

Automatique théorique

Une méthode d'identification pour un système linéaire à retards

François Ollivier^a, Saïd Moutaouakil^b, Brahim Sadik^b

^a ALIEN, INRIA Futurs & LIX, UMR CNRS 7161, École polytechnique, 91128 Palaiseau cedex, France

^b Département de mathématiques, faculté des sciences Semlalia, B.P. 2390, avenue Safi, Marrakech, Maroc

Reçu le 4 avril 2005; accepté après révision le 3 avril 2007

Disponible sur Internet le 29 mai 2007

Présenté par Pierre-Louis Lions

Résumé

On introduit une classe de méthodes d'identification et d'observation pour un système linéaire à retard de la forme $x^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{(i)}(t) + bu(t-h)$. Celles-ci permettent l'identification simultanée du retard et des paramètres, l'observation de x et de ses dérivées et ne supposent que la connaissance de la sortie x et de l'entrée u , sans autre hypothèse que leur généricité. Elles se révèlent assez robustes au bruit. Utilisées en temps continu, elles permettent de suivre l'évolution de paramètres ou de retards lentement variables. La méthode peut être généralisée à des systèmes avec plusieurs retards, e.g. $x''(t) + ax(t-R_1) = bu(t-R_2)$.

Pour citer cet article : F. Ollivier et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).

© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

A method of identification for a linear delays system. We provide a class of methods for the identification of a linear system with delay of the shape $x^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{(i)}(t) + bu(t-h)$. They allow the simultaneous identification of the parameters and delay, the observation of x and its derivatives, knowing only generic input u and output x . They are robust to the noise. Used in continuous time, they may follow the evolution of slowly varying parameters and noise. The method may be generalized to systems with two or more delays, e.g. $x''(t) + ax(t-R_1) = bu(t-R_2)$. **To cite this article:** F. Ollivier et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).

© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

Time delay systems are known to take an important place in many fields of application. We refer to [5] and the references therein for more details on the subject. We propose a method for parameters and delay identification, related to the method introduced by Fliess and Sira-Ramírez [3,4] (see also [1]).

We write the system $\sum_{i=0}^n a_i x^{(i)}(t) + bu(t) = 0$, with $a_n = -1$. The output is $y = x + w$ where w stands for the noise which is such that $(\int_{T_1}^{T_2} w(\tau) d\tau)/(T_1 - T_2)$ goes to 0 when $T_2 - T_1$ goes to infinity. The main idea is to use a family of functions f_i such that $f_j^{(k)}(T_1) = f_j^{(k)}(T_2) = 0$ for $k < n$. Let $I_{x,f} := \int_{T_1}^{T_2} f(\tau)x(\tau) d\tau$. Integrating

Adresses e-mail : francois.ollivier@lix.polytechnique.fr (F. Ollivier), s.moutaouakil@ucam.ac.ma (S. Moutaouakil), sadik@ucam.ac.ma (B. Sadik).

by parts, we get $I_{x^{(i)}, f_j} = (-1)^i I_{x, f_j^{(i)}}$. So we may estimate the values of the coefficients a_i and b by solving the system $\sum_{i=0}^n ((-1)^i a_i I_{y, f_j^{(i)}}) + b I_{u, f_j} = 0$ for $j = 1, \dots, m$, by the mean squares method. We can estimate x and its derivatives in the same way, using functions g_j $0 \leq j < n$ such that $g_j^{(k)}(T_1) = 0$ for $0 \leq k < n$ and $g_j^{(k)}(T_2) = 0$ for $0 \leq k < j$, with $g_j^{(j)}(T_2) \neq 0$.

In practice we have used $f_j(t) = (T_2 - t)^{n+j} e^{-\lambda(T_2-t)}$, the integration being done between $-\infty$ and the current time. A good approximation of the integrals is obtained by integrating the system $J'_{x,0} = x - \lambda J_{x,0}$ and $J'_{x,j} = j J_{x,j-1} - \lambda J_{x,j}$ if $j > 0$, with initial conditions $J_j(0) = 0$: $J_j(t)$ tends quickly to I_{x, f_j-n+1} for λ great enough. Numerical simulations are given with Example 1.

