Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007) 753–758
Comptes Rendus Mathematique
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Analyse complexe

Sur l'existence du nombre de Lelong d'un courant positif psh défini sur une variété presque complexe

Fredj Elkhadhra, Souad Khemiri Mimouni

Faculté des sciences de Monastir, 5019 Monastir, Tunisie

Reçu le 18 août 2006 ; accepté après révision le 3 avril 2007

Disponible sur Internet le 5 juin 2007

Présenté par Jean-Pierre Demailly

Résumé

L'objet de cette Note est d'étendre aux variétés presque complexes l'existence du nombre de Lelong d'un courant positif plurisousharmonique (psh). On généralise ainsi les résultats de Lelong et Skoda établis dans le cas où la structure est intégrable, et de Haggui dans le cas non intégrable, mais seulement pour un courant positif fermé. On montre pour ceci une formule de type Lelong–Jensen pour un courant positif psh sur une variété presque complexe, qui généralise une formule démontré par Demailly dans le cas où la structure est intégrable. ***Pour citer cet article : F. Elkhadhra, S.K. Mimouni, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***

Abstract

On the existence of Lelong numbers of a positive psh current defined on almost complex manifolds. The goal of this Note is to extend to an almost complex manifold the existence of the Lelong number of a positive plurisubharmonic (psh) current. In this way, we generalize results of Lelong and Skoda established in the case of an integrable complex structure, and of Haggui in the non-integrable case, but only for a closed positive current. The main point is to establish a Lelong–Jensen formula for a positive psh current defined on an almost complex manifold, which generalizes a formula proved by Demailly when the structure is integrable. ***To cite this article: F. Elkhadhra, S.K. Mimouni, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***

Abridged English version

Let (M, J) be a smooth almost complex manifold of real dimension $2n$. The exterior differential d is equal to $\partial + \bar\partial - \theta - \bar\theta$ where the operators $\partial, \bar\partial, \theta, \bar\theta$ are of type $(1,0)$, $(0,1)$, $(2,-1)$, $(-1,2)$ respectively. The structure J is integrable if and only if the torsion θ vanishes i.e. $d = \partial + \bar\partial$. Let $a \in M$ be any point. Then there exists $(z_1, \dots, z_n)$ a coordinate system at a such that $\bar\partial z_j = \mathrm{O}(|z|)$ and $\partial \bar z_j = \mathrm{O}(|z|)$. We use the notation

$$\beta = \frac{\mathrm{i}}{2} d\bar\partial |z|^2, \quad \alpha = \frac{\mathrm{i}}{2} d\bar\partial \log |z|^2, \quad \beta_1 = \frac{\mathrm{i}}{2} \sum_{j=1}^n \partial z_j \wedge \bar\partial \bar z_j, \quad \alpha_1 = -\frac{\mathrm{i}}{2} \frac{1}{|z|^4} \left(\sum_{j=1}^n \bar z_j \partial z_j \right) \wedge \left(\sum_{j=1}^n z_j \bar\partial \bar z_j \right) + \frac{\beta_1}{|z|^2}.$$

Adresses e-mail : fredj.elkhadhra@fsm.rnu.tn (F. Elkhadhra), souad.khemiri@fsm.rnu.tn (S.K. Mimouni).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2007.04.006

Following calculations made in [3], we have

$$\theta\bar\partial|z|^2=\mathrm{O}\big(|z|\big)^{(2,0)},\quad \bar\partial^2|z|^2=\mathrm{O}\big(|z|\big)^{(0,2)},\quad \frac{\mathrm i}{2}\partial\bar\partial|z|^2=\beta_1+\mathrm{O}\big(|z|\big)^{(1,1)},\quad \frac{\mathrm i}{2}\partial\bar\partial\log|z|^2=\alpha_1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{|z|}\right)^{(1,1)}.$$

It follows that

$$\beta=\frac{\mathrm i}{2}\partial\bar\partial|z|^2-\frac{\mathrm i}{2}\theta\bar\partial|z|^2+\frac{\mathrm i}{2}\bar\partial^2|z|^2=\beta_1+\mathrm{O}\big(|z|\big)^{(1,1)}+\mathrm{O}\big(|z|\big)^{(2,0)}+\mathrm{O}\big(|z|\big)^{(0,2)},$$
$$\alpha=\frac{\mathrm i}{2}\partial\bar\partial\log|z|^2-\frac{\mathrm i}{2}\frac{\theta\bar\partial|z|^2}{|z|^2}+\frac{\mathrm i}{2}\frac{\bar\partial^2|z|^2}{|z|^2}=\alpha_1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{|z|}\right)^{(1,1)}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{|z|}\right)^{(2,0)}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{|z|}\right)^{(0,2)}.$$

