Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007) 241–246

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Optimal Control/Partial Differential Equations

Global controllability of nonviscous Burgers type equations

Marianne Chapouly

Département de mathématique, bâtiment 425, université Paris-Sud 11, 91405 Orsay cedex, France

Received 23 October 2006; accepted after revision 12 December 2006

Available online 25 January 2007

Presented by Haïm Brezis

Abstract

We are interested in the global controllability of nonviscous Burgers type equations on a bounded interval. We have three controls: two are the boundary values, one is the right member of the equation and is constant with respect to the space variable. It has already been shown that boundary controls are not sufficient to have global controllability in small time. We prove here that the introduction of this new control in the right member of the equation allows us to obtain global controllability, even in small time. ***To cite this article: M. Chapouly, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***

Résumé

Contrôlabilité globale d'équations du type Burgers non visqueuses. On s'intéresse à la contrôlabilité globale d'équations du type Burgers non visqueuses sur un intervalle borné. Nous avons trois contrôles : les deux valeurs au bord et le membre de droite de l'équation, supposé constant par rapport à la variable d'espace. Il a déjà été démontré que des contrôles au bord ne suffisent pas pour obtenir la contrôlabilité globale en temps petit. Nous montrons ici que l'introduction de ce nouveau contrôle dans le membre de droite permet d'avoir contrôlabilité globale pour tout temps. ***Pour citer cet article : M. Chapouly, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***

Version française abrégée

Soient $T, L > 0$. Soit $\alpha \in C^1([0, L])$ telle que $\alpha(x) > 0$ pour tout $x \in [0, L]$. On s'intéresse au système de contrôle suivant, modélisé par une équation du type Burgers non visqueuse,

$$y_t + \alpha(x) y y_x = u(t), \quad (t, x) \in [0, T] \times [0, L]. \tag{1}$$

C'est un système de contrôle où, au temps $t \in [0, T]$, l'état est $y(t, \cdot) \in C^1([0, L])$ et les contrôles sont $y(t, 0)$, $y(t, L)$ et $u(t) \in \mathbb{R}$.

L'objectif de cette Note est de montrer que le système (1) est globalement contrôlable. Plus précisément, on montre le théorème suivant :

E-mail address: Marianne.Chapouly@math.u-psud.fr.

URL: www.math.u-psud.fr/~chapouly/.

1631-073X/$ – see front matter © 2007 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.
doi:10.1016/j.crma.2006.12.016

Théorème 0.1. *Pour tout $T > 0$, pour tout $L > 0$, pour toute fonction $\alpha \in C^1([0, L])$ telle que $\alpha > 0$ sur $[0, L]$, pour toutes fonctions y^0 et $y^1 \in C^1([0, L])$, il existe $y \in C^1([0, T] \times [0, L])$ et il existe $u \in C^0([0, T])$ nulle en 0 et T satisfaisant* (1) *et*

$$y(0, x) = y^0(x), \quad x \in [0, L], \tag{2}$$

$$y(T, x) = y^1(x), \quad x \in [0, L]. \tag{3}$$

Nous commençons par rappeler les principaux résultats antérieurs concernant la contrôlabilité exacte de l'équation de Burgers non visqueuse (i.e. le cas où $\alpha := 1$), dans le cas où $u := 0$:

– dans [1], Fabio Ancona et Andrea Marson décrivent l'ensemble des états atteignables, partant de $y^0 := 0$, pour des lois de conservation scalaires et non linéaires du type $y_t + \{f(y)\}_x = 0$, où f est une fonction de classe C^2 strictement convexe. Ils montrent en particulier que pour l'équation de Burgers non visqueuse, tant que le temps de contrôlabilité est plus petit que L/M (où M est une constante > 0), on n'a pas contrôlabilité exacte à l'état $y^1 := M$.
– dans [8], Thierry Horsin utilise la méthode du retour – introduite et utilisée par Jean-Michel Coron dans [3–5] – pour décrire l'ensemble des états atteignables pour l'équation de Burgers non visqueuse. Il démontre en particulier que tout état final constant $y^1 := M$ peut être atteint, partant de $y^0 := 0$, en un temps $T > L/|M|$, au moyen d'un contrôle par le bord.

