



Géométrie analytique/Systèmes dynamiques

Détermination du type d'équisingularité polaire

Nuria Corral¹

Dpto. Matemática Aplicada I, Universidad de Vigo. E. U. E. T. Forestal, Campus A Xunqueira, 36005 Pontevedra, Espagne

Reçu le 8 mars 2006 ; accepté après révision le 27 octobre 2006

Disponible sur Internet le 6 décembre 2006

Présenté par Jean-Pierre Ramis

Résumé

Le type d'équisingularité d'une polaire générique d'une courbe $C \subset (\mathbb{C}^2, 0)$ n'est pas déterminé par celui de C . Nous élargissons la catégorie des courbes en associant à C le feuilletage hamiltonien correspondant ; ceci nous permet de travailler dans le cadre moins rigide de l'espace des feuilletages qui ont C comme courbe invariante. Ainsi nous déterminons, pour les singularités « aimables », le type d'équisingularité polaire générique. Le feuilletage hamiltonien, qui correspond à la théorie classique des courbes polaires, est parfois spécial et ne donne pas le type générique. *Pour citer cet article : N. Corral, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Determination of the polar equisingularity type. The equisingularity type of a generic polar of a curve $C \subset (\mathbb{C}^2, 0)$ is not determined by the type of C . We expand the category of curves by associating to C the corresponding Hamiltonian foliation. In this way, we work in the 'less rigid' frame of the space of foliations having C as invariant curve. We characterize 'kind types of equisingularity' for C for which we completely determine the generic polar equisingularity type. The Hamiltonian case, corresponding to the classical theory of polar curves, can be special and sometimes does not provide the generic type. *To cite this article: N. Corral, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Soit $C = \bigcup_{i=1}^r C_i \subset (\mathbb{C}^2, 0)$ un germe de courbe analytique avec branches C_i . On sait que le type d'équisingularité $\epsilon(C)$ de C ne détermine pas le type d'équisingularité $\wp(C)$ d'une courbe polaire générique de C . Au lieu de considérer uniquement la catégorie des courbes (identifiée aux feuilletages hamiltoniens correspondants) nous élargissons notre cadre à l'espace de feuilletages possédant C comme courbe invariante.

Soient $f(x, y) = \prod_{i=1}^r f_i = 0$ une équation réduite de C et $[a, b] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. La courbe polaire $\Gamma = \Gamma_C(f; [a, b])$ est donnée par $df \wedge (a dy - b dx) = 0$. Pour un ouvert de Zariski non vide des $[a, b] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ le type de équisingularité de $\epsilon(\Gamma \cup C)$ est fixe (et indépendant de f et des coordonnées choisies). Une telle Γ s'appelle une polaire générique de C et nous notons $\wp(C) = \epsilon(\Gamma \cup C)$. D'une manière plus générale, considérons l'espace \mathbb{F}_C des feuilletages sur $(\mathbb{C}^2, 0)$ dont C est la courbe des séparatrices. C'est à dire, un élément \mathcal{F} de \mathbb{F}_C est donné par une équation $\omega = 0$, où

Adresse e-mail : ncorral@uvigo.es (N. Corral).

¹ Travail partiellement soutenu par le projet de recherche MTM 2004-07978 et pour la Junta de Castilla y León (VA123/04).

ω est une 1-forme holomorphe telle que $\omega \wedge df = f\eta$ et il n'y a pas d'autres courbes invariantes de \mathcal{F} . Un élément particulier de \mathbb{F}_C est le feuilletage hamiltonien $df = 0$. Nous pouvons maintenant définir la polaire de \mathcal{F} par rapport à $[a, b] \in \mathbb{P}_C^1$ comme $\omega \wedge (a dy - b dx) = 0$. Il y a comme avant des polaires génériques $\Gamma_{\mathcal{F}}$ qui donnent un type d'équisingularité $\wp(\mathcal{F}) = \epsilon(\Gamma_{\mathcal{F}} \cup C)$.

