Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007) 45–48
COMPTES RENDUS
MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Systèmes dynamiques

Un problème de Riemann–Hilbert local non-linéaire pour les germes de feuilletages holomorphes singuliers en dimension deux

Yohann Genzmer

Laboratoire Émile-Picard, université Paul-Sabatier, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex, France

Reçu le 10 juin 2006 ; accepté le 10 novembre 2006

Disponible sur Internet le 15 décembre 2006

Présenté par Jean-Pierre Ramis

Résumé

Nous montrons un théorème de type Riemann–Hilbert local non-linéaire pour les germes de feuilletage holomorphe singulier dans $\mathbb{C}^2$. Ce résultat a pour conséquence que l'espace de cobordisme d'un feuilletage de deuxième espèce non-dicritique s'envoie surjectivement sur la classe d'équisingularité de ses séparatrices. ***Pour citer cet article : Y. Genzmer, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***

Abstract

On a local non-linear Riemann–Hilbert problem for germs of singular foliation in $\mathbb{C}^2$. We prove a result of Riemann–Hilbert kind for germs of foliation in $\mathbb{C}^2$. This result has the following consequence: the cobordism class of a second kind foliation in $\mathbb{C}^2$ is onto the equisingularity class of its separatrix. ***To cite this article: Y. Genzmer, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***

1. Introduction

À coordonnées et unités multiplicatives près, un *germe de feuilletage $\mathcal{F}$ holomorphe singulier à singularité isolée* dans $\mathbb{C}^2$ correspond à la donnée d'un germe de 1-forme holomorphe singulière en $0 \in \mathbb{C}^2$

$$\omega = a(x, y)\,\mathrm{d}x + b(x, y)\,\mathrm{d}y, \quad \text{avec } a \wedge b = 1,\ a, b \in \mathbb{C}\{x, y\}.$$

Un résultat de C. Camacho et de P. Sad [1] assure que $\mathcal{F}$ admet toujours une *séparatrice*, c'est-à-dire un germe de courbe invariante irréductible analytique en 0. Lorsque $\mathcal{F}$ a un nombre infini de séparatrices, on dit qu'il est *dicritique*. Si $\mathcal{F}$ est non-dicritique, on note $\mathrm{Sep}(\mathcal{F})$ le germe de courbe défini par l'union des séparatrices de $\mathcal{F}$.

Le feuilletage $\mathcal{F}$ est dit *réduit* s'il existe des coordonnées (u, v) telles que $\omega = u\,\mathrm{d}v + \lambda v\,\mathrm{d}u + \cdots,\ \lambda \notin \mathbb{Q}_{<0}$. Si $\mathcal{F}$ n'est pas réduit, on lui associe un *morphisme de réduction*

$$E : (\mathcal{M}, \mathcal{D}) \to \left(\mathbb{C}^2, 0\right)$$

Adresse e-mail : genzmer@math.ups-tlse.fr (Y. Genzmer).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2006.11.017

tel que le feuilletage à singularité isolée $E^*\mathcal{F}$ défini par $E^*\omega$ ne présente que des singularités réduites le long du diviseur exceptionnel $\mathcal{D}$.

Lorsque le feuilletage $E^*\mathcal{F}$ n'a aucune singularité de type selle-noeud, i-e. $\lambda = 0$, dont la variété faible coïncide avec le germe déterminé par $\mathcal{D}$, $\mathcal{F}$ est dit de *deuxième espèce*.

Soit $S = \mathrm{Sep}(\mathcal{F})$ où $\mathcal{F}$ est un feuilletage non-dicritique de deuxième espèce et S' un germe de courbe topologiquement équivalent à S.

Théorème 1.1. *Il existe un feuilletage $\mathcal{F}'$ topologiquement équivalent à $\mathcal{F}$ tel que* $\mathrm{Sep}(\mathcal{F}') = S'$.

Ce théorème est la conséquence d'un résultat plus précis dont l'énoncé appelle l'introduction d'autres notions.

