Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007) 287–290
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Combinatoire/Géométrie algébrique

Les arrangements minimaux et maximaux d'hyperplans dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$

François Rodier, Adnen Sboui

CNRS-IML, UMR 6206, 163, avenue de Luminy, case 907, 13288 Marseille cedex 09, France

Reçu le 24 juin 2006 ; accepté après révision le 6 janvier 2007

Disponible sur Internet le 15 février 2007

Présenté par Jean-Pierre Serre

Résumé

Dans cette Note on étudie les arrangements d'hyperplans dans un espace projectif tels que le nombre de points rationnels de la réunion de ces hyperplans soit minimal. Ces résultats ont des applications en théorie des codes. ***Pour citer cet article : F. Rodier, A. Sboui, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***

Abstract

Minimal and maximal arrangements of hyperplanes in $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$. In this Note we study the arrangements of hyperplanes in a projective space such that the number of rational points of the union of these hyperplanes is minimal. These results apply to coding theory. ***To cite this article: F. Rodier, A. Sboui, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***

1. Introduction

J.-P. Serre [7] et indépendamment A.B. Sørensen [8] ont donné une borne supérieure sur le nombre de points d'une hypersurface de degré d de $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$. Cette borne est atteinte par une hypersurface qui est une réunion de d hyperplans se coupant tous en une même sous-variété linéaire de codimension 2. Cet arrangement d'hyperplans, qu'on appelle ici maximal, donne la distance minimale des codes de Reed–Muller projectifs d'ordre d pour $d < q$: $d_{\min} = q^n - (d-1)q^{n-1}$. On peut consulter par exemple l'article de G. Lachaud [4]. Peu de progrès ont été réalisés depuis pour déterminer le spectre des codes de Reed–Muller généralisés projectifs. Citons les articles de J.-P. Cherdieu et R. Rolland [2] et de A. Sboui [5,6], qui déterminent le deuxième et le troisième poids. M. Boguslavsky détermine, lui, le deuxième poids généralisé de ce code [1].

Dans cette Note on présente l'arrangement (dit minimal) de d hyperplans qui nous donne un autre poids de ces codes. On montre que lorsque $q > \frac{d(d-1)}{2}$, le nombre de points de la réunion des d hyperplans formant un arrangement minimal représente une borne supérieure pour le nombre de points d'une hypersurface quelconque de degré d de $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$ qui n'est pas une réunion d'hyperplans.

Adresses e-mail : rodier@iml.univ-mrs.fr (F. Rodier), sboui@iml.univ-mrs.fr (A. Sboui).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2007.01.006

2. Notations

On supposera ici que p est un nombre premier, $q = p^s$ où s est un entier strictement positif et d est un entier compris entre 3 et $q+1$. On note par $\mathbb{F}_q$ un corps fini à q éléments, $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$ l'espace projectif de dimension n sur $\mathbb{F}_q$, $\Pi_n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ le nombre de points rationnels de $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$.

3. Arrangements d'hyperplans

Un arrangement de d hyperplans de $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$ est un ensemble de d hyperplans H_i distincts ; on note $N(\mathrm{A})$ le nombre de points de la réunion des hyperplans appartenant à l'arrangement A. On distingue deux types d'arrangements de d hyperplans de $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$, notés $\mathcal{A}_1^d$ et $\mathcal{A}_2^d$:

(1) Arrangement de type $\mathcal{A}_1^d$: tous les hyperplans contiennent une même sous-variété linéaire de codimension 2 ;
(2) Arrangement de type $\mathcal{A}_2^d$: tous les hyperplans contiennent une même sous-variété linéaire de codimension 3 et les intersections $H_i \cap H_j$ pour $i \neq j$ sont toutes distinctes entre elles.

3.1. Arrangement maximal

On peut déduire le résultat suivant de la lettre de Serre [7] (Théorème et Remarque 2) :

Proposition 3.1.

(i) *Le nombre de points de la réunion des hyperplans appartenant à un arrangement de type $\mathcal{A}_1^d$ est $dq^{n-1} + \Pi_{n-2}$.*
(ii) *Pour un arrangement de d hyperplans* A *qui n'est pas de type $\mathcal{A}_1^d$ on a, pour $d \leqslant q$:*

$$N(\mathrm{A}) < dq^{n-1} + \Pi_{n-2}.$$

3.2. Arrangement minimal

Définissons d'abord la trace d'un arrangement. Soit A un arrangement de d hyperplans H_i dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$.