Nous allons restreindre notre étude à l'espace $\mathbb{G}_C^* \subset \mathbb{F}_C$ défini comme il suit. Considérons d'abord les courbes généralisées $\mathbb{G}_C \subset \mathbb{F}_C$, c'est-à-dire que l'on ne trouve pas de nœud-col dans leurs réductions des singularités (voir [9,2]). Notons en passant que le morphisme de désingularisation minimale π_C de C (on éclate jusqu'au moment où le transformé total de C est à croisements normaux) est aussi le morphisme de désingularisation de tout $\mathcal{F} \in \mathbb{G}_C$. Nous savons [4] que chaque $\mathcal{F} \in \mathbb{G}_C$ possède un modèle logarithmique unique \mathcal{L}_λ donné par

$$f_1 \cdots f_r \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{df_i}{f_i} = 0$$

où $\lambda = \lambda(\mathcal{F}) \in \mathbb{P}_C^{r-1}$. Le feuilletage logarithmique \mathcal{L}_λ possède la même réduction des singularités que \mathcal{F} et les mêmes rapport de valeurs propres (indices de Camacho–Sad) en les points finaux de cette réduction de singularités. Nous fixons un ensemble fini $R(C) \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$ (de résonances), dont nous ne détaillons ici la construction, qui nous permettra de définir \mathbb{G}_C^* . Nous dirons que $\mathcal{F} \in \mathbb{G}_C$ est un élément de \mathbb{G}_C^* si et seulement si $\sum k_i \lambda_i \neq 0$ pour tout $k \in R(C)$. Notons $\mathbb{G}_{C,\lambda}^*$ l'ensemble des $\mathcal{F} \in \mathbb{G}_C^*$ tels que $\lambda(\mathcal{F}) = \lambda$.

Le théorème de décomposition. L'énoncé optimal qui relie des caractéristiques de $\wp(C)$ ou bien de $\wp(\mathcal{F})$ au type d'équisingularité $\epsilon(C)$ est connu sous le nom de *théorème de décomposition de la polaire*. Il a été démontré par Merle, Kuo–Lu, Rouillé, García-Barroso et Corral [7,6,8,5,4] dans des contextes de généralité croissante ; le dernier pour les feuilletages de \mathbb{G}_C^* .

Soient $Y, Z \subset (\mathbb{C}^2, 0)$ deux germes de courbes et supposons que toutes les branches de Y sont non singulières. Nous dirons que Z est un *adjoint strict* de Y si les multiplicités satisfont à $v_p(Z) = v_p(Y) - 1$ en tout point infiniment voisin p de Y et Z ne passe pas par les coins de la désingularisation de Y . Nous avons donc le

Théorème 1 (de décomposition). *Considérons une ramification $\rho : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ transverse à C et telle que $\rho^{-1}C$ soit à branches non singulières. Si $\Gamma_{\mathcal{F}}$ est une polaire générique de $\mathcal{F} \in \mathbb{G}_C^*$, alors $\rho^{-1}\Gamma_{\mathcal{F}}$ est un adjoint strict de $\rho^{-1}C$.*

Déjà dans le cas où toutes les C_i sont non singulières, la condition que Z soit un adjoint strict de C ne détermine pas le type d'équisingularité de $Z \cup C$. Le premier exemple est avec $C = \llcorner$ trois droites \llcorner , on trouve une infinité de types d'équisingularité possibles pour $Z \cup C$.

