





COMPTES RENDUS

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007) 259-264

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Probabilités/Systèmes dynamiques

Théorème de Noether stochastique

Jacky Cresson^a, Sébastien Darses^b

^a Université de Pau et des Pays de l'Adour, laboratoire de mathématiques appliquées de Pau, CNRS UMR 5142, 64013 Pau cedex, France ^b LPMA, université Paris 6, case courier 188, 4, place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France

Reçu le 2 novembre 2005 ; accepté après révision le 12 décembre 2006

Présenté par Paul Malliavin

Résumé

Dans le cadre du plongement stochastique des systèmes lagrangiens, on définit un calcul des variations sur les processus. On démontre un théorème de Noether basé sur la notion de suspension stochastique d'un groupe à un paramètre de difféomorphismes. *Pour citer cet article : J. Cresson, S. Darses, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).*© 2007 Publié par Elsevier Masson SAS pour l'Académie des sciences.

Abstract

A stochastic Noether theorem. In the framework of the stochastic embedding of Lagrangian systems, we define a calculus of variations on stochastic processes. We prove a Noether theorem based on stochastic suspensions of one-parameter groups of diffeomorphisms. *To cite this article: J. Cresson, S. Darses, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).*© 2007 Publié par Elsevier Masson SAS pour l'Académie des sciences.

Abridged English version

A natural question arising from the stochastic embedding procedure of Lagrangian systems [3], is to understand what remains from classical first integrals of motion. In this Note, we obtain a stochastic analogue of the Noether theorem.

We begin by introducing a suitable space of stochastic processes Λ^1 (Definition 2.1) on which we can calculate the forward and backward Nelson derivatives D and D_* (Proposition 2.2). From these operators, we define a family of derivatives which extends on stochastic processes the usual differentiation on smooth functions: $\mathcal{D}_{\mu} = \frac{D+D_*}{2} + i\mu\frac{D-D_*}{2}$ where $\mu \in \{0, \pm 1, \pm i\}$. We then give some useful tools for the sequel: a composition theorem (Theorem 2.3) and an integration by part formula (Lemma 2.4).

We develop a stochastic calculus of variation for Lagrangian functionals F_{μ} defined on a subspace Ξ of Λ^1 from a Lagrangian L:

$$F_{\mu} : \left\{ \begin{array}{c} \Xi \subset \Lambda^{1} \longrightarrow \mathbb{C}, \\ X \longmapsto E \left[\int_{0}^{T} L(X_{t}, \mathcal{D}_{\mu}X_{t}) \, \mathrm{d}t \right]. \end{array} \right.$$

Adresses e-mail: jacky.cresson@univ-pau.fr (J. Cresson), sedarses@ccr.jussieu.fr (S. Darses).

A natural notion of critical point is naturally introduced. Notably, a critical process X for F_1 is characterized by a stochastic analog of the Euler–Lagrange equation: $(\partial_x L - \overline{\mathcal{D}}\partial_\nu L)(X_\mu, \mathcal{D}X_\mu) = 0$, $\mu \in (0, T)$ (Theorem 3.2).

We introduce a useful notion of stochastic suspension of a diffeomorphism and we are able to define the notion of stochastic suspension for a one-parameter group of diffeomorphisms (see Definitions 3.3 and 3.4). This notion of stochastic suspension group comes from our framework. It relies on the fact that we want to understand how symmetries of the underlying Lagrangian systems are transported via the stochastic embedding.

We finally discuss the various generalizations of the notion of first integral of motion through the operators \mathcal{D}_{μ} and we analyze their relevance. We distinguish the following special case: $F: A^1 \to C([0, T])$ is a first integral if for a critical point X of F, F(X) is a constant function. Other choices are possible (see [7]). In this framework and for critical processes of F_1 , we can state a stochastic Noether theorem (Theorem 4.5).

1. Introduction

La procédure de plongement stochastique, définie dans [3], permet d'associer à des fonctionnelles et des équations différentielles ordinaires leurs analogues stochastiques. Pour les systèmes lagrangiens, on obtient une dynamique contrôlée par une équation d'Euler–Lagrange stochastique [3]. Que reste-t-il des propriétés de la dynamique initiale? Par exemple, dans le cas déterministe, l'invariance d'un lagrangien par un groupe de symétries induit l'existence d'une intégrale première du mouvement (cf. [1] p. 88) : c'est le contenu du théorème de Noether. Dans cette note, on démontre un analogue stochastique du théorème de Noether. La démonstration repose sur la définition des suspensions stochastiques des groupes à un paramètre de difféomorphismes et d'un calcul des variations sur les processus stochastiques. On définit à cette occasion une notion originale d'intégrale première stochastique.