L'équation de Burgers non visqueuse est souvent considérée comme l'analogue de l'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles en dimension 1. Or Jean-Michel Coron et Olivier Glass ont démontré respectivement dans [4,5] et dans [6,7] que cette dernière équation est globalement contrôlable. Il peut donc sembler étrange de ne pas obtenir des résultats similaires pour l'équation de Burgers non visqueuse. Comparant alors les équations de Burgers et d'Euler, nous avons pensé que le fait de rajouter un terme de contrôle $u(t)$ dans le membre de droite de l'équation de Burgers pourrait avoir un effet semblable au terme de pression dans l'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles. Il semblerait que ce soit le cas, puisque c'est dans ce contrôle $u(t)$ que réside la principale différence entre ce travail et [1] et [8]. Et de fait, nous obtenons ici des résultats d'une nature différente de celle des travaux antérieurs, puisque nous montrons qu'on a bien contrôlabilité globale d'équations du type Burgers non visqueuses.

Donnons maintenant quelques éléments de la démonstration du Théorème 0.1. (Pour la démonstration complète, voir [2].) Nous nous intéressons d'abord à la contrôlabilité du linéarisé du système de contrôle (1) autour de la solution nulle, à savoir $y_t = u(t)$. Il est clairement non contrôlable.

Faisant à nouveau l'analogie entre l'équation de Burgers non visqueuse et l'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles, nous envisageons d'utiliser la méthode du retour, introduite par Jean-Michel Coron dans [3] et utilisée par ce dernier dans [4,5] et par Olivier Glass dans [6,7] pour montrer des résultats de contrôlabilité globale. Cette méthode consiste à trouver des trajectoires allant de 0 à 0 et ayant un linéarisé contrôlable (ou ayant de « bonnes » propriétés de contrôlabilité autour d'elles). Nous regardons donc le linéarisé du système de contrôle (1) autour d'une trajectoire particulière $(\bar{y}, \bar{u}) = (a, a')$ où $a \in C^\infty([0, T])$ est nulle dans un voisinage de 0 et de T et $a \geqslant 0$ sur $[0, T]$. Ce linéarisé, $y_t + \alpha(x)a(t)y_x = v(t)$, est contrôlable si $\int_0^T a(t)\,\mathrm{d}t > \int_0^L 1/\alpha(x)\,\mathrm{d}x$. Nous avons donc de l'espoir pour la suite.

L'équation (1) étant réversible par rapport au temps, il suffit de voir que l'état $y^1 := 0$ est atteignable.

De plus, le résultat que nous souhaitons obtenir est un résultat de contrôlabilité globale. Il paraît judicieux de s'intéresser pour commencer à la contrôlabilité locale du système (1). D'autant que des changements d'échelles permettent de montrer, *pour ce système*, que la contrôlabilité locale implique la contrôlabilité globale.

Par un évident changement de variables, nous nous ramenons enfin à l'étude de la contrôlabilité du système suivant :

$$y_t + \alpha(x)(a(t) + y)y_x = 0, \quad t \in [0, T],\ x \in [0, L], \tag{4}$$

$$y(0, x) = y^0(x), \quad x \in [0, L], \tag{5}$$

$$y(T, x) = 0, \quad x \in [0, L], \tag{6}$$

où $a \in C^\infty([0, T])$ vérifie les conditions suivantes : a est nulle dans un voisinage de 0 et de T, $a \geqslant 0$ sur $[0, T]$, et $\int_0^T a(s)\,\mathrm{d}s > \int_0^L 1/\alpha(x)\,\mathrm{d}x$.