In Section 3, we consider a delay system $\sum_{i=0}^n a_i x^{(i)}(t) + bu(t-h)$, with $a_n = -1$. We use the notation $I_{x, f, T_1, T_2} = \int_{T_1}^{T_2} f((\tau - T_1)/(T_2 - T_1))x(\tau) d\tau$, where f is such that $f^{(j)}(0) = f^{(j)}(1) = 0$, for $j < m$ with $m \geq n$. Let $E_{(T_1, T_2), x, u}$ denote the equation

$$\sum_{i=0}^n (T_1 - T_2)^{-i} a_i I_{x, f^{(i)}, T_1, T_2} + \sum_{\ell=0}^k b_\ell (T_2 - T_1)^{-\ell} I_{u, f^{(\ell)}, T_1, T_2} + O(h^{\min(k+1, m)}) = 0,$$

where the term $O(h^{\min(k+1, m)})$ is neglected. Solving it by the mean squares method for generic x and u and a generic set S of couples (T_1, T_2) , we get approximations \hat{a}_i of the coefficients and an approximation of delay equal to $\hat{h} = \hat{b}_1/\hat{b}_0$. We can then replace u by $u_{\hat{h}}(t) = u(t - \hat{h})$ in $E_{(T_1, T_2), x, u}$ in order to get an improved approximation and iterate the process. Better precision could be achieved if f is such that $f(t-h) = \sum_{k=0}^p c_k(h) f^{(k)}(t)$, for example with $f(t) = \sin^m(\pi t)$.

In Example 2, we used $f = \sin^2$ on $[0, \pi]$ and investigate the precision of the evaluation depending on the size of the noise. See Table 1 which shows how our method may be improved by using a nonlinear least square method, initialized with our data.

In Example 3, the method is generalized to the two delays system $x''(t) + ax(t - R_1) = bu(t - R_2)$. The standard deviation of our computed values are given in Table 2 for different noise level, stated values being improved by using a nonlinear least square method initialized with our results.

In Section 4, we adapt the method of Section 1 to the delay situation, solving the system

$$\sum_{i=0}^n ((-1)^i a_i I_{y, f_j^{(i)}}) + b_0 I_{u_{\hat{h}}, f_j} + b_1 I_{u_{hh}, f_j} + O(h^2) = 0,$$

where $u_{\hat{h}}(t) = u(t - \hat{h})$ for $|h - \hat{h}| \ll 1$. The delay evaluation is then $\hat{h} + \hat{b}_1/\hat{b}_0$. For $t > T_0$, when \hat{b}_0 does not vanish any more and the evaluation $\hat{h}(0) + \hat{b}_1/\hat{b}_0$ is assumed to be close enough, we take $\hat{h}' = \lambda_{\hat{h}} \hat{b}_1/\hat{b}_0$, so that \hat{h} will converge to h .

Example 3 shows a simulation with $h = 0.5$. Example 4 considers the case of a slowly varying delay. Scilab simulation files are available at url [6].

1. Introduction

Les systèmes à retard sont l'objet de recherches actives, en raison de leur importance dans de nombreux champs d'applications. Nous renvoyons à l'article de synthèse [5] et aux références incluses pour plus de détails. L'identification simultanée du retard et des paramètres demeure un problème difficile, mais crucial pour la mise en œuvre de méthodes de contrôle appropriées.

Nous proposons une méthode qui peut s'interpréter comme une variante de la méthode d'identification et d'observation due à Michel Fliess et Hebertt Sira-Ramirez [3,4], et qui est susceptible de s'adapter à des systèmes à retard. L'article [1] fournit une application plus directe de cette approche.

L'introduction d'un facteur d'oubli permet l'identification et l'observation en continu, ce qui est décrit dans la Section 2 pour des systèmes sans retard et dans la section 4 pour des systèmes à retard.

La Section 3 décrit une méthode d'identification a posteriori. Une simulation permet d'évaluer sa précision en fonction du niveau de bruit. Nous avons utilisé à titre d'exemple des systèmes d'ordre 2, qui correspondent à une

classe de modèles très répandus (voir [2]). Les calculs numériques ont été effectués sur Dell Latitude D400 avec Scilab 3.0, à partir de formules littérales calculées en Maple 9.5.

2. Identification d'un système sans retard

Pour alléger les formules, nous écrivons le système sous la forme : $\sum_{i=0}^n a_i x^{(i)}(t) + bu(t) = 0$, avec $a_n = -1$. La sortie est $y = x + w$, où w désigne le bruit, que nous supposons tel que $(\int_{T_1}^{T_2} w(\tau) d\tau)/(T_2 - T_1)$ tend vers 0 quand $T_2 - T_1$ tend vers l'infini. L'idée de base est d'utiliser une famille de fonctions $f_j, j = 1, \dots, m$ telles que $f_j^{(k)}(T_1) = f_j^{(k)}(T_2) = 0$ pour $k < n$.