2. Notations

Soit T > 0 et $d \in \mathbb{N}^*$. Soit L l'ensemble des fonctions mesurables $f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ vérifiant l'hypothèse : il existe une constante K telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$: $\sup_t |f(t, x) - f(t, y)| \le K|x - y|$ et $\sup_t |f(t, x)| \le K(1 + |x|)$.

On se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ qui supporte une famille $(W^{(b,\sigma)})_{(b,\sigma)\in L\times L}$ de mouvements browniens indépendents indexés par L × L. Si $b,\sigma\in L$, on note $\mathcal{P}^{(b,\sigma)}$ la filtration naturelle associée à $W^{(b,\sigma)}$. Soit \mathcal{P} la filtration engendrée par les filtrations $\mathcal{P}^{(b,\sigma)}$ où $(b,\sigma)\in L\times L$, et on note : pout $t\in [0,T]$,

$$\mathcal{P}_t = \bigvee_{(b,\sigma) \in L \times L} \mathcal{P}_t^{(b,\sigma)}.$$

Définition 2.1. On désigne par Λ^1 l'espace des diffusions X satisfaisant les conditions suivantes :

- (i) X est solution sur [0, T] de l'EDS : $dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t^{(b,\sigma)}$, $X_0 = X^0$ où $X^0 \in L^2(\Omega)$ et $(b, \sigma) \in L \times L$,
- (ii) Pour tout $t \in (0, T)$, X_t possède une densité $p_t(\cdot)$,
- (iii) En posant $a^{ij} = (\sigma \sigma^*)^{ij}$, pour tous $i \in \{1, \dots, n\}$, $t_0 > 0$, $\int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_j (a^{ij}(t, x) p_t(x))| dx dt < +\infty$,
- (iv) Pour tous $i, j, t, \frac{\partial_j(a^{ij}(t, \cdot)p_t(\cdot))}{p_t(\cdot)} \in L$.

On note Λ_v^1 la fermeture de $\text{Vect}(\Lambda^1)$ dans $L^1(\Omega \times [0,T])$ muni de la norme usuelle $\|\cdot\| = E \int |\cdot|$.

On sait que le processus retourné de tout élément de Λ^1 est encore une diffusion brownienne conduite par un mouvement brownien $\widehat{W}^{(b,\sigma)}$ (cf. [4]). On note $\widehat{\mathcal{P}}^{(b,\sigma)}$ la filtration naturelle associée à $\widehat{W}^{(b,\sigma)}$. Soit $\widehat{\mathcal{P}}$ la filtration définie par : pout $t \in [0,T]$,

$$\widehat{\mathcal{P}}_t = \bigvee_{(b,\sigma) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}} \widehat{\mathcal{P}}_t^{(b,\sigma)}.$$

Enfin, on considère la filtration \mathcal{F} telle que $\mathcal{F}_t = \widehat{\mathcal{P}}_{T-t}$ pour tout $t \in [0, T]$.

Proposition 2.2 (Définition des dérivées de Nelson). Soit $X^{b,\sigma} \in \Lambda^1$ avec $a^{ij} = (\sigma \sigma^*)^{ij}$ et $a^j = (a^{1j}, \dots, a^{dj})$. Pour tout $t \in (0, T)$, les quantités

$$DX_t := \lim_{h \to 0^+} h^{-1} E[X_{t+h} - X_t \mid \mathcal{P}_t] = b(t, X_t), \tag{1}$$

$$D_*X_t := \lim_{h \to 0^+} h^{-1} E[X_t - X_{t-h} \mid \mathcal{F}_t] = b(t, X_t) - \frac{1}{p_t(X_t)} \partial_j \left(a^j(t, X_t) p_t(X_t) \right)$$
 (2)

existent dans $L^2(\Omega)$.

