de variables (voir [8,9]) et est effectué en deux étapes ; une première établissant la borne supérieure et une deuxième pour la borne inférieure. En utilisant ensuite les arguments standard de la Γ-convergence, on obtient le corollaire suivant donnant le modèle limite plan :

Corollaire 2.2. *Toute sous-suite diagonale minimisante $\varphi(h)$ de $e(h)$ sur V_h vérifie*

$$\begin{cases} \varphi_h \rightharpoonup \varphi^0 & \text{dans } W^{2,p}\big(\Omega_1;\mathbb{R}^3\big) \quad \text{faible}, \\ \dfrac{1}{h}\varphi_{h,3} \rightharpoonup \bar{b} & \text{dans } W^{1,p}\big(\Omega_1;\mathbb{R}^3\big) \quad \text{faible}, \\ \dfrac{1}{h^2}\varphi_{h,33} \rightharpoonup \bar{c} & \text{dans } L^p\big(\Omega_1;\mathbb{R}^3\big) \quad \text{faible} \end{cases} \tag{10}$$

avec $(\varphi^0,\bar{b},\bar{c}) \in V_0$ tel que $(\varphi^0,\bar{b})$ minimise l'énergie limite

$$e(0)(\varphi,b) := 2\int_\omega W_1\big[(\nabla_p\varphi + b\otimes e_3)A_0\big] + \mathcal{Q}_{\mathcal{A}}W_0\big(x,\nabla_p\varphi,b,\nabla^2_p\varphi,\nabla_p b\big)\,d_0(x)\,\mathrm{d}x.$$

Un changement de variables inverse nous permet d'obtenir le modèle limite écrit sur la surface courbée $\widetilde{S}$, soulignant ainsi le caractère intrinsèque du problème limite de minimisation. Suivant la même démarche que dans [7], on considère pour tout vecteur unitaire e de S^2, un ouvert borné $O_e \subset e^\perp$ et on note par π_e la projection orthogonale sur ce domaine. On prolonge toute fonction $\chi \in C^\infty_{\mathrm{per}}(O_e;\mathbb{R}^3)$ en posant $\chi_e(y) = \chi(\pi_e(y))$ et on définit pour tout

$y \in O_e$, $D_{e^\perp}\chi(y) = \nabla\chi_e(y)$ et $D^2_{e^\perp}\chi(y) = \nabla^2\chi_e(y)$. Ensuite on pose pour tout $\tilde{x} \in \widetilde{S}$, $x = \psi^{-1}(\tilde{x})$, $\tilde{\varphi}(\tilde{x}) = \varphi(x)$, $\tilde{b}(\tilde{x}) = \bar{b}(x)$, $\tilde{e}(\tilde{\varphi}, \tilde{b}) := e(0)(\varphi, \bar{b})$ et

$$\widetilde{V}_0 = \big\{(\tilde{\phi}, \tilde{b}) \in W^{2,p}\big(\widetilde{S}; \mathbb{R}^3\big) \times W^{1,p}\big(\widetilde{S}; \mathbb{R}^3\big) \text{ tels que } \tilde{\phi}(\tilde{x}) = \tilde{x}, \tilde{b}(\tilde{x}) = \tilde{n}(\tilde{x}) \text{ sur } \partial\widetilde{S}\big\}.$$

On obtient la proposition suivante donnant le modèle limite courbé :

Proposition 2.3. *On a*

$$\tilde{e}(\tilde{\varphi}, \tilde{b}) = \int_{\widetilde{S}} W_1\big[\nabla\tilde{\varphi}(\tilde{x}) + \tilde{b} \otimes \tilde{n}(\tilde{x})\big] + W_m\big(\tilde{n}(\tilde{x}), \tilde{\varphi}, \tilde{b}\big)\,\mathrm{d}\tilde{\sigma}$$

avec

$$W_m(e, \tilde{\varphi}, \tilde{b}) = \inf\Bigg\{\int_{Q_e} \inf_{c\in\mathbb{R}^3} W\big[\nabla^2\tilde{\varphi}(\tilde{x}) + D^2_{e^\perp}u + \big(\nabla\tilde{b}(\tilde{x}) + D_{e^\perp}v\big) \otimes e + \big(\big(\nabla\tilde{b}(\tilde{x}) + D_{e^\perp}v\big) \otimes e\big)^{\mathrm{T}}$$
$$+ c \otimes e \otimes e + \tilde{b}(\tilde{x}) \otimes \nabla e\big]\colon u, v \in C^\infty_{\mathrm{per}}\big(Q_e; \mathbb{R}^3\big)\Bigg\}.$$

De plus, $(\tilde{\varphi}, \tilde{b})$ *minimise* $\tilde{e}$ *sur* $\widetilde{V}_0$.

Remerciements

Les auteurs aimeraient remercier Professeur Hervé Le Dret pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail.

Références

[1] K. Bhattacharya, R.D. James, A theory of thin films of martensitic materials with applications to microactuators, J. Mech. Phys. Solids 47 (1999) 531–576.
[2] A. Braides, I. Fonseca, G. Leoni, $\mathcal{A}$-quasiconvexity: relaxation and homogenization, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 5 (2000) 539–577.
[3] M. Ciarletta, D. Iesan, Non-Classical Elastic Solids, Pitman Research Notes in Mathematics Series, vol. 293, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1993.
[4] I. Fonseca, S. Müller, $\mathcal{A}$-quasiconvexity, Lower semicontinuity, and Young measures, SIAM J. Math. Anal. 30 (6) (1999) 1355–1390.
[5] G. Gargiulo, E. Zappale, The energy density of nonsimple materials grade two thin films via a Young measure approach, Boll. UMI. Ser. I, in press.
[6] H. Le Dret, A. Raoult, The nonlinear membrane model as variational limit of nonlinear three-dimensional elasticity, J. Math. Pures Appl. (9) 74 (6) (1995) 549–578.
[7] H. Le Dret, A. Raoult, The membrane shell model in nonlinear elasticity: A variational asymptotic derivation, J. Nonlinear Sci. 6 (1996) 59–84.
[8] H. Le Dret, H. Zorgati, Films courbés minces martensitiques, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 339 (2004) 65–69.
[9] H. Le Dret, H. Zorgati, Asymptotic modeling of thin curved martensitic films, Asymptotic Anal. 48 (2006) 141–171.
[10] P.M. Santos, E. Zappale, Second order analysis for thin structures, Nonlinear Anal. 56 (5) (2004) 679–713.
[11] R.A. Toupin, Elastic materials with couple-stresses, Arch. Rational Mech. Anal. 11 (1962) 386–414.
[12] R.A. Toupin, Theories of elasticity with couple stress, Arch. Rational Mech. Anal. 17 (1964) 85–112.