Nous prouvons la contrôlabilité de ce système grâce au théorème du point fixe de Schauder. En effet, soit

$$\begin{aligned}\mathcal{F}: C^1([0,T]\times[0,L]) &\to C^1\big([0,T]\times[0,L]\big)\\ y &\mapsto z,\end{aligned}\tag{7}$$

où z est une solution de

$$z_t+\alpha(x)\big(a(t)+y\big)z_x=0, \quad t\in[0,T],\ x\in[0,L],\tag{8}$$

$$z(0,x)=y^0(x), \quad x\in[0,L],\tag{9}$$

et sera explicitée ultérieurement. Si z vérifie en outre

$$z(T,\cdot)=0,\tag{10}$$

il devient alors clair qu'un point fixe de $\mathcal{F}$ est solution de (4)–(6).

Pour construire z, nous commençons par prolonger les fonctions y^0 et y en des fonctions $\tilde{y}^0$ et $\tilde{y}$ de classe C^1 et à support compact sur $\mathbb{R}$ et $[0,T]\times\mathbb{R}$ respectivement. La fonction α est, elle, prolongée en une fonction $\tilde{\alpha}$ de classe C^1, bornée et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Le flot $\tilde{\phi}$ associé à l'e.d.o. $\dot{\xi}=\tilde{\alpha}(\xi)(a(t)+\tilde{y}(t,\xi))$ est alors défini sur $[0,T]\times[0,T]\times\mathbb{R}$. Nous pouvons donc définir $z\in C^1([0,T]\times[0,L])$ par

$$z(t,x)=\tilde{y}^0\big(\tilde{\phi}(0,t,x)\big), \quad (t,x)\in[0,T]\times[0,L].\tag{11}$$

La fonction z satisfait bien (8) et (9). Nous montrons après quelques calculs que l'équation (10) est elle aussi satisfaite lorsque $|y|_{C^1([0,T]\times[0,L])}\leqslant R$, où $R>0$ est assez petit.

Enfin, nous prouvons l'existence de deux constantes C et $C_0>0$ telles que pour $|y^0|_{C^1([0,L])}\leqslant C$, l'ensemble $K:=\{y\in B_R;\ \text{pour tout } \rho>0,\ \omega_\rho(y_t)+\omega_\rho(y_x)\leqslant 2C_0\omega_\rho(\tilde{y}^0_x)+\rho+\omega_\rho(\tilde{\alpha}_x)\}$ – où $\omega_\rho(y)$ désigne le module de continuité de y – est convexe, compact et vérifie $\mathcal{F}(K)\subset K$, ce qui nous donne le Théorème 0.1.

1. Introduction

Let T, $L>0$. Let $\alpha\in C^1([0,L])$ be such that $\alpha(x)>0$ for every $x\in[0,L]$. We consider the nonviscous Burgers type control system (1). This is a control system, where, at time $t\in[0,T]$, the state is $y(t,\cdot)\in C^1([0,L])$ and the controls are $y(t,0)$, $y(t,L)$ and $u(t)\in\mathbb{R}$.

To begin with, let us recall some results concerning the exact controllability of the nonviscous Burgers equation (i.e. $\alpha:=1$) when $u:=0$. Two works must be pointed out:

– in [1], Fabio Ancona and Andrea Marson describe the attainable set for general scalar nonlinear conservation laws of the type $y_t+\{f(y)\}_x=0$, when starting from a null initial data and where f is a strictly convex function of class C^2. In particular, they show that for the nonviscous Burgers equation, as long as the controllability time is lower than L/M ($M>0$ constant), we do not have exact controllability to the state $y^1:=M$.
– in [8], Thierry Horsin uses the return method, introduced and used by Jean-Michel Coron in [3–5], to describe the attainable set of the nonviscous Burgers equation. He proves that every constant final state $y^1:=M$ can be reached from $y^0:=0$ in a time $T>L/|M|$ by means of a boundary control.