On note $\Lambda^2=\{X\in\Lambda^1;\,DX,\;D_*X\in\Lambda^1\}$ et Λ^2_v la fermeture de $\mathrm{Vect}(\Lambda^2)$ dans $L^1(\Omega\times[0,T])$. On note \mathcal{D}_μ la dérivée stochastique introduite dans ([3] Lemme 1.2) et définie par $\mathcal{D}=\frac{D+D_*}{2}+\mathrm{i}\mu\frac{D-D_*}{2}$ avec $\mu\in\{0,\pm1,\pm\mathrm{i}\}$. On rapelle que \mathcal{D} est étendu par \mathbb{C} -linéarité aux processus complexes $\Lambda^1_\mathbb{C}:=\Lambda^1\oplus\mathrm{i}\Lambda^1$ et on note $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1$ et $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{D}_{-1}$.

Théorème 2.3. Soit $X^{(b,\sigma)} \in \Lambda^1$, et $f \in C^{1,2}(I \times \mathbb{R}^d)$ telle que $\partial_t f$, ∇f and $\partial_{ij} f$ sont bornées. On obtient

$$\mathcal{D}f(t,X_t) = \left(\partial_t f + \mathcal{D}X_t \cdot \nabla f + \frac{\mathrm{i}}{2} \sum_{k,j} a^{kj} \partial_{kj} f\right)(t,X_t). \tag{3}$$

D'autre part, on généralise avec l'opérateur D, la «loi produit» donnée par Nelson dans [5] p. 80 :

Lemme 2.4. Soit $X, Y \in \Lambda^1_{\mathbb{C}}$. Alors $E[\mathcal{D}X_t \cdot Y_t + X_t \cdot \overline{\mathcal{D}}Y_t] = \frac{d}{dt}E[X_t \cdot Y_t]$.

La démonstration est une conséquence immédiate de la forme de l'opérateur \mathcal{D} et du fait que Λ^1 est un sous-espace de la classe $S(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ ([8] p. 226) pour laquelle W. Zheng et P.-A. Meyer démontrent la loi produit de Nelson (cf. [8] Théorème I.2 p. 227).

3. Calcul des variations stochastique dynamique et relèvement des structures

On définit un calcul des variations à partir de fonctionnelles lagrangiennes définies sur Λ^1 . Il repose sur la dérivée stochastique dynamique D. Le calcul des variations stochastiques de Malliavin quant à lui repose sur une notion de différentiation suivant le paramètre aléatoire $\omega \in \Omega$ (voir [6] p. 24).

On dit qu'un lagrangien L est admissible si la fonction L(x, v) est définie sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{C}^d$, C^1 en x et holomorphe en v, et est réelle quand v est réel. L est dit naturel s'il s'écrit L(x, v) = q(v) - U(x) où q est une forme quadratique sur \mathbb{C}^d et U un potentiel de classe \mathcal{C}^{∞} sur \mathbb{R}^d . La fonctionnelle F_I associée à L est définie à partir du plongement de la fonction lagrangienne L(x(t), x'(t)):

$$F: \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{Z} \subset \Lambda^1 \longrightarrow \mathbb{C}, \\ X \longmapsto E \left[\int_0^T L(X_t, \mathcal{D}X_t) \, \mathrm{d}t \right] \end{array} \right. \tag{4}$$

avec $\mathcal{Z} = \{X \in \Lambda, E[\int_0^T |L(X_t, \mathcal{D}X_t)| \, \mathrm{d}t] < \infty\}.$ On en déduit une notion de différentiabilité liée à F. On appelle Γ -variation de $X \in \Lambda^1$, un processus de la forme X + Z où $Z \in \Gamma$ et on pose $\Gamma_{\Xi} = \{Z \in \Gamma, \ \forall X \in \Xi, Z + X \in \Xi\}.$

Définition 3.1. Si L est un lagrangien admissible et F la fonctionnelle associée, F est dite Γ -différentiable en un processus $X \in \mathcal{Z}$ si pour tout $Z \in \Gamma_{\mathcal{Z}}$, $F_J(X+Z) - F_J(X) = dF_J(X,Z) + R_X(Z)$, où $dF_J(X,Z)$ est une fonctionnelle linéaire en Z et $R_X(Z) = o(\|Z\|)$. De plus, X est dit Γ -critique si pour tout $Z \in \Gamma_{\Xi}$, $dF_J(X, Z) = 0$.