On pose $I_{x,f} := \int_{T_1}^{T_2} f(\tau)x(\tau) d\tau$. En intégrant par parties, on aura $I_{x^{(i)}, f_j^{(k)}} = -I_{x^{(i-1)}, f_j^{(k+1)}}$, si $k < n$, et donc $I_{x^{(i)}, f_j} = (-1)^i I_{x, f_j^{(i)}}$. On peut donc calculer la valeur des coefficients a_i et b en résolvant le système

$$\sum_{i=0}^n ((-1)^i a_i I_{y, f_j^{(i)}}) + b I_{u, f_j} = 0$$

pour $j = 1, \dots, m$, si $m \geq n$. Pour $m > n$, ce système sera résolu par la méthode des moindres carrés.

Si l'on se donne une famille $g_j, 0 \leq j < n$ telle que $g_j^{(k)}(T_1) = 0$ pour $0 \leq k < n$ et $g_j^{(k)}(T_2) = 0$ pour $0 \leq k < j$, avec $g_j^{(j)}(T_2) \neq 0$, on obtient alors $I_{x^{(i)}, g_j} = (-1)^i I_{x, g_j^{(i)}} + \sum_{\ell=0}^{i-j} (-1)^{i-\ell-1} g_j^{(i-\ell-1)}(T_2) x^{(\ell)}(T_2)$. On estime $x(T_2), \dots, x^{(n-1)}(T_2)$ en résolvant le système

$$\sum_{i=0}^n \left(\sum_{\ell=0}^{i-j} ((-1)^{i-\ell-1} g_j^{(i-\ell-1)}(T_2) x^{(\ell)}(T_2)) + (-1)^i a_i I_{y, g_j^{(i)}} \right) + b I_{u, g_j} = 0,$$

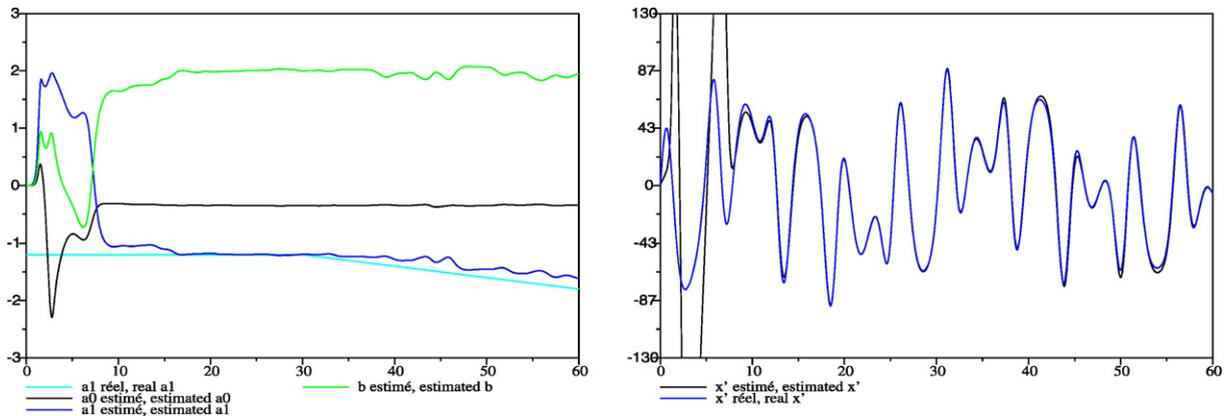
pour $j = 0, \dots, n - 1$. Ces équations se déduisent immédiatement de $\sum_{i=1}^n a_i I_{x^{(i)}, g_j} + b I_{u, g_j} = 0$.