The nonviscous Burgers equation is often considered as the analogue of the equation of Euler for the incompressible inviscid fluids in one dimension. We know that this last equation is globally controllable, as it has been proved by Jean-Michel Coron in [4,5] and by Olivier Glass in [6,7]. It thus seems strange that one does not obtain similar results for the Burgers equation. Then, we compared the nonviscous Burgers equation and the Euler equation of incompressible inviscid fluids and we thought that a control $u(t)$ in the right member of the nonviscous Burgers equation may play the role of the pressure in the Euler equation. This hypothesis seems true, since this control $u(t)$ is the major difference between this work and the previous ones (where it is null). It should explain why the results we obtain here are of quite different nature than theirs, since we prove the global controllability of the nonviscous Burgers equation.

The first natural idea to show the controllability of the control system (1) is to look at the linearized control system around the null solution: $y_t=u(t)$. Unfortunately, it is obviously not controllable.

Then, as the nonviscous Burgers equation has many common points with the Euler equation of incompressible inviscid fluids, one may expect from a method giving controllability results for the Euler equation of incompressible inviscid fluids to give also results for the nonviscous Burgers equation. Therefore, in this work, we use the return method, which has been introduced by Jean-Michel Coron in [3] and used by him in [4,5] and by Olivier Glass in [6,7] to show global controllability results for the Euler equation of incompressible inviscid fluids. It consists in looking for trajectories going from 0 to 0 such that the linearized control systems around the trajectories are controllable (or having 'good' controllability properties around them). Therefore, we look at the linearized control system around a particular trajectory $(\bar{y}, \bar{u}) = (a, a')$, where $a \in C^\infty([0,T])$ vanishes on a neighborhood of 0 and T and $a \geqslant 0$ on $[0,T]$. This linear control system, $y_t + \alpha(x)a(t)y_x = v(t)$, is controllable if $\int_0^T a(t)\,\mathrm{d}t > \int_0^L 1/\alpha(x)\,\mathrm{d}x$. One may consequently hope that the nonlinear control system is, at least locally, controllable too.

Our main result is the following theorem:

Theorem 1.1. *For every $T > 0$, for every $L > 0$, for every $\alpha \in C^1([0,L])$ such that $\alpha > 0$ on $[0,L]$, for every y^0 and $y^1 \in C^1([0,L])$, there exists $y \in C^1([0,T] \times [0,L])$ and there exists $u \in C^0([0,T])$ vanishing on* 0 *and T, such that* (1), (2) *and* (3) *are satisfied.*

2. Sketch of proof of Theorem 1.1

In this section we give the main steps of the proof of Theorem 1.1. (The details are given in [2].)

Lemma 2.1. *It suffices to prove that we can reach every state $y^0 \in C^1([0,L])$ to* 0.

Proof of Lemma 2.1. This comes from the fact that (1) is time-reversible. Indeed, let us fix $T > 0$, $L > 0$, y^0 and y^1 in $C^1([0,L])$. There exist $y, z \in C^1([0,T/2] \times [0,L])$, and there exist $u_y, u_z \in C^0([0,T/2])$ vanishing on 0 and $T/2$ such that

$$y_t + \alpha(x)yy_x = u_y, \quad t \in [0,T/2],\ x \in [0,L], \tag{12}$$

$$y(0,x) = y^0(x), \quad x \in [0,L], \tag{13}$$

$$y(T/2,x) = 0, \quad x \in [0,L], \tag{14}$$

$$z_t + \alpha(L-x)zz_x = u_z, \quad t \in [0,T/2],\ x \in [0,L], \tag{15}$$

$$z(0,x) = y^1(L-x), \quad x \in [0,L], \tag{16}$$

$$z(T/2,x) = 0, \quad x \in [0,L]. \tag{17}$$

We thus define Y and U by

$$Y(t,x) := \begin{cases} y(t,x), & t \in [0,T/2],\ x \in [0,L], \\ z(T-t, L-x), & t \in [T/2,T],\ x \in [0,L], \end{cases}$$

$$U(t) := \begin{cases} u_y(t), & t \in [0,T/2], \\ -u_z(T-t), & t \in [T/2,T]. \end{cases}$$