A current T of bidimension (p,p) on (M,J) is said to be *plurisubharmonic* (*psh*) if $\mathrm i\partial\bar\partial T$ is positive. Let $\sigma_T(r)=\int_{B(r)}T\wedge\beta_1^p$, $\nu_T(r)=\sigma_T(r)/\tau_p r^{2p}$, where τ_p is the volume of the unit ball in $\mathbb C^p$ and $B(r)=\{z,\ |z|<r\}$ is the coordinate ball of radius r. Our main result is:

Main Theorem. *Let T be a positive psh current of bidimension (p,p) on an almost complex manifold (M,J). Then the limit $\lim_{r\to0}\nu_T(r)$ exists.*

If T is closed, we recover a result of [3]. When the structure J is integrable, the Newlander–Nirenberg theorem implies that J is defined by a unique almost analytic structure, thus Main Theorem generalizes a result of [5] and the known one of Lelong [4] established for T closed.

Throughout this note we let β_{p-1} (resp. α_{p-1}) be the component of type $(p-1,p-1)$ in β^{p-1} (resp. α^{p-1}). Let $B(t_1,t_2)=\{z\in\mathbb C^n;\ t_1<|z|<t_2\}$ and $S(t)=\{z\in\mathbb C^n;\ |z|=t\}$. To prove the Main Theorem we generalize the Lelong–Jensen formula for positive psh currents T of bidimension (p,p) on an almost complex manifold (M,J).

As a consequence of this generalization, we obtain:

Corollary. *Let T be a current as in Main Theorem.*

1) [3] *If $dT=0$, then* $\frac{1}{r_2^{2p}}\int_{B(r_2)}T\wedge\beta^p-\frac{1}{r_1^{2p}}\int_{B(r_1)}T\wedge\beta^p=\int_{B(r_1,r_2)}T\wedge\alpha^p$.
2) [2] *If J is integrable, then* $\tau_p(\nu_T(r_2)-\nu_T(r_1))=\int_{B(r_1,r_2)}T\wedge\alpha^p+\left(\frac{1}{r_1^{2p}}-\frac{1}{r_2^{2p}}\right)\int_0^{r_1}t\,dt\int_{B(t)}\mathrm i\partial\bar\partial T\wedge\beta^{p-1}+\int_{r_1}^{r_2}\left(\frac{1}{t^{2p}}-\frac{1}{r_2^{2p}}\right)t\,dt\int_{B(t)}\mathrm i\partial\bar\partial T\wedge\beta^{p-1}$.

As a consequence of the Main Theorem, we obtain the following generalization of a result of [1] when the structure J is integrable:

Proposition. *Let T be a positive psh current of bidimension (p,p) on an almost complex manifold (M,J). If the current $\mathrm i\partial\bar\partial T$ is psh, then its Lelong numbers exist at every point of M and are equal to zero.*

1. Introduction

Dans la suite soit (M,J) une variété presque complexe de classe $\mathcal C^\infty$ et de dimension réelle $2n$. Soit d la différentielle extérieur on a $d=\partial+\bar\partial-\theta-\bar\theta$, où les opérateurs $\partial,\bar\partial,\theta,\bar\theta$ sont de types respectifs $(1,0)$, $(0,1)$, $(2,-1)$, $(-1,2)$. La structure J est intégrable si et seulement si la torsion θ est nulle ou encore $d=\partial+\bar\partial$. Soit $a\in M$ quelconque, il existe $(z_1,\dots,z_n)$ un système de coordonnées presque holomorphe au voisinage de a tel que $\bar\partial z_j=\mathrm O(|z|)$ et $\partial\bar z_j=\mathrm O(|z|)$. Nous notons

$$\beta=\frac{\mathrm i}{2}d\bar\partial|z|^2,\quad \alpha=\frac{\mathrm i}{2}d\bar\partial\log|z|^2,\quad \beta_1=\frac{\mathrm i}{2}\sum_{j=1}^n\partial z_j\wedge\bar\partial\bar z_j,\quad \alpha_1=-\frac{\mathrm i}{2}\frac{1}{|z|^4}\left(\sum_{j=1}^n\bar z_j\partial z_j\right)\wedge\left(\sum_{j=1}^n z_j\bar\partial\bar z_j\right)+\frac{\beta_1}{|z|^2}.$$