Définition 3.2. La trace de l'arrangement A sur un hyperplan H distinct des H_i est l'arrangement, noté $\mathrm{tr}_H(\mathrm{A})$, dans l'espace projectif H de dimension $n-1$, formé par les sous-variétés linéaires $H \cap H_i$.

Les arrangements de type $\mathcal{A}_1^d$ et $\mathcal{A}_2^d$ sont liés par la proposition suivante qu'il est facile de démontrer (cf. [6], Proposition 2.3) :

Proposition 3.3. *Les propriétés suivantes sont équivalentes* :

(i) $\mathrm{A} = \{H_1, \ldots, H_d\}$ *est un arrangement de type $\mathcal{A}_2^d$.*
(ii) *Pour chaque $1 \leqslant i \leqslant d$, la trace de l'arrangement* $\mathrm{A} - \{H_i\}$ *sur H_i est un arrangement de type $\mathcal{A}_1^{d-1}$ dans l'hyperplan H_i.*

Le théorème suivant justifie le nom d'arrangement minimal pour les arrangement de type $\mathcal{A}_2^d$:

Théorème 3.4.

(i) *Le nombre de points de la réunion des hyperplans appartenant à un arrangement* A_2 *de type $\mathcal{A}_2^d$ est*

$$dq^{n-1} + \Pi_{n-2} - \frac{(d-1)(d-2)}{2} q^{n-2}.$$

(ii) *Pour tout arrangement de d hyperplans* A*, non de type* $\mathcal{A}_2^d$*, on a*

$$N(\mathrm{A}) > N(\mathrm{A}_2).$$

Démonstration. (i) La formule suivante permet de compter sans répétition les points de la réunion d'hyperplans d'un arrangement $\mathrm{A}_2 = \{H_1, \ldots, H_d\}$:

$$N(\mathrm{A}_2) = \#H_1 + \sum_{j=1}^{d-1} \bigl(\#H_{j+1} - N\bigl(\mathrm{tr}_{H_{j+1}}\{H_1, \ldots, H_j\}\bigr)\bigr). \tag{1}$$

L'arrangement $\{H_1, \ldots, H_{j+1}\}$, étant une partie d'un arrangement d'hyperplans de type $\mathcal{A}_2^d$, est un arrangement du même type. La Proposition 3.3 montre alors que la trace de l'arrangement $\{H_1, \ldots, H_j\}$ sur l'hyperplan H_{j+1} est un arrangement de type $\mathcal{A}_1^j$ dans H_{j+1}.

(ii) On va procéder par récurrence sur d.

Pour $d = 3$, le résultat est clair.

En supposant que le résultat soit vrai pour $d - 1$ prouvons le pour d.

Soit A un arrangement de d hyperplans H_i qui ne soit pas de type $\mathcal{A}_2^d$. D'après la Proposition 3.3, il existe au moins un i_0 compris entre 1 et d, tel que $\mathrm{tr}_{H_{i_0}}(\mathrm{A} - H_{i_0})$ forme un arrangement d'au plus $d - 1$ hyperplans dans H_{i_0}, qui ne soit pas de type $\mathcal{A}_1^{d-1}$. La Proposition 3.1(ii) implique que

$$N\bigl(\mathrm{tr}_{H_{i_0}}(\mathrm{A} - H_{i_0})\bigr) < (d-1)q^{n-2} + \Pi_{n-3}. \tag{2}$$

Le nombre de points de la réunion des hyperplans appartenant à A est tels que :

$$N(\mathrm{A}) = \#\Biggl(\bigcup_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{d} H_i\Biggr) + \#H_{i_0} - N\bigl(\mathrm{tr}_{H_{i_0}}(\mathrm{A} - H_{i_0})\bigr). \tag{3}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$\#\Biggl(\bigcup_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{d} H_i\Biggr) \geqslant (d-1)q^{n-1} + \Pi_{n-2} - \frac{(d-2)(d-3)}{2}q^{n-2}, \tag{4}$$

d'où le résultat. □

3.3. Existence

Par dualité entre espaces projectifs, un arrangement de type $\mathcal{A}_2^d$ dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$ correspond à un ensemble de d points contenus dans un plan dans l'espace projectif dual $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)^\perp$, tel que 3 points ne soient pas alignés, autrement dit un d-arc dans ce plan selon la terminologie de la géométrie des espaces projectifs finis (voir [3]). Un ensemble de d points rationnels d'une conique forme un d-arc pour tout $d \leqslant q + 1$. Par dualité, il provient d'un arrangement de type $\mathcal{A}_2^d$ dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$. En caractéristique impaire, tout ensemble de d droites tangentes à une conique est un arrangement minimal dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$.