Finitude. Soit $\mathcal{F} \in \mathbb{G}_C^*$ donné par $\omega = 0$, avec $\omega = A(x, y) dx + B(x, y) dy$ et $A, B \in \mathbb{C}\{x, y\}$. Le polygone de Newton $\mathcal{N}(\mathcal{F}; x, y)$ de \mathcal{F} est défini comme celui de l'idéal engendré par xA et yB . Il coïncide avec le polygone de Newton de C (comme conséquence du fait que $\omega = 0$ est une courbe généralisée). De plus, grâce aux conditions de non-résonance imposées aux éléments de \mathbb{G}_C^* il est possible de contrôler partiellement le polygone de Newton d'une polaire générique $\Gamma_{\mathcal{F}}$ en termes de $\mathcal{N}(\mathcal{F}; x, y)$. Ceci permet de prouver le résultat de finitude suivant

Théorème 2 (de finitude). *Il n'y a qu'un nombre fini de types d'équisingularité $\wp(\mathcal{F})$ lorsque $\mathcal{F} \in \mathbb{G}_C^*$, et C' parcourt les courbes telles que $\epsilon(C') = \epsilon(C)$.*

Notons qu'on peut déduire un résultat analogue, mais seulement pour les feuilletages hamiltoniens, du comportement virtuel des germes polaires décrit en [3].

Le cas de séparatrices non singulières. Supposons dans ce paragraphe que toutes les branches C_i de C sont non singulières. Considérons le type d'équisingularité χ_C défini par la propriété suivante : *si Y est un adjoint strict de C et π_C désingularise $Y \cup C$, alors $\epsilon(Y \cup C) = \chi_C$* . Notons que χ_C caractérise la propriété au sens que si $\epsilon(Y \cup C) = \chi_C$ alors nécessairement Y est un adjoint strict de C et π_C désingularise $Y \cup C$. Le type χ_C dépend seulement de $\epsilon(C)$ et, s'il est atteint, il peut être considéré comme le type « minimal » pour $\Gamma_{\mathcal{F}} \cup C$, vu le théorème de décomposition. En utilisant l'influence algébrique sur le polygone de Newton du vecteur $\lambda(\mathcal{F})$ des résidus on montre

Théorème 3 (de généralité). *L'ensemble $U_C \subset \mathbb{P}_\mathbb{C}^{r-1}$ défini par « $\lambda \in U_C$ s'il existe $\mathcal{F} \in \mathbb{G}_{C,\lambda}^*$ tel que $\wp(\mathcal{F}) = \chi_C$ » est un ouvert de Zariski non vide. De plus, pour tout $\mathcal{F} \in \mathbb{G}_{C,\lambda}^*$ avec $\lambda \in U_C$ on a $\wp(\mathcal{F}) = \chi_C$.*

On dira que $\mathcal{F} \in \mathbb{G}_C^*$ est *non-spécial* si $\lambda(\mathcal{F}) \in U_C$; dans ce cas le type d'équisingularité $\wp(\mathcal{F}) = \chi_C$ est déterminé par $\epsilon(C)$. Il existe des feuilletages spéciaux, même hamiltoniens, par exemple, si $f = y(y - x^2)(2y - (1 + \sqrt{-3})x^2)$ et $\omega = df$, une polaire générique est irréductible avec une paire de Puiseux (5, 2) et donc ne se désingularise pas avec $f = 0$.

Notons que l'ouvert U_C dépend de la courbe C et pas seulement du type d'équisingularité $\epsilon(C)$. En effet, dans l'exemple précédent on voit que $\lambda = (1, 1, 1) \notin U_C$. Par contre, si nous considérons $f = y(y - x^2)(y + x^2)$ on voit qu'une polaire générique pour $df = 0$ a deux branches avec contact exactement égal à deux, ce qui suffit pour assurer que $(1, 1, 1) \in U_C$.