D'après des calculs faits dans [3], on a

$$\theta\bar\partial|z|^2 = \mathrm{O}\big(|z|\big)^{(2,0)}, \quad \bar\partial^2|z|^2 = \mathrm{O}\big(|z|\big)^{(0,2)}, \quad \frac{\mathrm{i}}{2}\partial\bar\partial|z|^2 = \beta_1 + \mathrm{O}\big(|z|\big)^{(1,1)}, \quad \frac{\mathrm{i}}{2}\partial\bar\partial\log|z|^2 = \alpha_1 + \mathrm{O}\bigg(\frac{1}{|z|}\bigg)^{(1,1)}.$$

Il s'ensuit que

$$\beta = \frac{\mathrm{i}}{2}\partial\bar\partial|z|^2 - \frac{\mathrm{i}}{2}\theta\bar\partial|z|^2 + \frac{\mathrm{i}}{2}\bar\partial^2|z|^2 = \beta_1 + \mathrm{O}\big(|z|\big)^{(1,1)} + \mathrm{O}\big(|z|\big)^{(2,0)} + \mathrm{O}\big(|z|\big)^{(0,2)},$$
$$\alpha = \frac{\mathrm{i}}{2}\partial\bar\partial\log|z|^2 - \frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\theta\bar\partial|z|^2}{|z|^2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\bar\partial^2|z|^2}{|z|^2} = \alpha_1 + \mathrm{O}\bigg(\frac{1}{|z|}\bigg)^{(1,1)} + \mathrm{O}\bigg(\frac{1}{|z|}\bigg)^{(2,0)} + \mathrm{O}\bigg(\frac{1}{|z|}\bigg)^{(0,2)}.$$

Un courant T de bidimension (p,p) défini sur (M,J) est dit *plurisousharmonique* (*psh*) si $\mathrm{i}\partial\bar\partial T$ est un courant positif. Ce courant n'est pas nécessairement fermé si la structure J n'est pas intégrable. Posons $\sigma_T(r) = \int_{B(r)} T \wedge \beta_1^p$, $\nu_T(r) = \sigma_T(r)/(\tau_p r^{2p})$, où τ_p est le volume de la boule unité de $\mathbb{C}^p$ et $B(r) = \{z,\ |z| < r\}$.

Théorème Principal. *Si T est un courant positif psh de bidimension (p,p) sur (M,J), alors la limite* $\lim_{r\to 0}\nu_T(r)$ *existe.*

Si T est positif fermé on retrouve un résultat de [3]. Si J est intégrable, compte tenu du théorème d'intégrabilité de Newlander–Nirenberg, on retrouve un résultat de [5] ct le fameux résultat de Lelong [4] établi pour T fermé.

Démonstration du Théorème Principal. La démonstration du Théorème Principal passe par une formule de type Lelong–Jensen dans le cas des variétés presque complexes. Dans la suite on note β_{p-1} (resp. α_{p-1}) la composante de type $(p-1,p-1)$ dans β^{p-1} (resp. α^{p-1}). Soit $B(t_1,t_2) = \{z \in \mathbb{C}^n;\ t_1 < |z| < t_2\}$ et $S(t) = \{z \in \mathbb{C}^n;\ |z| = t\}$. $\square$

Proposition 1. *Soit T un courant positif psh de bidimension (p,p) sur (M,J). Alors on a la formule*