La définition de la dérivée stochastique dynamique contraint l'espace des variations (i.e. $Z \in \Gamma_{\Xi}$). De la même manière, la définition de la dérivée de Malliavin détermine l'espace des variations de Cameron-Martin ([6] p. 25).

Théorème 3.2. Un processus X est Λ^1 -critique pour F_J si et seulement c'est une solution de l'équation

$$(\partial_x L - \overline{\mathcal{D}} \partial_v L)(X_u, \mathcal{D} X_u) = 0$$
 sur I .

On renvoie à ([2] Chapitre 7) pour la démonstration.

Soit Λ^0 (resp. $\Lambda^0_{\mathbb{C}}$) l'ensemble des processus mesurables à valeurs dans \mathbb{R}^d (resp. \mathbb{C}^d), et $C^k(J)$ l'ensemble des fonctions de classe C^k de J dans \mathbb{R}^d , $k \in \mathbb{N}$.

Définition 3.3. Soit $\phi: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ un difféomorphisme. La suspension stochastique de ϕ est l'application $\Phi: \Lambda^0 \to \Lambda^0$ définie par $\forall X \in \Lambda^0$, $\Phi(X)_t(\omega) = \phi(X_t(\omega))$. Dans la suite on notera indifféremment le difféomorphisme et sa suspension. De plus un groupe à un paramètre de transformations $\Phi_s: \Upsilon \to \Upsilon$, $s \in \mathbb{R}$, où $\Upsilon \subset \Lambda^0$, est appelé un groupe ϕ -suspendu agissant sur Υ s'il existe un groupe à un paramètre de difféomorphisme $\phi_s: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $s \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $s \in \mathbb{R}$, Φ_s soit une suspension stochastique de ϕ_s , et pour tout $X \in \Upsilon$, $\Phi_s(X) \in \Upsilon$.

Définition 3.4. Un groupe à un paramètre de difféomorphismes est dit admissible si $\Phi = {\{\phi_s\}_{s \in \mathbb{R}}}$ est un groupe à un paramètre de C^2 -diffeomorphismes sur \mathbb{R}^d tel que $(s, x) \mapsto \partial_x \phi_s(x)$ est de classe C^2 et tel que la formule (3) reste vrai pour toute fonction ϕ_s du groupe.

On étudie le comportement des suspensions par rapport à l'espace Λ^1 . Grâce au lemme de Schwarz et au Théorème 2.3, on montre :

Lemme 3.5. Soit $\Phi = (\phi_s)_{s \in \mathbb{R}}$ une suspension stochastique d'un groupe admissible à un paramètre de difféomorphismes. Alors pour tout $X \in \Lambda^1$, et pour tout $(t, s) \in I \times \mathbb{R}$ l'application $s \mapsto \mathcal{D}(\Phi_s X)_t$ est de classe C^1 p.s. et $\partial_s[\mathcal{D}(\phi_s(X))] = \mathcal{D}[\partial_s\phi_s(X)]$ p.s.

La notion d'invariance par une suspension stochastique est :

Définition 3.6. Soit $\Phi = (\phi_s)_{s \in \mathbb{R}}$ une suspension stochastique d'un groupe admissible à un paramètre de difféomorphismes et $L: \Lambda^1 \to \Lambda^1_{\mathbb{C}}$. La fonctionnelle L est invariante sous Φ si pour tout $s \in \mathbb{R}$ et $X \in \Lambda^1$, $L(\phi_s X, \mathcal{D}(\phi_s(X))) = L(X, \mathcal{D}X)$.

La définition d'invariance utilisée par M. Thieullen et J.-C. Zambrini ([7] p. 313) peut se formuler à l'aide des suspensions stochastiques de groupes à un paramètre de difféomorphismes.

Exemple. On considère le lagrangien étendu du problème des deux corps dans \mathbb{R}^3 , i.e. $\mathcal{L}(x,z) = q(z) - \frac{1}{|x|}$ où pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ et tout $z \in \mathbb{C}^3$, $q(z) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$.

Lemme 3.7. Le lagrangien \mathcal{L} défini sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \times \mathbb{C}^3$ est invariant par la suspension stochastique des rotations $\phi_{\theta,k}$ d'axes e_k (base canonique) et d'angle θ , k = 1, 2, 3.