Par exemple, on peut prendre $f_j(t) = (T_2 - t)^{n+j} e^{-\lambda(T_2-t)}$, et $g_j = (T_2 - t)^j e^{-\lambda(T_2-t)}$. Ces fonctions satisfont les hypothèses pour $T_1 = -\infty$. Si l'on pose $J'_{x,0} = x - \lambda J_{x,0}$ et $J'_{x,j} = j J_{x,j-1} - \lambda J_{x,j}$ si $j > 0$, avec les conditions initiales $J_j(0) = 0, J_j(T_2)$ tend vers I_{x, g_j} pour $j = 1, \dots, n - 1$ et vers $I_{x, f_{j-n+1}}$ pour $j \geq n$, quand T_2 tend vers l'infini. La convergence est rapide pour λ suffisamment grand. On a $g'_j = \lambda g_j - j g_{j-1}$ et une relation similaire pour les f_j . On a donc $I_{x^{(i)}, f_j} = \sum_{k=j-1}^{n-1} M_{i,j,k} I_{x, g_k} + \sum_{k=1}^j M_{i,n+j-1,k} I_{x, f_k}$, où les matrices $M_{i,j,k}$ satisfont des relations de récurrence simples, ce qui facilite les calculs. On obtient en un temps t générique et suffisamment grand une bonne approximation des paramètres a_i et b en résolvant le système

$$\sum_{i=0}^n a_i \left(\sum_{k=j-1}^{n-1} M_{i,j,k} I_{y, g_k} + \sum_{k=1}^j M_{i,n+j-1,k} I_{y, f_k} \right) + b I_{u, f_j} = 0,$$

que nous noterons $CA = D$, où $A = (a_1, \dots, a_{n-1}, b)^t$. Comme il se peut pour certaines valeurs le rang du système ne s'annule, il est préférable de ne pas le résoudre directement mais d'en chercher la solution par une méthode de gradient, en se donnant de nouvelles variables \hat{a}_i et \hat{b} , et en intégrant le système $\hat{A}' = -\Lambda C^t(CA - D)$. Ce choix permet de conserver des valeurs précises lorsque C devient mal conditionnée et de réduire encore l'influence du bruit. Les valeurs de λ et de Λ résultent d'un compromis entre la vitesse de convergence souhaitée et la précision recherchée.

Exemple 1. On a pris x solution de l'équation $x'' = a_1 x' + a_0 x + bu$, où $u = 60 \cos(1,23t + 1,3 \sin(t) - 0,7 \cos(0,5t))$, avec les conditions initiales $x(0) = 20$ et $x'(0) = 0,3$. On a choisi un bruit gaussien avec un écart type de 5. La sortie est échantillonnée à 100 Hz. On a pris $b = 2, a_0 = -0,35, a_1(t) = -1,2$ si $t < 30$ et $a_1 = -1,2 - 0,02(t - 30)$ sinon. Les courbes de la Fig. 1 résument les résultats obtenus pour $\lambda = 1$ et $\Lambda = 10^{-3}$. On voit qu'après une phase de convergence, l'approximation obtenue est excellente. La précision de l'évaluation des coefficients est naturellement moins bonne quand a_1 commence à varier. Toutefois, les évaluations de x et x' demeurent assez précises.

Fig. 1. Estimations des coefficients et de x' .Fig. 1. Estimations of the coefficients and x' .

3. Identification avec retards

On considère maintenant un système à retard écrit sous la forme $\sum_{i=0}^n a_i x^{(i)}(t) + bu(t-h)$, avec $a_n = -1$. Soit f une fonction telle que $f^{(j)}(0) = f^{(j)}(1) = 0$, pour $j < m$ avec $m \geq n$. On pose $I_{x,f,T_1,T_2} = \int_{T_1}^{T_2} f((\tau - T_1)/(T_2 - T_1))x(\tau) d\tau$. En intégrant par parties, on déduit de l'équation du système

$$\sum_{i=0}^n (T_1 - T_2)^{-i} a_i I_{x,f^{(i)},T_1,T_2} + b \left(\sum_{\ell=0}^k (T_2 - T_1)^{-\ell} I_{u,f^{(\ell)},T_1,T_2} h^\ell \right) + O(h^{\min(k+1,m)}) = 0.$$

On désignera par $E_{(T_1,T_2),x,u}$ cette équation, où le terme $O(h^{\min(k+1,m)})$ a été négligé et chaque puissance h^ℓ remplacée par b_ℓ/b afin de se ramener à une équation linéaire. Pour x et u génériques, on résoud par moindres carrés le système $E_{s,y,u}$, $s \in S$ en les inconnues a_i et b_ℓ , où S est un ensemble générique d'intervalles d'un cardinal suffisant. On obtient des approximations \hat{a}_i et \hat{b}_0 des coefficients a_i et b et une approximation du retard égale à \hat{b}_1/\hat{b}_0 . La précision du résultat sera d'autant meilleure que le rapport $h/(T_2 - T_1)$ est petit pour chaque couple de S .