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r_2^{2p}}\int_{B(r_2)}\bigg(T\wedge\beta^p + \frac{\mathrm{i}}{2}\bar\theta T\wedge\partial|z|^2\wedge\beta^{p-1}\bigg) - \frac{1}{r_1^{2p}}\int_{B(r_1)}\bigg(T\wedge\beta^p + \frac{\mathrm{i}}{2}\bar\theta T\wedge\partial|z|^2\wedge\beta^{p-1}\bigg)\\
&\quad= \int_{B(r_1,r_2)}\bigg(T\wedge\alpha^p + \frac{\mathrm{i}}{2}\bar\theta T\wedge\partial\log|z|^2\wedge\alpha^{p-1}\bigg)\\
&\qquad+ \bigg(\frac{1}{r_1^{2p}} - \frac{1}{r_2^{2p}}\bigg)\int_0^{r_1} t\,dt\int_{B(t)}\mathrm{i}\partial\bar\partial T\wedge\beta^{p-1} + \int_{r_1}^{r_2}\bigg(\frac{1}{t^{2p}} - \frac{1}{r_2^{2p}}\bigg)t\,dt\int_{B(t)}\mathrm{i}\partial\bar\partial T\wedge\beta^{p-1}\\
&\qquad- \bigg(\frac{1}{r_1^{2p}} - \frac{1}{r_2^{2p}}\bigg)\int_0^{r_1} t\,dt\int_{S(t)} T\wedge\mathrm{i}\partial\beta_{p-1} - \int_{r_1}^{r_2}\bigg(\frac{1}{t^{2p}} - \frac{1}{r_2^{2p}}\bigg)t\,dt\int_{S(t)} T\wedge\mathrm{i}\partial\beta_{p-1}\\
&\qquad+ \bigg(\frac{1}{r_1^{2p}} - \frac{1}{r_2^{2p}}\bigg)\int_0^{r_1} t\,dt\int_{B(t)} T\wedge\mathrm{i}\bar\partial\partial\beta_{p-1} + \int_{r_1}^{r_2}\bigg(\frac{1}{t^{2p}} - \frac{1}{r_2^{2p}}\bigg)t\,dt\int_{B(t)} T\wedge\mathrm{i}\bar\partial\partial\beta_{p-1}.
\end{aligned}\tag{LJ}$$

La formule (LJ) reste vraie si les courants T et $\mathrm{i}\partial\bar\partial T$ sont d'ordre zéro.

Corollaire 2. *Soit T comme dans la Proposition* 1.

1) [3] *Si $dT = 0$, on a* $\frac{1}{r_2^{2p}}\int_{B(r_2)} T\wedge\beta^p - \frac{1}{r_1^{2p}}\int_{B(r_1)} T\wedge\beta^p = \int_{B(r_1,r_2)} T\wedge\alpha^p$.
2) [2] *Si J est intégrable,* $\tau_p(\nu_T(r_2) - \nu_T(r_1)) = \int_{B(r_1,r_2)} T\wedge\alpha^p + (\frac{1}{r_1^{2p}} - \frac{1}{r_2^{2p}})\int_0^{r_1} t\,dt\int_{B(t)}\mathrm{i}\partial\bar\partial T\wedge\beta^{p-1} + \int_{r_1}^{r_2}(\frac{1}{t^{2p}} - \frac{1}{r_2^{2p}})t\,dt\int_{B(t)}\mathrm{i}\partial\bar\partial T\wedge\beta^{p-1}$.

Démonstration. On suppose tout d'abord que T est $\mathcal{C}^\infty$. D'après Stokes

$$\begin{aligned}\int_{B(r_1,r_2)} T\wedge\alpha^p &= \frac{\mathrm{i}}{2}\int_{B(r_1,r_2)} T\wedge d\bar\partial\log|z|^2\wedge\alpha^{p-1}\\ &= \frac{\mathrm{i}}{2}\int_{B(r_1,r_2)} d\big(T\wedge\bar\partial\log|z|^2\wedge\alpha^{p-1}\big) - \frac{\mathrm{i}}{2}\int_{B(r_1,r_2)} dT\wedge\bar\partial\log|z|^2\wedge\alpha^{p-1} = (a)+(b).\end{aligned}$$

Soit $j_t : S(t)\hookrightarrow\mathbb{C}^n$. Comme $j_t^* d|z|^2=0$ et $d\bar\partial\log|z|^2=\frac{d\bar\partial|z|^2}{|z|^2}-\frac{d|z|^2\wedge\bar\partial|z|^2}{|z|^4}$, on a $j_t^*\alpha=\frac{1}{t^2}j_t^*\beta$. Ceci implique que $j_t^*\alpha_{p-1}=\frac{1}{t^{2p-2}}j_t^*\beta_{p-1}$. D'après le théorème de Fubini il vient $\int_{B(r_1,r_2)} dT\wedge d\log|z|^2\wedge\alpha^{p-1}=0$, donc

$$\begin{aligned}(b) &= \frac{\mathrm{i}}{2}\int_{B(r_1,r_2)} dT\wedge\partial\log|z|^2\wedge\alpha^{p-1} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\int_{B(r_1,r_2)} \partial\log|z|^2\wedge\bar\partial T\wedge\alpha^{p-1} - \frac{\mathrm{i}}{2}\int_{B(r_1,r_2)} \bar\theta T\wedge\partial\log|z|^2\wedge\alpha^{p-1}\\ &= (c)+(d).\end{aligned}$$

