Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007) 153–156
COMPTES RENDUS
MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Théorie des groupes

Le groupe de Cremona est hopfien

Julie Déserti

IRMAR, UMR 6625 du CNRS, université de Rennes 1, 35042 Rennes, France

Reçu le 28 novembre 2006 ; accepté le 4 décembre 2006

Disponible sur Internet le 10 janvier 2007

Présenté par Étienne Ghys

Résumé

On décrit les endomorphismes du groupe de Cremona et on en déduit son caractère hopfien. ***Pour citer cet article : J. Déserti, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***
© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

The Cremona group is Hopfian. We describe the endomorphisms of the Cremona group and obtain that this group is Hopfian. ***To cite this article: J. Déserti, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***
© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Une transformation rationnelle de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ dans lui-même s'écrit

$$(x:y:z) \mapsto \big(P_0(x,y,z) : P_1(x,y,z) : P_2(x,y,z)\big)$$

où les P_i désignent des polynômes homogènes de même degré. Lorsqu'elle est inversible, on dit qu'elle est birationnelle ; par exemple l'involution de Cremona $\sigma = (yz : xz : xy)$ est birationnelle. Le groupe des transformations birationnelles de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ dans lui-même, noté $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$, est aussi appelé groupe de Cremona.

Théorème 1. (Nœther, [1,3]) *Le groupe de Cremona est engendré par* $\mathsf{PGL}_3(\mathbb{C})$ *et l'involution* $\sigma = (yz : xz : xy)$.

Un automorphisme τ du corps $\mathbb{C}$ induit un isomorphisme $\tau(\cdot)$ de $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$: à un élément f de $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ nous associons l'élément $\tau(f)$ obtenu en faisant agir τ sur les coefficients de f exprimé en coordonnées homogènes. *Tout automorphisme du groupe de Cremona s'obtient à partir de l'action d'un automorphisme du corps* $\mathbb{C}$ *et d'une conjugaison intérieure* [4].

Ici nous nous intéressons aux endomorphismes du groupe de Cremona :

Théorème 2. *Soit* φ *un endomorphisme non trivial de* $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$. *Il existe un plongement de corps* λ *de* $\mathbb{C}$ *dans lui-même et une transformation birationnelle* ψ *tels que pour tout* f *dans* $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ *on ait*

Adresse e-mail : julie.deserti@univ-rennes1.fr (J. Déserti).

1631-073X/$ – see front matter © 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2006.12.005

$$\varphi(f)=\lambda\big(\psi f\psi^{-1}\big).$$

En particulier φ est injectif.

Une conséquence directe est la suivante :

Corollaire 3. *Le groupe de Cremona est hopfien, i.e. tout endomorphisme surjectif de* $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ *est un automorphisme.*

La preuve du Théorème 2 repose en partie sur le résultat suivant que nous appliquons à $\Gamma=\mathsf{SL}_3(\mathbb{Z})$:

Théorème 4. [4] *Soient Γ un sous-groupe d'indice fini de* $\mathsf{SL}_3(\mathbb{Z})$ *et ρ un morphisme injectif de Γ dans* $\mathsf{Bir}(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$. *Alors ρ coïncide, à conjugaison birationnelle près, avec le plongement canonique ou la contragrédiente, i.e. l'involution $u\mapsto {}^tu^{-1}$.*

On travaille dans une carte affine (x,y) de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Introduisons le groupe des translations

$$\mathsf{T}:=\big\{(x+\alpha,y+\beta)\,\big|\,\alpha,\ \beta\in\mathbb{C}\big\}$$

et l'image de T par la contragrédiente

$$\tilde{\mathsf{T}}:=\left\{\left(\frac{x}{\alpha x+\beta y+1},\frac{y}{\alpha x+\beta y+1}\right)\,\middle|\,\alpha,\beta\in\mathbb{C}\right\}.$$

Commençons par établir l'énoncé suivant :

Lemme 5. *Une transformation birationnelle qui commute à $(x+1,y)$ et $(x,y+\ 1)$ appartient à* T.