And Lemma 2.1 follows obviously. □

Instead of proving the global controllability of the control system (1), it can be judicious to begin by proving its local controllability, as it is often easier to obtain. This idea is, moreover, justified by the following lemma:

Lemma 2.2. *The local controllability of the control system* (1) *at $\bar{y} = 0$ implies its global controllability.*

Proof of Lemma 2.2. Let us fix $T > 0$, $L > 0$, $y^0 \in C^1([0,L])$. Let $0 < \lambda < 1$ be such that $|\lambda y^0|_{C^1([0,L])}$ is small enough. There exists $y \in C^1([0,T] \times [0,L])$ and there exists $u \in C^0([0,T])$ vanishing on 0 and T such that

$$y_t + \alpha(x) y y_x = u(t), \quad t \in [0,T],\ x \in [0,L], \tag{18}$$

$$y(0,x) = \lambda y^0(x), \quad x \in [0,L], \tag{19}$$

$$y(T,x) = 0, \quad x \in [0,L]. \tag{20}$$

We define

$$\begin{aligned} &z : [0,\lambda T] \times [0,L] \to \mathbb{R} \\ &\qquad (t,x) \mapsto z(t,x) = \frac{1}{\lambda} y\left(\frac{t}{\lambda}, x\right). \end{aligned} \tag{21}$$

Since $\lambda T < T$, we can define

$$Z(t,x) := \begin{cases} z(t,x), & t \in [0,\lambda T],\ x \in [0,L], \\ 0, & t \in [\lambda T, T],\ x \in [0,L] \end{cases}$$

and

$$V(t) := \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda^2} u\left(\dfrac{t}{\lambda}\right), & t \in [0,\lambda T], \\ 0, & t \in [\lambda T, T]. \end{cases}$$

We deduce Lemma 2.2 after easy computations. □

Finally, doing an adequate change of variables ($z = a + y$, $u = a'$), we see that Theorem 1.1 is a consequence of the following proposition:

Proposition 2.1. *Let $T > 0$, $L > 0$ and $\alpha \in C^1([0,L])$ be such that $\alpha > 0$ on $[0,L]$. Let $a \in C^\infty([0,T])$, vanishing on a neighborhood of 0 and T, be such that $a \geqslant 0$ on $[0,T]$, and such that $\int_0^T a(s)\,\mathrm{d}s > \int_0^L 1/\alpha(x)\,\mathrm{d}x$. Then, there exists $\epsilon > 0$ such that for every $y^0 \in C^1([0,L])$ satisfying $|y^0|_{C^1([0,L])} \leqslant \epsilon$, there exists $y \in C^1([0,T] \times [0,L])$ such that Eqs.* (4), (5) *and* (6) *are satisfied.*

We prove Proposition 2.1 by means of Schauder's fixed-point theorem. Indeed, we are going to construct at least one solution of (8)–(9) which depends continuously on y. Let us also call $\mathcal{F}$ the map defined by (7), where z satisfies Eqs. (8) and (9) and will be expressed lately. It is obvious that if this function z satisfies moreover $z(T,\cdot) = 0$, then it comes that a fixed point of $\mathcal{F}$ satisfies the control system (4)–(6).

First, we extend y^0 and y by $\tilde{y}^0$ and $\tilde{y}$ of class C^1 and with compact support on $\mathbb{R}$ and $[0,T] \times \mathbb{R}$ respectively. The function α is extended by $\tilde{\alpha} \in C^1(\mathbb{R})$, bounded and such that $\tilde{\alpha} > 0$ on $\mathbb{R}$. The flow $\tilde{\phi}$ associated to the ordinary differential equation $\dot{\xi} = \tilde{\alpha}(\xi)(a(t) + \tilde{y}(t,\xi))$ is consequently defined on $[0,T] \times [0,T] \times \mathbb{R}$. Let $z \in C^1([0,T] \times [0,L])$ be defined by (11). The function z satisfies (8) and (9). We prove after some computations that z satisfies (10) if $|y|_{C^1([0,T]\times[0,L])} \leqslant R$, where $R > 0$ is small enough.