Par raison de bidegré, le théorème de Stokes implique les égalités

$$\int_{B(t)}\bar\partial T\wedge d\beta_{p-1} = \int_{B(t)} dT\wedge\partial\beta_{p-1} = \int_{S(t)} T\wedge\partial\beta_{p-1} - \int_{B(t)} T\wedge\bar\partial\partial\beta_{p-1},$$

$$\begin{aligned}(c) &= -\frac{\mathrm{i}}{2}\int_{B(r_1,r_2)} d\log|z|^2\wedge\bar\partial T\wedge\alpha_{p-1} = -\int_{r_1}^{r_2}\frac{dt}{t^{2p-1}}\int_{B(t)}\mathrm{i}d\bar\partial T\wedge\beta_{p-1} + \int_{r_1}^{r_2}\frac{dt}{t^{2p-1}}\int_{B(t)}\mathrm{i}\bar\partial T\wedge d\beta_{p-1}\\ &= -\int_{r_1}^{r_2}\frac{dt}{t^{2p-1}}\int_{B(t)}\mathrm{i}\partial\bar\partial T\wedge\beta^{p-1} + \int_{r_1}^{r_2}\frac{dt}{t^{2p-1}}\int_{S(t)} T\wedge\mathrm{i}\partial\beta_{p-1} - \int_{r_1}^{r_2}\frac{dt}{t^{2p-1}}\int_{B(t)} T\wedge\mathrm{i}\bar\partial\partial\beta_{p-1}.\end{aligned}$$

On pose $I(r)=\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{1}{r^{2p}}\int_{S(r)} T\wedge\bar\partial|z|^2\wedge\beta^{p-1}$. On a alors

$$\begin{aligned}\int_{B(r_1,r_2)} T\wedge\alpha^p &= I(r_2)-I(r_1) - \int_{r_1}^{r_2}\frac{dt}{t^{2p-1}}\int_{B(t)}\mathrm{i}\partial\bar\partial T\wedge\beta^{p-1} + \int_{r_1}^{r_2}\frac{dt}{t^{2p-1}}\int_{S(t)} T\wedge\mathrm{i}\partial\beta_{p-1}\\ &\quad - \int_{r_1}^{r_2}\frac{dt}{t^{2p-1}}\int_{B(t)} T\wedge\mathrm{i}\bar\partial\partial\beta_{p-1} - \frac{\mathrm{i}}{2}\int_{B(r_1,r_2)}\bar\theta T\wedge\partial\log|z|^2\wedge\alpha^{p-1}.\end{aligned}\tag{1}$$

Comme $I(r)=\frac{1}{r^{2p}}\int_{B(r)} T\wedge\beta^p+\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{1}{r^{2p}}\int_{B(r)} dT\wedge\bar\partial|z|^2\wedge\beta^{p-1}$. On remplace $\log|z|^2$ par $|z|^2$ dans le calcul précédent de (b) et (c), on a

$$\begin{aligned}-\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{1}{r^{2p}}\int_{B(r)} dT\wedge\bar\partial|z|^2\wedge\beta^{p-1} &= -\frac{1}{r^{2p}}\int_0^r t\,dt\int_{B(t)}\mathrm{i}\partial\bar\partial T\wedge\beta^{p-1}\\ &\quad + \frac{1}{r^{2p}}\int_0^r t\,dt\int_{S(t)} T\wedge\mathrm{i}\partial\beta_{p-1} - \int_{r_1}^{r_2}\frac{dt}{t^{2p-1}}\int_{B(t)} T\wedge\mathrm{i}\bar\partial\partial\beta_{p-1} - \frac{\mathrm{i}}{2}\frac{1}{r^{2p}}\int_{B(r)}\bar\theta T\wedge\partial|z|^2\wedge\beta^{p-1}.\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$I(r_2)-I(r_1) = \frac{1}{r_2^{2p}}\int_{B(r_2)} T\wedge\beta^p - \frac{1}{r_1^{2p}}\int_{B(r_1)} T\wedge\beta^p - \left(\frac{1}{r_1^{2p}}-\frac{1}{r_2^{2p}}\right)\int_0^{r_1} t\,dt\int_{B(t)}\mathrm{i}\partial\bar\partial T\wedge\beta^{p-1}$$