On peut prolonger cette construction à $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$: on vérifie facilement qu'étant données une sous-variété linéaire Z de codimension 3 dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$ et un arrangement A de droite de type $\mathcal{A}_2^d$ dans un plan disjoint de Z, tout ensemble de d hyperplans engendrés par Z et par une droite de l'arrangement A est un arrangement minimal pour tout $d \leqslant q+1$.

4. Cas général : les hypersurfaces

On montre qu'il n'existe pas d'hypersurface qui ne soit pas réunion d'hyperplans, et qui ait un nombre de points plus grand qu'un arrangement minimal de d hyperplans, lorsque $q > \frac{d(d-1)}{2}$.

Théorème 4.1. *Soit S une hypersurface définie sur $\mathbb{F}_q$ qui ne soit pas réunion d'hyperplans. Pour $q > \frac{d(d-1)}{2}$ le nombre N de points rationnels de cette hypersurface vérifie*

$$N < dq^{n-1} + \Pi_{n-2} - \frac{(d-1)(d-2)}{2} q^{n-2}.$$

Ce résultat se déduit du lemme suivant :

Lemme 4.2. *Soit S une hypersurface contenant au moins $dq^{n-1} + \Pi_{n-2} - \frac{(d-1)(d-2)}{2} q^{n-2}$ points rationnels, avec $q > \frac{d(d-1)}{2}$. Supposons que S contient un sous-espace linéaire E_m de dimension m avec $0 \leqslant m \leqslant n-2$, alors S contient un sous-espace linéaire E_{m+1} de dimension $m+1$ tel que $E_{m+1} \supset E_m$.*

Démonstration. Le résultat est démontré dans un cadre plus général dans [6], Lemma 4.1. □

Le théorème se montre alors par récurrence sur m. Si S est comme dans le lemme, chaque point P est contenu dans un hyperplan de $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$ qui est contenu dans S. Par conséquent S est réunion d'hyperplans.

On en déduit le résultat suivant sur les codes de Reed–Muller :

Corollaire 4.3. *Si $q > \frac{d(d-1)}{2}$, pour qu'un poids d'un mot d'un code de Reed–Muller d'ordre d sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$ soit inférieur ou égal à $q^n - (d-1)q^{n-1} + \frac{(d-1)(d-2)}{2} q^{n-2}$, il faut et il suffit qu'il soit donné par un arrangement de d hyperplans.*

Références

[1] M. Boguslavsky, On the number of solutions of polynomial systems, Finite Fields Appl. 3 (4) (1997) 287–299.
[2] J.-P. Cherdieu, R. Rolland, On the number of points of some hypersurfaces in $\mathbb{F}_q^n$, Finite Fields Appl. 2 (2) (1996) 214–224.
[3] J.W.P. Hirschfeld, L. Storme, The packing problem in statistics, coding theory and finite projective spaces: update 2001, in: Finite Geometries, in: Developments in Mathematics, vol. 3, Kluwer, Boston, 2001, pp. 201–246.
[4] G. Lachaud, The parameters of projective Reed–Muller codes, Discrete Math. 81 (2) (1990) 217–221.
[5] A. Sboui, Second highest number of points of hypersurfaces in $\mathbb{F}_q^n$, à paraître dans Finite Fields Appl. (2005).
[6] A. Sboui, Special numbers of rational points on hypersurfaces in the n-dimensional projective space over a finite field, soumis au J. Algebraic Geom., novembre 2006, disponible sur Internet à l'adresse http://iml.univ-mrs.fr/editions/preprint2006/preprint2006.html.
[7] J.-P. Serre, Lettre à M. Tsfasman, in : Journées Arithmétiques de Luminy, 17–21 juillet 1989, Astérisque 198–199–200 (1991) 351–353.
[8] A.B. Sørensen, Projective Reed–Muller codes, IEEE Trans. Inform. Theory 37 (6) (1991) 1567–1576.