Démonstration. Soit $f=(f_1,f_2)$ comme ci-dessus. En particulier $f_2(x+1,y)=f_2(x,y)$, *i.e.* f_2 ne dépend que de y. On a aussi $f_1(x+1,y)=f_1(x,y)+1$ d'où

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x+1,y)=\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)\ ;$$

par suite $\partial f_1/\partial x=a(y)$ et f_1 est de la forme $a(y)x+b(y)$ avec a, b dans $\mathbb{C}(y)$. En réécrivant l'égalité

$$f_1(x+1,y)=f_1(x,y)+1,$$

on obtient que a est constante et vaut 1, i.e. $f=(x+b(y),f_2(y))$. Comme f commute à $(x,y+1)$ on a

$$b(y)=b(y+1)\quad\text{et}\quad f_2(y)+1=f_2(y+1).$$

La première égalité assure que b est constante ; la seconde entraîne que $f_2'(y)$ est constante autrement dit que $f_2(y)=cy+b$. On constate alors que $f_2(y)+1=f_2(y+1)$ implique $c=1$. Il en résulte que $f=(x+a,y+b)$. □

Démonstration du Théorème 2. Puisque $\mathsf{PGL}_3(\mathbb{C})$ est simple, $\varphi_{|\mathsf{PGL}_3(\mathbb{C})}$ est ou bien triviale, ou bien injective.

1. Supposons $\varphi_{|\mathsf{PGL}_3(\mathbb{C})}$ triviale. Posons $\ell:=(\frac{x}{x-1},\frac{x-y}{x-1})$; comme l'a remarqué Gizatullin [5], on a $(\ell\sigma)^3=\mathsf{id}$. Ainsi $\varphi((\ell\sigma)^3)=\varphi(\sigma)=\mathsf{id}$, i.e. φ est trivial d'après le Théorème 1.

2. Si $\varphi_{|\mathsf{PGL}_3(\mathbb{C})}$ est injective, alors $\varphi_{|\,\mathsf{SL}_3(\mathbb{Z})}$ est, à conjugaison intérieure près, le plongement canonique ou la contragrédiente.

2.a. Supposons que $\varphi_{|\,\mathsf{SL}_3(\mathbb{Z})}=\mathsf{id}$. Notons H le groupe des matrices 3×3 triangulaires supérieures unipotentes. Posons :

$$f_\beta(x,y):=\varphi(x+\beta,y),\quad g_\alpha(x,y):=\varphi(x+\alpha y,y)\quad\text{et}\quad h_\gamma(x,y):=\varphi(x,y+\gamma).$$

Les transformations birationnelles f_β et h_γ commutent à $(x+1,y)$ et $(x,y+1)$; on obtient (Lemme 5)

$$f_\beta=\big(x+\lambda(\beta),y+\zeta(\beta)\big)\quad\text{et}\quad h_\gamma=\big(x+\eta(\gamma),y+\mu(\gamma)\big)$$

où η, ζ, μ et λ sont des morphismes additifs de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Puisque g_α commute à $(x+y,y)$ et $(x+1,y)$ il est de la forme $(x+a_\alpha(y),y)$ avec a_α dans $\mathbb{C}(y)$. La relation

$$(x+\alpha y,y)(x,y+\gamma)(x+\alpha y,y)^{-1}(x,y+\gamma)^{-1}=(x+\alpha\gamma,y)$$

implique que, pour tous nombres complexes α et γ, nous avons $g_\alpha h_\gamma = f_{\alpha\gamma} h_\gamma g_\alpha$. Nous en déduisons que :

$$f_\beta = \big(x+\lambda(\beta), y\big), \quad g_\alpha = \big(x+\Theta(\alpha)y+\varsigma(\alpha), y\big) \quad \text{et} \quad \Theta(\alpha)\mu(\gamma) = \lambda(\alpha\gamma).$$