Démonstration. Comme $\phi_{\theta,k}$ est une matrice dont les coefficients ne dépendent pas de t, on a $\mathcal{D}_{\mu}[\phi_{\theta,k}(X)] = \phi_{\theta,k}[\mathcal{D}_{\mu}X]$ où $\phi_{\theta,k}$ est trivialement étendu à \mathbb{C}^3 . Un calcul simple donne pour tout $z \in \mathbb{C}^3$, $q(\phi_{\theta,k}(z)) = q(z)$. On déduit alors que $\mathcal{L}(\phi_{\theta,k}X,\mathcal{D}(\phi_{\theta,k}X)) = \mathcal{L}(X,\mathcal{D}X)$. \square

4. Notion d'intégrales premières et théorèmes de Noether

Une intégrale première classique pour une solution x d'une EDO est une fonction $F \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ (éventuellement moins régulière) telle que $\frac{d}{dt}F(x(t))=0$, i.e. une constante du mouvement. Dans le cas lagrangien, F est en réalité définie sur le fibré tangent, on peut la voir comme : $F:C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)\to C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$, $x\mapsto F(x(t),\frac{d}{dt}x(t))$. Comment étendre cette notion aux objets stochastiques ? On peut proposer plusieurs types d'extension :

(i)
$$F: \Lambda^1 \to \Lambda^0_{\mathbb{C}}$$
,
(ii) $F: \Lambda^1 \to C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Traitons le cas (i). La première définition naturelle est :

Définition 4.1. Soit X une solution critique d'une équation d'Euler-Lagrange. On dit que $I: \Lambda^1 \to \Lambda^0_{\mathbb{C}}$ est une intégrale première forte pour X si \mathcal{D} Re $(I(X)) = \mathcal{D}$ Im(I(X)) = 0, i.e. I(X) est un processus constant.

Si le système classique possède des intégrales premières f, on peut considérer leurs plongées, et on dit qu'une intégrale première est naturelle si elle est obtenue comme plongée d'une intégrale première classique f. On la note F_f .

Proposition 4.2. Dans le cas non dégénéré (i.e. où (ELS) ne possède pas que des solutions déterministes), les intégrales premières fortes et naturelles sont triviales, i.e. des constantes.

Si on veut conserver la structure d'intégrale première plongée dans le cadre d'une caractérisation via un opérateur «différentiel», on doit alors affaiblir 4.1, et on peut définir dans ce cas plusieurs notions d'intégrales premières relatives aux opérateurs \mathcal{D}_{μ} où $\mu \in \{0, \pm 1, \pm i\}$.

Définition 4.3. Soit X une solution critique d'une équation d'Euler-Lagrange. On dit que $I: \Lambda^1 \to \Lambda^0_{\mathbb{C}}$ est une intégrale première faible de type μ pour X si $\mathcal{D}_{\mu}I(X) = 0$ où $\mu \in \{0, \pm 1, \pm i\}$.

Si I est une intégrale première de type -i et X un point critique d'une équation d'Euler-Lagrange, alors I(X) est en fait une martingale car $\mathcal{D}_{-i} = D$, i.e. un processus conditionnellement constant, ce qui peut encore légitimer l'appelation d'«intégrale première». Les autres extensions $\mu = 0$ et $\mu = 1$ (lorsque I est à valeurs complexes) semblent moins pertinente via-à-vis de la notion d'intégrale première.

Dans le cas où l'équation d'Euler-Lagrange stochastique mixte les opérateurs D et D_* , il semble vain d'obtenir un résultat concernant les extensions $\mu = \pm i$, puisque par exemple $\mathcal{D}_{-i} = D$ et ne fait pas intervenir D_* . Il est alors plus judicieux d'obtenir de tels intégrales premières en plongeant l'équation d'Euler-Lagrange classique uniquement avec l'opérateur D. C'est notamment ce que font Thieullen et Zambrini [7] lorsqu'ils considèrent l'équation D^2X_I $-\nabla U(X_t)$.

Traitons désormais le cas (ii).

Définition 4.4. Soit X une solution critique d'une équation d'Euler-Lagrange. On dit que $I: \Lambda^1 \to C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est une intégrale première pour X si $\frac{d}{dt}I(X)_t = 0$, i.e. $t \mapsto I(X)_t$ est constant.