Feuilletages non-spéciaux. Considérons une ramification $\rho : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ transverse à C et telle que $\rho^{-1}C$ soit à branches non singulières. Étant donné $\mathcal{F} \in \mathbb{G}_{C,\lambda}^*$ le transformé réciproque $\rho^*\mathcal{F}$ est un élément de $\mathbb{G}_{\rho^{-1}C,\lambda^*}^*$, où $\lambda^* = \lambda(\rho^*\mathcal{F}) \in \mathbb{P}_\mathbb{C}^{v-1}$ et $v = v_0(C)$. On a le résultat suivant

Proposition 4. *Soient $\mathcal{F} \in \mathbb{G}_{C,\lambda}^*$ et des polaires génériques $\Gamma_{\mathcal{F}}$ et $\Gamma_{\rho^*\mathcal{F}}$ de \mathcal{F} et $\rho^*\mathcal{F}$ respectivement. Considérons les propriétés suivantes*

$$(A) : \epsilon(\Gamma_{\rho^*\mathcal{F}} \cup \rho^{-1}C) = \chi_{\rho^{-1}C} ; \quad (B) : \epsilon(\rho^{-1}\Gamma_{\mathcal{F}} \cup \rho^{-1}C) = \chi_{\rho^{-1}C}.$$

Alors (A) implique (B). De plus si C a au plus deux tangentes, les propriétés (A) et (B) sont équivalentes.

Notons que la propriété (A) équivaut à dire que $\rho^*\mathcal{F}$ est non-spécial. Nous dirons en revanche que \mathcal{F} est *non-spécial* lorsque la propriété (B) est satisfaite (ceci ne dépend pas de la ramification ρ choisie et la définition étend donc celle correspondante au cas de séparatrices non singulières). On voit facilement que (A) et (B) ne sont pas équivalents avec l'exemple donné par $\omega = x^2 dx + y^2 dy$ et toute ramification $u^n = x$, $n \geq 2$. Cet exemple est non-spécial avec $C = \llcorner$ trois droites \llcorner . La propriété d'être non-spécial ne dépend que de $\lambda(\mathcal{F})$:

Proposition 5. *Le feuilletage $\mathcal{F} \in \mathbb{G}_{C,\lambda}^*$ est non-spécial si et seulement si \mathcal{L}_λ est non-spécial.*

Notons U_C l'ensemble des λ tels que tout $\mathcal{F} \in \mathbb{G}_{C,\lambda}^*$ est non-spécial. C'est un ouvert de Zariski de $\mathbb{P}_\mathbb{C}^{r-1}$. Signalons que U_C peut être vide si la courbe C a des branches singulières.

Singularités « aimables ». Nous allons caractériser les types $\epsilon(C)$ pour lesquelles on a $U_C \neq \emptyset$. Rappelons que $\epsilon(C)$ peut se décrire à partir du *graphe dual* $\mathcal{D}(C)$ (voir par exemple [1]), dont les sommets représentent les diviseurs exceptionnels de π_C , avec leur auto-intersection, et les flèches représentent les composantes irréductibles de C . Le premier diviseur E_1 oriente le graphe. Étant donné un diviseur E quelconque, on l'attache la multiplicité $m(E)$ correspondante à la projection par π_C d'une « curvette » transverse à E . Une *branche morte* se définit comme celle qui va d'un diviseur de bifurcation (valence ≥ 3) jusqu'à un diviseur terminal (de valence 1) différent de E_1 , sans passer par d'autres bifurcations. Notons que lorsque toutes les C_i sont non singulières il n'y a pas de branches mortes, la réciproque n'est pas vraie.

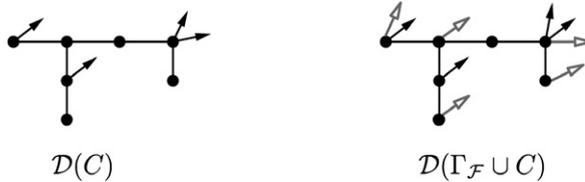
Définition 6. Nous dirons que $\epsilon(C)$ est *aimable* si pour toute branche morte de $\mathcal{D}(C)$ avec diviseur de bifurcation E_b et diviseur terminal E_t on a $m(E_b) = 2m(E_t)$.