L'égalité

$$(x+\alpha, y)(x, \beta x+y)(x-\alpha, y)(x, y-\beta x) = (x, y-\alpha\beta)$$

conduit à $h_\gamma = (x, y+\mu(\gamma))$. Autrement dit

$$\varphi(x+\alpha, y+\beta) = \big(x+\lambda(\alpha), y+\mu(\beta)\big) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Ainsi $\varphi(\mathsf{T}) \subset \mathsf{T}$ et $\varphi(\mathsf{H}) \subset \mathsf{H}$; puisque $\mathsf{PGL}_3(\mathbb{C})$ est engendré par H et $\mathsf{SL}_3(\mathbb{Z})$, l'image de $\mathsf{PGL}_3(\mathbb{C})$ par φ est contenue dans $\mathsf{PGL}_3(\mathbb{C})$. Le théorème de classification de Borel et Tits ([2], Théorème A, p. 500) assure qu'à conjugaison intérieure près l'action de φ sur $\mathsf{PGL}_3(\mathbb{C})$ provient d'un plongement de corps de $\mathbb{C}$ dans lui-même.
2.b. Supposons que la restriction de φ à $\mathsf{SL}_3(\mathbb{Z})$ coïncide avec la contragrédiente. L'étude est identique à la précédente. Soit H' le groupe des matrices 3×3 triangulaires inférieures unipotentes. On va montrer que $\varphi(\tilde{\mathsf{T}}) \subset \mathsf{T}$ et $\varphi(\mathsf{H}') \subset \mathsf{H}$. Posons

$$f_\beta(x,y) := \varphi\left(\frac{x}{\beta x+1}, \frac{y}{\beta x+1}\right), \quad g_\alpha(x,y) := \varphi(x, \alpha x+y) \quad \text{et} \quad h_\gamma(x,y) := \varphi\left(\frac{x}{\gamma y+1}, \frac{y}{\gamma y+1}\right).$$

La commutation de f_β (resp. h_γ) avec $(x-1, y)$ et $(x, y-1)$ assure que

$$f_\beta = \big(x+\lambda(\beta), y+\zeta(\beta)\big) \quad \text{et} \quad h_\gamma = \big(x+\eta(\gamma), y+\mu(\gamma)\big)$$

où η, ζ, λ et μ sont des morphismes additifs de $\mathbb{C}$; comme g_α commute à $(x+y, y)$ et $(x+1, y)$ il s'écrit $(x+a_\alpha(y), y)$ où a_α désigne un élément de $\mathbb{C}(y)$. À partir de

$$(x, \alpha x+y)\left(\frac{x}{\gamma y+1}, \frac{y}{\gamma y+1}\right)(x, \alpha x+y)^{-1}\left(\frac{x}{\gamma y+1}, \frac{y}{\gamma y+1}\right)^{-1} = (x+\alpha\gamma, y)$$

nous avons $g_\alpha h_\gamma = f_{-\alpha\gamma} h_\gamma g_\alpha$ pour tous nombres complexes α et γ. Il en résulte que

$$f_\beta = \big(x+\lambda(\beta), y\big), \quad g_\alpha = \big(x+\Theta(\alpha)y+\varsigma(\alpha), y\big) \quad \text{et} \quad \Theta(\alpha)\mu(\gamma) = \lambda(-\alpha\gamma).$$