L'*arbre dual* de réduction $\mathbb{A}^*(\mathcal{M}, \mathcal{D}, S)$ est un graphe fléché pondéré dont l'ensemble des sommets est en bijection avec $\mathrm{Comp}(\mathcal{D})$, l'ensemble des composantes irréductibles de $\mathcal{D}$. Deux sommets sont reliés si et seulement si les composantes associées se rencontrent. Chaque sommet est pondéré par auto-intersection de la composante et on lui adjoint une flèche pour chaque transformée stricte de séparatrice qu'il rencontre.

Soit K un compact de $\mathbb{C}^p$ contenant 0. Un *déploiement de $\mathcal{F}$ de base K* est la donnée d'un germe de feuilletage $\mathcal{F}_K$ de codimension 1 dans $(\mathbb{C}^{2+p}, \{0\} \times K)$ de lieu singulier $\{0\} \times K$ tel que les feuilles de $\mathcal{F}_K$ soient transverses aux fibres de la projection

$$\Pi : (\mathbb{C}^{2+p}, \{0\} \times K) \to (\mathbb{C}^p, K), \quad \Pi(x, t) = t,$$

et tel que $i^*\mathcal{F}_P = \mathcal{F}$, $i : (\mathbb{C}^2, 0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^{2+p}, \{0\} \times K)$ désignant le plongement $i(x) = (x, 0)$. Le déploiement est dit équisingulier lorsqu'il admet une réduction des singularités *en famille* dans un sens naturel précisé dans [3]. Un déploiement équisingulier est, en particulier, une déformation topologiquement triviale à pseudo-groupe d'holonomie constant [3].

Soit $\mathcal{F}$ un germe en $0 \in \mathbb{C}^2$ de feuilletage singulier de deuxième espèce. Soit $E' : (\mathcal{M}', \mathcal{D}') \to (\mathbb{C}^2, 0)$ un processus d'éclatements et S' un germe de courbe à l'orgine de $\mathbb{C}^2$ réduit par E' tels que

$$\mathbb{A}^*(\mathcal{M}', \mathcal{D}', S') = \mathbb{A}^*(\mathcal{M}, \mathcal{D}, S).$$

Théorème 1.2. *Il existe un germe de feuilletage $\mathcal{F}'$ en $0 \in \mathbb{C}^2$ relié à $\mathcal{F}$ par un déploiement équisingulier tel que E' soit exactement le processus de réduction de $\mathcal{F}'$ et $\mathbb{A}^*(\mathcal{M}', \mathcal{D}', S')$ son arbre dual.*

Ce résultat permet ainsi de réaliser un feuilletage à réduction et pseudo-groupe d'holonomie prescrits.

L'idée directrice de la preuve est l'interprétation cohomologique des déploiements équisinguliers : de façon générale, considérons une variété M feuilletée par un feuilletage $\mathcal{F}$ au voisinage d'un diviseur $\mathcal{D}$. Définissons trois faisceaux en groupes au-dessus de $\mathcal{D}$: $\mathrm{Aut}(M)$ le faisceau des germes au point de $\mathcal{D}$ d'automorphisme de M qui sont l'identité en restriction à $\mathcal{D}$; $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})$ le sous-faisceau des germes d'automorphisme préservant le feuilletage ; $\mathrm{Fix}(\mathcal{F})$ le sous-faisceau des germes d'automorphisme préservant chaque feuille locale. Tout 1-cocycle $(\phi_{ss'})$ appartenant à $Z^1(\{U_s\}_s, \mathrm{Aut}(M))$ définit une variété « modelée » sur M obtenue en recollant par $\phi_{ss'}$ des voisinages de U_s dans M :

$$M' = \coprod (\mathcal{M}, U_s)/_{x \sim \phi_{ss'} x}. \tag{1}$$

Si le cocycle est cohomologue à un cocycle de $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})$, alors il existe sur M' un feuilletage localement isomorphe à $\mathcal{F}$. De surcroît, s'il est cohomologue à un cocycle de $\mathrm{Fix}(\mathcal{F})$ alors ce feuilletage et $\mathcal{F}$ sont reliés par un déploiement équisingulier.