Naturellement, s'il n'y a pas de branches mortes le type d'équisingularité est aimable. Dans le cas particulier où C est irréductible, la propriété d'être aimable équivaut à dire que toutes les paires de Puiseux sont de la forme $(m_j, 2)$. Nous avons le résultat de caractérisation suivant

Théorème 7. *L'ouvert U_C est non vide si et seulement si le type d'équisingularité $\epsilon(C)$ est aimable.*

De plus, ce théorème nous permet de déterminer complètement le type d'équisingularité $\wp(\mathcal{F})$ lorsque $\lambda(\mathcal{F}) \in U_C$, au moyen des techniques de ramification et de la forme précise des types aimables. Donnons-en sa description. La

première propriété est que π_C désingularise $\Gamma_{\mathcal{F}} \cup C$. Par conséquent, pour donner le graphe dual de $\Gamma_{\mathcal{F}} \cup C$ il suffit d'ajouter les flèches correspondantes à $\Gamma_{\mathcal{F}}$ au graphe $\mathcal{D}(C)$. On ajoute exactement une flèche à chaque extrémité de branche morte et $\beta(E)$ flèches à chaque diviseur E de bifurcation, où la valence de E est $\beta(E) + 1$ lorsque $E = E_1$, $\beta(E) + 3$ si E est dans une branche morte et $\beta(E) + 2$ autrement.



Exemples non aimables. La propriété « π_C désingularise $\Gamma_{\mathcal{F}} \cup C$ » n'implique pas que \mathcal{F} soit non-spécial. Elle ne fixe pas non plus le type d'équisingularité $\wp(\mathcal{F})$, même à $\lambda(\mathcal{F})$ fixe. Nous présentons ici trois exemples avec $f = y^5 - x^{11}$ pour illustrer cette affirmation. Il sont donnés par les formes différentielles

$$\omega_1 = df ; \quad \omega_2 = df + x^6 y(11y dx - 5x dy) ; \quad \omega_3 = df + x^8(11y dx - 5x dy).$$

Soient E_i , $i = 3, 4, 5, 6, 7$ les diviseurs de la (seule) branche morte de $\mathcal{D}(C)$, où E_3 est l'extrémité et E_7 le diviseur de bifurcation. Pour $\wp(\mathcal{F}_1)$ on met deux flèches sur E_4 , pour $\wp(\mathcal{F}_2)$ on met une flèche sur E_3 et une autre sur E_5 , finalement, pour $\wp(\mathcal{F}_3)$ on met une seule flèche sur E_6 . Signalons que ce dernier type semble être le type générique obtenu par Casas-Alvero [3] en faisant varier le type analytique de la courbe C , dans le cas hamiltonien.

Références

- [1] E. Brieskorn, H. Knörrer, *Plane Algebraic Curves*, Birkhäuser, Basel, 1986.
- [2] C. Camacho, A. Lins Neto, P. Sad, Topological invariants and equidesingularisation for holomorphic vector fields, *J. Differential Geom.* 20 (1) (1984) 143–174.
- [3] E. Casas-Alvero, *Singularities of Plane Curves*, London Math. Soc. Lecture Notes Series, vol. 276, Cambridge University Press, 2000.
- [4] N. Corral, Sur la topologie des courbes polaires de certains feuilletages singuliers, *Ann. Inst. Fourier* 53 (3) (2003) 787–814.
- [5] E. García-Barroso, Sur les courbes polaires d'une courbe plane réduite, *Proc. London Math. Soc.* 81 (1) (2000) 1–28.
- [6] T.C. Kuo, Y.C. Lu, On analytic function germs of two complex variables, *Topology* 16 (1977) 299–310.
- [7] M. Merle, Invariants polaires des courbes planes, *Invent. Math.* 41 (1977) 103–111.
- [8] P. Rouillé, Théorème de Merle : cas des 1-formes de type courbes généralisées, *Bol. Soc. Bras. Mat.* 30 (3) (1999) 293–314.
- [9] A. Seidenberg, Reduction of singularities of the differential equation $A dY = B dX$, *Amer. J. Math.* 90 (1968) 248–269.