Then, we prove the two following lemmas:

Lemma 2.3. *There exists $C > 0$ such that, for every $y \in B_R$,*

$$|z|_{C^1([0,T]\times[0,L])} \leqslant C\left|y^0\right|_{C^1([0,L])}, \tag{22}$$

where $z = \mathcal{F}(y)$.

Lemma 2.4. *There exists $C_0 > 0$ such that, for every $\rho > 0$, for every $y \in B_R$,*

$$\omega_\rho(z_t) + \omega_\rho(z_x) \leqslant C_0\left|y^0\right|_{C^1([0,L])}\big(\rho + \omega_\rho(y_t) + \omega_\rho(y_x) + \omega_\rho(\tilde{\alpha}_x)\big) + C_0\omega_\rho\big(\tilde{y}^0_x\big).$$

Let us recall the definition of the modulus of continuity $\omega_\rho(f)$, $\rho > 0$, for $f : Q \to \mathbb{R}$ where Q is a compact subset of $\mathbb{R}^n$:

$$\omega_\rho(f) := \max\big\{\big|f(\xi_2) - f(\xi_1)\big|;\ (\xi_1,\xi_2) \in Q^2 \text{ and } |\xi_2 - \xi_1| \leqslant \rho\big\},$$

where $|\cdot|$ denotes the usual Euclidean norm in $\mathbb{R}^n$.

Finally, let $K := \{y \in B_R;\ \text{for every } \rho > 0,\ \omega_\rho(y_t) + \omega_\rho(y_x) \leqslant 2C_0\omega_\rho(\tilde{y}^0_x) + \rho + \omega_\rho(\tilde{\alpha}_x)\}$. The set K is a convex compact subset of $C^1([0,T] \times [0,L])$. Moreover, using Lemmas 2.3 and 2.4, one gets that, if $|y^0|_{C^1([0,L])} \leqslant \min(R/C, 1/(2C_0))$, then $\mathcal{F}(K) \subset K$. This, with Schauder's fixed-point theorem, implies that $\mathcal{F}$ has a fixed point. But if y is a fixed point of $\mathcal{F}$, then

$$\begin{aligned}
&y_t + \alpha(x)\big(a(t) + y\big)y_x = 0, \quad t \in [0,T],\ x \in [0,L],\\
&y(0,x) = y^0(x), \quad x \in [0,L],\\
&y(T,x) = 0, \quad x \in [0,L].
\end{aligned}$$

Hence, Proposition 2.1 is proved, and Theorem 1.1 follows, showing the global controllability of our control system (1).

References

[1] F. Ancona, A. Marson, On the attainable set for scalar nonlinear conservation laws with boundary control, SIAM J. Control Optim. 36 (1) (1998) 290–312.

[2] M. Chapouly, Global controllability of nonviscous and viscous Burgers type equations, Preprint, Université de Paris-Sud 11, 2007.

[3] J.-M. Coron, Global asymptotic stabilization for controllable systems without drift, Math. Control Signals Systems 5 (3) (1992) 295–312.

[4] J.-M. Coron, Contrôlabilité exacte frontière de l'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles bidimensionnels, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 317 (3) (1993) 271–276.

[5] J.-M. Coron, On the controllability of 2-D incompressible perfect fluids, J. Math. Pures Appl. (9) 75 (2) (1996) 155–188.

[6] O. Glass, Contrôlabilité exacte frontière de l'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles en dimension 3, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 325 (9) (1997) 987–992.

[7] O. Glass, Exact boundary controllability of 3-D Euler equation, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 5 (2000) 1–44 (electronic).

[8] T. Horsin, On the controllability of the Burgers equation, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 3 (1998) 83–95 (electronic).