$$+\frac{1}{r_2^{2p}}\int_{r_1}^{r_2} t\,dt\int_{B(t)} \mathrm{i}\partial\bar\partial T\wedge\beta^{p-1}+\left(\frac{1}{r_1^{2p}}-\frac{1}{r_2^{2p}}\right)\int_0^{r_1} t\,dt\int_{S(t)} T\wedge\mathrm{i}\partial\beta_{p-1}$$
$$-\frac{1}{r_2^{2p}}\int_{r_1}^{r_2} t\,dt\int_{S(t)} T\wedge\mathrm{i}\partial\beta_{p-1}-\left(\frac{1}{r_1^{2p}}-\frac{1}{r_2^{2p}}\right)\int_0^{r_1} t\,dt\int_{B(t)} T\wedge\mathrm{i}\bar\partial\partial\beta_{p-1}$$
$$+\frac{1}{r_2^{2p}}\int_{r_1}^{r_2} t\,dt\int_{B(t)} T\wedge\mathrm{i}\bar\partial\partial\beta_{p-1}+\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{1}{r_2^{2p}}\int_{B(r_2)}\bar\theta T\wedge\partial|z|^2\wedge\beta^{p-1}-\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{1}{r_1^{2p}}\int_{B(r_1)}\bar\theta T\wedge\partial|z|^2\wedge\beta^{p-1}.$$

En utilisant l'égalité (1), on a la formule voulue. Supposons que T ne soit pas de classe $\mathcal{C}^\infty$. Soit $T_\varepsilon = T*\rho_\varepsilon$ (où ρ_ε est un noyau régularisant habituel) et E l'ensemble des r tel que $S(r)$ n'est pas négligeable par rapport à l'une des mesures masses de T ou $\mathrm{i}\partial\bar\partial T$. Cet ensemble E est au plus dénombrable. On applique la formule (LJ) à T_ε lorsque $r_1, r_2\notin E$ puis on passe à la limite quand ε tend vers zéro. Si $r_1, r_2\in E$, il suffit d'écrire (LJ) pour deux suites $r_1^j, r_2^j\notin E$ qui convergent vers r_1 et r_2 puis on passe à la limite. $\square$

Nous sommes maintenant en mesure maintenant de prouver le résultat principal :

Lemme. *On a* $\partial\beta_{p-1} = \mathrm{O}(|z|)^{p,p-1}$, $\bar\partial\partial\beta_{p-1} = \mathrm{O}((1+|z|)\beta_1^p)$.

Démonstration du théorème principal. D'après le théorème de Fubini on a

$$-\left(\frac{1}{r_1^{2p}}-\frac{1}{r_2^{2p}}\right)\int_0^{r_1} t\,dt\int_{S(t)} T\wedge\mathrm{i}\partial\beta_{p-1}-\int_{r_1}^{r_2}\left(\frac{1}{t^{2p}}-\frac{1}{r_2^{2p}}\right)t\,dt\int_{S(t)} T\wedge\mathrm{i}\partial\beta_{p-1}$$
$$=\frac{1}{r_2^{2p}}\int_{B(r_2)}\frac{\mathrm{i}}{2}T\wedge\bar\partial|z|^2\wedge\partial\beta_{p-1}-\frac{1}{r_1^{2p}}\int_{B(r_1)}\frac{\mathrm{i}}{2}T\wedge\bar\partial|z|^2\wedge\partial\beta_{p-1}-\int_{B(r_1,r_2)}\frac{\mathrm{i}}{2}T\wedge\frac{\bar\partial|z|^2\wedge\partial\beta_{p-1}}{|z|^{2p-1}}.$$

On pose $\bar\sigma_T(r)=\int_{B(r)}(T\wedge\beta^p-\frac{\mathrm{i}}{2}T\wedge\bar\partial|z|^2\wedge\partial\beta_{p-1}+\frac{\mathrm{i}}{2}\bar\theta T\wedge\partial|z|^2\wedge\beta^{p-1})$ et $\bar\nu_T(r)=\frac{1}{r^{2p}}\bar\sigma_T(r)$. Montrons tout d'abord que $\bar\nu_T(r)$ admet une limite en zéro. La formule (LJ) devient