En utilisant l'égalité

$$(x+\alpha y, y)\left(\frac{x}{1+\beta x}, \frac{y}{1+\beta x}\right)(x-\alpha y, y)\left(\frac{x}{1-\beta x}, \frac{y}{1-\beta x}\right) = \left(\frac{x}{1-\alpha\beta y}, \frac{y}{1-\alpha\beta y}\right)$$

on établit que $h_\gamma = (x, y+\mu(\gamma))$. Ainsi $\varphi(\tilde{\mathsf{T}})$ est inclus dans T et $\varphi(\mathsf{H}')$ dans H ; l'image de $\mathsf{PGL}_3(\mathbb{C})$ par φ est donc contenue dans $\mathsf{PGL}_3(\mathbb{C})$. Toujours d'après [2] (Théorème A, p. 500) à conjugaison intérieure près, l'action de φ sur $\mathsf{PGL}_3(\mathbb{C})$ provient ici d'un plongement de corps de $\mathbb{C}$ dans lui-même composé avec la contragrédiente.
3. Supposons donc que l'action de φ sur $\mathsf{PGL}_3(\mathbb{C})$ coïncide avec celle d'un plongement de corps λ de $\mathbb{C}$ dans lui-même ou avec la composée d'une telle action et de la contragrédiente.

Posons $(\tau_1, \tau_2) := \varphi(x, 1/y)$. À partir de

$$(x, 1/y)(\alpha x, \beta y)(x, 1/y) = (\alpha x, y/\beta)$$

on obtient

$$\tau_1\big(\lambda(\alpha^{-1})x, \lambda(\beta^{-1})y\big) = \lambda(\alpha^{-1})\tau_1(x,y) \quad \text{et} \quad \tau_2\big(\lambda(\alpha^{-1})x, \lambda(\beta^{-1})y\big) = \lambda(\beta)\tau_2(x,y)$$

ou

$$\tau_1\big(\lambda(\alpha)x, \lambda(\beta)y\big) = \lambda(\alpha)\tau_1(x,y) \quad \text{et} \quad \tau_2\big(\lambda(\alpha)x, \lambda(\beta)y\big) = \frac{\tau_2(x,y)}{\lambda(\beta)}$$

suivant que la contragrédiente intervient ou non. Par suite $\varphi(x, 1/y) = (\pm x, \pm 1/y)$.

L'égalité $((y,x)(x,1/y))^2 = \sigma$ assure que $\varphi(\sigma) = \pm\sigma$. Rappelons que $\ell = (\frac{x}{x-1}, \frac{x-y}{x-1})$; la transformation $(\ell\sigma)^3$ est triviale donc $(\varphi(\ell)\varphi(\sigma))^3$ doit aussi l'être. Puisque ℓ appartient à $\mathsf{SL}_3(\mathbb{Z})$, on a $\varphi(\ell) = \ell$ ou $\varphi(\ell) = (-x-y-1, y)$ suivant que $\varphi_{|\mathsf{SL}_3(\mathbb{Z})}$ est l'identité ou la contragrédiente. Si $\varphi(\ell) = \ell$, alors $\varphi(\sigma) = \sigma$ et on conclut avec le Théorème 1. Lorsque $\varphi(\ell) = (-x-y-1, y)$, la seconde composante de $(\varphi(h)\varphi(\sigma))^3$ vaut $\pm 1/y$ ce qui est exclu. $\square$

Remerciements

Je remercie É. Ghys d'avoir posé le problème ainsi que pour les remarques et suggestions qu'il m'a faites. Merci à D. Cerveau pour nos discussions animées et fructueuses.

Références

[1] M. Alberich-Carramiñana, Geometry of the Plane Cremona Maps, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1769, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
[2] A. Borel, J. Tits, Homomorphismes « abstraits » de groupes algébriques simples, Ann. of Math. (2) 97 (1973) 499–571.
[3] G. Castelnuovo, Le trasformationi generatrici del gruppo cremoniano nel piano, Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino 36 (1901) 861–874.
[4] J. Déserti, Groupe de Cremona et dynamique complexe : une approche de la conjecture de Zimmer, Int. Math. Res. Not. 2006, Art. ID 71701, 27 p.
[5] M.Kh. Gizatullin, Defining relations for the Cremona group of the plane, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 46 (5) (1982) 909–970.