2. Esquisse de la preuve du Théorème 1.2

La preuve se trouve dans [2]. Nous en donnons ici un schéma simplifié : on établit d'abord le résultat sur le premier voisinage infinitésimal du diviseur ; puis, un cocycle de collage étant *préparé*, on effectue une double induction sur la longueur du processus de réduction de $\mathcal{F}$ et sur l'ordre du voisinage dans la filtration de $\mathcal{M}$ par les voisinages infinitésimaux de $\mathcal{D}$. On y développe un algorithme de normalisation fondé sur deux éléments : l'équation cohomologique associée au résultat infinitésimal (2.1) et la formule de Campbell–Hausdorff. Cet algorithme termine grâce à un théorème de stabilité des voisinages de diviseurs exceptionnels.

2.1. Résultat à l'échelle infinitésimale

Soit $\widehat{\mathcal{X}}$ et $\widehat{\mathcal{T}}$ les faisceaux de base $\mathcal{D}$ des germes de champ de vecteurs formels tangents respectivement au diviseur $\mathcal{D}$ et au feuilletage $\mathcal{F}$. Désignons par $\mathfrak{M}$ le faisceau de base $\mathcal{D}$ engendré par les germes formels de fonction globale au voisinage de $\mathcal{D}$ nulle le long de celui-ci. L'hypothèse de deuxième espèce portant sur le feuilletage $\mathcal{F}$ se traduit ici de la façon suivante :

Lemme 2.1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application naturelle*

$$H^1\big(\mathcal{D}, \mathfrak{M}^n\widehat{\mathcal{T}}\big) \to H^1\big(\mathcal{D}, \mathfrak{M}^n\widehat{\mathcal{X}}\big)$$

est surjective.

Ce lemme constitue l'analogue du Théorème 1.2 à l'échelle infinitésimale.

2.2. Préparation d'un cocycle

Soit $E' : (\mathcal{M}', \mathcal{D}') \to (\mathbb{C}^2, 0)$ un processus d'éclatements de même arbre dual que $\mathcal{F}$. Un résultat de [4] montre qu'il existe un processus d'éclatements $\widetilde{E}$ tel que $\widetilde{\mathcal{M}}$ soit feuilletée par un feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}$ relié à $\mathcal{F}$ par un déploiement équisingulier, les diviseurs $\mathcal{D}' \subset \mathcal{M}'$ et $\widetilde{\mathcal{D}} \subset \widetilde{\mathcal{M}}$ étant biholomorphes. Dès lors, il existe un recouvrement $(V_D)_{D \in \mathrm{Comp}(\widetilde{\mathcal{D}})}$ de $\widetilde{\mathcal{D}}$ et une famille $(\phi_D)_{D \in \mathrm{Comp}(\widetilde{\mathcal{D}})}$ tels que V_D soit un voisinage tubulaire de D et ϕ_D un biholomorphisme de V_D dans un voisinage tubulaire d'une composante de $\mathcal{D}'$ conjuguant $\widetilde{\mathcal{D}}$ et $\mathcal{D}'$. La variété suivante obtenue par recollement selon le cocycle $(\phi_{DD'}) = (\phi_D^{-1}\phi_{D'})$

$$\coprod \big(\widetilde{\mathcal{M}}, V_D\big)/_{x \sim \phi_{DD'}(x)}$$

est visiblement biholomorphe à $\mathcal{M}'$. On montre alors le lemme de préparation suivant :

Lemme 2.2. *Quitte à raffiner le recouvrement (V_D), chaque composante du cocycle de collage est le flot d'un champ s'écrivant $fX + Y$ où X est un champ tangent à $\widetilde{\mathcal{D}}$, f une fonction nulle sur $\widetilde{\mathcal{D}}$ et Y un champ tangent à $\widetilde{\mathcal{D}}$ à l'ordre deux.*

Un tel cocycle sera dit *préparé*.

2.3. Les inductions

À partir du cocycle préparé, noté (ϕ_{ij}), on effectue une induction sur la longueur du processus de réduction de $\mathcal{F}$ et sur l'ordre de tangence au diviseur de ce cocycle. Suivant l'idée directrice, le but est de mettre en évidence un cocycle cohomologue à (ϕ_{ij}) à valeurs dans $\mathrm{Fix}(\widetilde{\mathcal{F}})$. L'induction traite séparément la partie $(\phi_{ij})^0$ du cocyle à support dans $\mathcal{D}^0$ et la partie $(\phi_{ij})^1$ du cocycle à support dans les composantes connexes de $\widetilde{\mathcal{D}} \backslash \mathcal{D}^0$, $\mathcal{D}^0$ désignant la composante de $\widetilde{\mathcal{D}}$ créée par le premier éclatement. L'hypothèse de récurrence normalise directement le cocycle $(\phi_{ij})^1$ puisque son support est une collection de processus d'éclatements de longueur strictement inférieure à celle de E'. Le cocycle $(\phi_{ij})^0$ est normalisé par un algorithme de type Newton que nous allons décrire succintement :