$$\begin{aligned}\tau_p\bar\nu_T(r_2)-\tau_p\bar\nu_T(r_1)&=\int_{B(r_1,r_2)}\left(T\wedge\alpha^p+\frac{\mathrm{i}}{2}\bar\theta T\wedge\partial\log|z|^2\wedge\alpha^{p-1}-\frac{\mathrm{i}}{2}T\wedge\frac{\bar\partial|z|^2\wedge\partial\beta_{p-1}}{|z|^{2p-1}}\right)\\
&\quad+\left(\frac{1}{r_1^{2p}}-\frac{1}{r_2^{2p}}\right)\int_0^{r_1} t\,dt\int_{B(t)}\mathrm{i}\partial\bar\partial T\wedge\beta^{p-1}+\int_{r_1}^{r_2}\left(\frac{1}{t^{2p}}-\frac{1}{r_2^{2p}}\right)t\,dt\int_{B(t)}\mathrm{i}\partial\bar\partial T\wedge\beta^{p-1}\\
&\quad+\left(\frac{1}{r_1^{2p}}-\frac{1}{r_2^{2p}}\right)\int_0^{r_1} t\,dt\int_{B(t)} T\wedge\mathrm{i}\bar\partial\partial\beta_{p-1}+\int_{r_1}^{r_2}\left(\frac{1}{t^{2p}}-\frac{1}{r_2^{2p}}\right)t\,dt\int_{B(t)} T\wedge\mathrm{i}\bar\partial\partial\beta_{p-1}\\
&=(A)+(B)+(C).\end{aligned}$$

Quitte à considérer les parties réelles des termes de la formule (LJ), on peut supposer que tout les termes sont réels. Vu la décomposition de α, on montre facilement que la composante de type $(p,p-2)$ de α^{p-1} (qui intervient dans l'intégrale $\int_{B(r_1,r_2)}\frac{\mathrm{i}}{2}\bar\theta T\wedge\partial\log|z|^2\wedge\alpha^{p-1}$) est un $\mathrm{O}(\frac{1}{|z|^{2p-3}})^{p,p-2}$. Comme $\partial\log|z|^2=\mathrm{O}(\frac{1}{|z|})$, d'après l'expression locale de $\bar\theta T$ et l'inégalité de Demailly $|T_{IJ}|\leqslant 2^p\sum_{I\cap J\subset M} T_{MM}$, où les T_{IJ} sont les coefficients de T, on a

$$\int_{B(r_1,r_2)}\frac{\mathrm{i}}{2}\bar\theta T\wedge\partial\log|z|^2\wedge\alpha^{p-1}\geqslant\frac{-c}{r_1^{2p-2}}\int_{B(r_1,r_2)} T\wedge\beta_1^p=\frac{-c}{r_1^{2p-2}}\big(\sigma_T(r_2)-\sigma_T(r_1)\big).$$

D'après le lemme on a $\bar\partial|z|^2 \wedge \partial\beta_{p-1} = \mathrm{O}(|z|^2)$, donc $\int_{B(r_1,r_2)} \frac{\mathrm{i}}{2} T \wedge \frac{\bar\partial|z|^2\wedge\partial\beta_{p-1}}{|z|^{2p-1}} \geqslant \frac{-c}{r_1^{2p-3}}(\sigma_T(r_2) - \sigma_T(r_1))$. L'expression de α donne $T \wedge \alpha^p = T \wedge \alpha_1^p + T \wedge \mathrm{O}(\frac{\beta_1^p}{|z|^{2p-1}})$, on a donc $(A) \geqslant \frac{-c}{r_1^{2p-1}}(1 + r_1 + r_1^2)(\sigma_T(r_2) - \sigma_T(r_1)) \geqslant \frac{-c_1}{r_1^{2p-1}}(\sigma_T(r_2) - \sigma_T(r_1))$ pour $r_1 \ll 1$. D'après l'expression de β on a $\mathrm{i}\partial\bar\partial T \wedge \beta^{p-1} = \mathrm{i}\partial\bar\partial T \wedge \beta_1^{p-1} + \mathrm{i}\partial\bar\partial T \wedge \mathrm{O}(|z|\beta_1^{p-1})$. Comme T est psh, on a $(B) \geqslant 0$ pour r_2 assez petit. D'après le lemme on a $(C) \geqslant -c(\frac{1}{r_1^{2p}} - \frac{1}{r_2^{2p}}) \int_0^{r_2} t(1+t)\sigma_T(t)\,dt \geqslant -c(\frac{1}{r_1^{2p}} - \frac{1}{r_2^{2p}}) r_2^2(1 + r_2)\sigma_T(r_2)$. Il en résulte par tout les minorations précédentes que pour $r_2 \ll 1$ on a

$$\bar\nu_T(r_2) - \bar\nu_T(r_1) \geqslant \frac{-c}{\tau_p r_1^{2p-1}}\big(\sigma_T(r_2) - \sigma_T(r_1)\big) - \frac{c}{\tau_p}\left(\frac{1}{{r_1}^{2p}} - \frac{1}{{r_2}^{2p}}\right) r_2\sigma_T(r_2). \tag{2}$$