Cette notion d'intégrale première est en réalité plus forte que celles précédemment données car elle définit des « surfaces de niveau » dans le Banach $L^2(\Omega)$. On peut montrer le

Théorème 4.5 (Noether stochastique). Soit F la fonctionnelle définie sur $\Xi \cap \Lambda^1$ par (4), où L est un lagrangien admissible invariant sous le groupe admissible à un paramètre de difféomorphisme $\Phi = (\phi_s)_{s \in \mathbb{R}}$. Soit $X^0 \in \Xi \cap \Lambda$ un point Λ^1 -critique de F. On pose $Y_t(s) = (\Phi_s X^0)_t$. Alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E \left[\partial_v L(X^0, \mathcal{D}X_t^0) \cdot \frac{\partial Y_t}{\partial s}(0) \right] = 0. \tag{5}$$

Démonstration. On pose $V_t(s) = (Y_t(s), \mathcal{D}Y_t(s))$. Comme L est invariant sous $\Phi = \{\phi_s\}_{s \in \mathbb{R}}$, on a $\frac{\partial}{\partial s}L(V_t(s)) = 0$ (p.s.). Comme pour tout $t \in J$ et tout $\omega \in \Omega$, $Y_t(\cdot)(\omega) \in C^1(\mathbb{R})$ et $\mathcal{D}Y_t(\cdot)(\omega) \in C^1(\mathbb{R})$, on obtient

$$\partial_x L(V_t(s)) \cdot \frac{\partial Y_t}{\partial s} + \partial_v L(V_t(s)) \cdot \frac{\partial \mathcal{D}Y_t}{\partial s} = 0$$
 (p.s.).

En utilisant le Lemme 3.5, cette équation est équivalente à

$$\partial_x L(V_t(s)) \cdot \frac{\partial Y_t}{\partial s} + \partial_v L(V_t(s)) \cdot \mathcal{D}\left(\frac{\partial Y_t}{\partial s}\right) = 0$$
 (p.s.).

Comme $X^0 = Y(0)$ est un point Λ^1 -critique de F_J , on a $\partial_x L(V_t(0)) = \overline{\mathcal{D}}[\partial_v L(V_t(0))]$. On en déduit alors

$$\overline{\mathcal{D}}\left[\partial_v L(V_t(0))\right] \cdot \frac{\partial Y_t}{\partial s}(0) + \partial_v L(V_t(0)) \cdot \mathcal{D}\left(\frac{\partial Y_t}{\partial s}(0)\right) = 0 \quad \text{(p.s.)}.$$

D'où

$$E\left[\overline{\mathcal{D}}\left[\partial_v L\left(V_t(0)\right)\right] \cdot \frac{\partial Y}{\partial s}(0) + \partial_v L\left(V_t(0)\right) \cdot \mathcal{D}\left(\frac{\partial Y_t}{\partial s}(0)\right)\right] = 0.$$

Avec le Lemme 2.4, il vient

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E \left[\partial_v L \left(V_t(0) \right) \cdot \frac{\partial Y_t}{\partial s}(0) \right] = 0. \quad \Box$$

Ce résultat contient le théorème de Noether classique via l'injection $\iota: C^1(J) \to \Lambda^1$ définie par $(\iota x)_t(\omega) := x(t)$ pour tous $x \in C^1(J)$, $t \in \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$.

Références

- [1] V.I. Arnold, Mathematical Methods of Classical Mechanics, second ed., Springer, 1989.
- [2] J. Cresson, S. Darses, Stochastic embedding of dynamical systems, Prépublication de l'I.H.É.S. 06/27, 2006, 87 p.
- [3] J. Cresson, S. Darses, Plongement stochastique des systèmes lagrangiens, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006) 333–336.
- [4] A. Millet, D. Nualart, M. Sanz, Integration by parts and time reversal for diffusion processes, Ann. Probab. 17 (1) (1989) 208–238.
- [5] E. Nelson, Dynamical Theories of Brownian Motion, second ed., Princeton University Press, 2001.
- [6] D. Nualart, The Malliavin Calculus and Related Topics, Springer-Verlag, 1996.
- [7] M. Thieullen, J.C. Zambrini, Probability and quantum symmetries I. The theorem of Noether in Schrödinger's euclidean mechanics, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. 67 (3) (1997) 297–338.
- [8] W.A. Zheng, P.A. Meyer, Quelques résultats de "mécanique stochastique", Séminaire de Probabilités XVIII (1982/83) 223–244.