(i) si chaque composante ϕ_{ij} est le flot d'un champ s'écrivant $T_{ij}^0 + X_{ij}^n$ où T_{ij}^0 est tangent au feuilletage et X_{ij}^n est tangent au diviseur à l'ordre n, le Lemme 2.1 permet d'écrire l'équation cohomologique infinitésimale :

$$X_{ij}^n = T_{ij}^1 + X_i^n - X_j^n \tag{2}$$

où (T_{ij}) est un 1-cocycle de $\mathfrak{M}^n\widehat{\mathcal{T}}$ et (X_i) est un 0-cocycle de $\mathfrak{M}^n\widehat{\mathcal{X}}$.

(ii) A partir de la relation (2) et à l'aide de la formule de Campbell–Hausdorff, on montre que l'application $\mathrm{e}^{-X_i^n}\phi_{ij}\mathrm{e}^{X_j^n}$ est le flot d'un champ s'écrivant $T_{ij}^0 + T_{ij}^1 + X_{ij}^{n+1}$ où X_{ij}^{n+1} est tangent au diviseur à l'ordre $n+1$.

Cet algorithme est initié par le lemme de préparation et aboutit en prouvant un résultat de stabilité des voisinages de diviseurs exceptionnels stipulant que deux 1-cocycles suffisament tangents sont cohomologues. Finalement, on a montré l'existence d'un isomorphisme

$$\mathcal{M}' \simeq \coprod (\widetilde{\mathcal{M}}, U_i)/_{x \sim \mathrm{e}^{T_{ij}}(x)},$$

où (T_{ij}) est à valeurs dans $\widehat{\mathcal{T}}$. Ainsi, $\mathcal{M}'$ admet un feuilletage relié à $\widetilde{\mathcal{F}}$ et donc à $\mathcal{F}$ par un déploiement équisingulier.

3. Classe de cobordisme d'un feuilletage

Considérons $\mathrm{Cob}(\mathcal{F})$ l'ensemble des feuilletages holomorphes reliés à $\mathcal{F}$ par un déploiement équisingulier holomorphe et $\widehat{\mathrm{Cob}}(\mathcal{F})$ l'ensemble des feuilletages formels reliés à $\mathcal{F}$ par un déploiement équisingulier formel. Soit $S = \mathrm{Sep}(\mathcal{F})$ et $\widehat{S}$ l'union des séparatrices formelles de $\mathcal{F}$. Notons $\mathcal{E}(S)$ la classe d'équisingularité de S, c'est-à-dire l'ensemble des courbes topologiquement conjuguées à S et $\widehat{\mathcal{E}}(\widehat{S})$ la classe d'équisingularité formelle de $\widehat{S}$. Le Théorème 1.2 a pour conséquence le résultat suivant :

Théorème 3.1. *Si $\mathcal{F}$ est de deuxième espèce non-dicritique, alors les applications*

$$\mathrm{Cob}(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{E}(S) \quad et \quad \widehat{\mathrm{Cob}}(\mathcal{F}) \longrightarrow \widehat{\mathcal{E}}(\widehat{S})$$

définies par $\mathcal{H} \mapsto \mathrm{Sep}(\mathcal{H})$ sont des surjections à fibres connexes.

Ce théorème admet comme corollaire trivial le Théorème 1.1.

Références

[1] C. Camacho, P. Sad, Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields, Ann. of Math (2) 115 (3) (1982).
[2] Y. Genzmer, Construction of foliations with prescribed separatrix, preprint, 2006.
[3] J.F. Mattei, Modules de feuilletages holomorphes singuliers. I. Équisingularité, Invent. Math. 103 (2) (1991).
[4] M. Seguy, Cobordismes et reliabilités équisingulières de singularités marquées de feuilletages holomorphes en dimension deux, Thèse, Toulouse, 2003.