D'autre part vu la décomposition de β on a $T \wedge \beta^p = T \wedge \beta_1^p + T \wedge \mathrm{O}(|z|\beta_1^p)$ donc d'après le lemme et l'inégalité de Demailly on a

$$\begin{aligned}\bar\sigma_T(r_2) - \bar\sigma_T(r_1) &= \int\limits_{B(r_1,r_2)} \left(T \wedge \beta^p - \frac{\mathrm{i}}{2} T \wedge \bar\partial|z|^2 \wedge \partial\beta_{p-1} + \frac{\mathrm{i}}{2}\bar\theta T \wedge \partial|z|^2 \wedge \beta^{p-1}\right) \\ &\geqslant \big(1 - c\big(r_2 + r_2^2\big)\big) \int\limits_{B(r_1,r_2)} T \wedge \beta_1^p = \big(1 - c\big(r_2 + r_2^2\big)\big(\sigma_T(r_2) - \sigma_T(r_1)\big)\big).\end{aligned}$$

De même pour tout $r > 0$, on a $(1 - c(r + r^2))\sigma_T(r) \leqslant \bar\sigma_T(r) \geqslant (1 + c(r + r^2))\sigma_T(r)$. Ceci implique que $\bar\nu_T(r) = (1 + \mathrm{O}(r + r^2))\nu_T(r)$. D'après l'inégalité (2) pour $r_2 \ll 1$, il existe $\delta > 0$ telle que $\bar\nu_T(r_2) - \bar\nu_T(r_1) \geqslant \frac{-\delta}{r_1^{2p-1}}(\bar\sigma_T(r_2) - \bar\sigma_T(r_1)) - \delta(\frac{1}{r_1^{2p}} - \frac{1}{r_2^{2p}}) r_2\bar\sigma_T(r_2)$. Au voisinage de 0^+, $\bar\sigma_T(r)$ est croissante donc $\bar\nu_T(r)$ est presque partout dérivable. Soit r un point de dérivabilité de $\bar\nu_T(r)$ et posons $r_1 = r$, $r_2 = r + h$. Alors quand h tend vers 0^+, l'inégalité précédente donne $\bar\nu_T'(r) \geqslant \frac{-\delta}{r^{2p-1}}(r^{2p}\bar\nu_T'(r) + 2pr^{2p-1}\bar\nu_T(r)) - 2p\delta\bar\nu_T(r) = -4p\delta\bar\nu_T(r) - \delta r\bar\nu_T'(r)$ ou encore $(1 + \delta r)\bar\nu_T'(r) \geqslant -4p\delta\bar\nu_T(r)$. En multipliant par $(1 + \delta r)^{4p-1}$, on a $((1 + \delta r)^{4p}\bar\nu_T(r))' \geqslant 0$. D'après la décomposition de Lebesgue de la mesure $\bar\sigma_T'$ en une mesure absolument continue et une mesure singulière, on voit que $((1 + \delta r)^{4p}\bar\nu_T(r))$ est croissante et par suite admet une limite en 0.

D'après [1], si T est un courant positif psh alors le nombre de Lelong du courant $\mathrm{i}\partial\bar\partial T$ est nul. Comme conséquence du théorème principal, nous pouvons énoncer une généralisation de ce résultat dans le cadre des variétés presque complexes. □

Proposition 3. *Soit T un courant positif psh sur une variété presque complexe (M, J). Si le courant $\mathrm{i}\partial\bar\partial T$ est psh, alors son nombre de Lelong existe en tout point de M et vaut zéro.*

Problème ouvert. Dans le Théorème Princpal est-ce que le nombre de Lelong est indépendant de système des cordonnées choisi ?

Références

[1] L. Alessandrini, G. Bassanelli, Lelong numbers of positive plurisubharmonic currents, Results Math. 30 (1996) 191–224.
[2] J.-P. Demailly, Formule de Jensen en plusieurs variables et applications arithmétiques, Bull. Soc. Math. France 110 (1982) 75–102.
[3] F. Haggui, Sur l'existence du nombre de Lelong d'un courant positif fermé défini sur une variété presque complexe, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 332 (2001) 299–304.
[4] P. Lelong, Plurisubharmonic Functions and Positive Differential Forms, Gordon and Breach, Dunod, New York, Paris, 1969.
[5] H. Skoda, Prolongement des courants positifs, fermés de masse finie, Invent. Math. 66 (1982) 361–376.