Une fois obtenue une approximation h_0 du retard, on améliore la précision du résultat en résolvant le système $E_{s,y,u_{h_0}}$, $s \in S$, où $u_{h_0}(t) = u(t - h_0)$, ce qui donnera la nouvelle approximation $h_0 + \hat{b}_1/\hat{b}_0$. On itère le processus.

Pour de meilleurs résultats, on peut également choisir une fonction f telle que $f(t+h) = \sum_{k=0}^p a_k(h) f^{(k)}$, par exemple $f(t) = t^m(1-t)^m$ ou $\sin^m(\pi t)$.

Exemple 2. Nous avons fait des simulations numériques avec $f(t) = \sin^2(t)$ sur l'intervalle $[0, \pi]$ pour un système d'ordre 2. L'équation $E_{(T_1,T_2),y,u}$ s'écrit alors $(T_1 - T_2)^{-1} a_1 I_{x,f',T_1,T_2} + a_0 I_{x,f,T_1,T_2} + b_0 I_{u,f,T_1,T_2} - b_1 I_{u,\cos(2t),T_1,T_2} + b_2 I_{u,\sin(2t),T_1,T_2} + O(h^2) = (T_1 - T_2)^{-2} I_{x,f'',T_1,T_2}$ et l'on obtient une approximation de h égale à $h_0 + a \cos(\hat{b}_2/\hat{b}_0)$ à partir d'un système $E_{s,u_{h_0}}$, $s \in S$, où h_0 est une estimation préalable du retard.

Les valeurs des coefficients sont les mêmes que celles de l'exemple 1. On a choisi la commande $u = 60 \cos(1,23t + 0,33 * \sin(t) - 0,47 \cos(0,5t))$ et un retard $h = 4$. Le bruit est un bruit gaussien et la fréquence d'échantillonnage est de 500 Hz. On a pris pour S les couples $(10k, 10k + 15)$, $1 \leq k \leq 9$. On part de $h_0 = 0$ et l'on itère les calculs une cinquantaine de fois (en un temps de l'ordre de quelques secondes sur un Dell Latitude D400), ce qui est suffisant pour atteindre un point fixe à la précision numérique près.

Nous avons comparé nos résultats avec une méthode souvent utilisée en pratique qui consiste à évaluer les coefficients par une méthode de moindres carrés non linéaire, pour différentes valeurs du retard régulièrement espacées, et à choisir celle pour lesquelles on approche le mieux la sortie. Cette méthode est inapplicable sur cet exemple avec la méthode de moindre carré non linéaire disponible dans scilab, car celle-ci ne converge vers les paramètres que si elle est initialisée avec des valeurs voisines. Toutefois, les moindres carrés non-linéaires permettent d'améliorer la précision de l'évaluation des paramètres et du retard, une fois initialisés avec les résultats fournis par notre méthode. Le

Tableau 1
Écart type des valeurs calculées

Table 1
Standard deviations of computed values, stated values improved with mean-square

É. bruit	É. a_1	É. a_1^*	É. a_0	É. a_0^*	É. b	É. b^*	É. $x(0)$	É. $x(0)^*$	É. $x'(0)$	É. $x'(0)^*$	É. h	É. h^*
5	0,1	0,002	0,03	0,0005	0,2	0,002	1	0,4	6	0,5	0,07	0,001
10	0,15	0,005	0,06	0,001	0,35	0,005	1,7	0,6	10	0,9	0,1	0,0015

Tableau 2
Moyenne et écart type des valeurs calculées

Table 2
Mean and standard deviations (É.) of computed values

É. du bruit	M. a	É. a	M. b	É. b	M. h_1	É. h_1	M. h_2	É. h_2
0,025	2,69	0,012	1,50	0,006	1,99	0,005	3,99	0,0051
0,2	2,68	0,095	1,48	0,054	1,99	0,039	4,00	0,043

Tableau 1 fournit les valeurs approchées des écarts types obtenus par notre méthode et après utilisation des moindres carrés (*), évaluées sur 100 essais, la durée moyenne d’un calcul étant de 10,5 s.

Ce type de calcul suppose, naturellement l’identifiabilité du système. Si la commande est nulle, la sortie constante etc. celui-ci ne sera pas identifiable et il ne le sera que localement pour un comportement périodique. Notons que nos calculs reposant uniquement sur des résolutions au sens des moindres carrés, il n’y a jamais d’erreurs numériques du type « division par 0 ».

Exemple 3. Cette méthode se généralise au cas de plusieurs retards. Considérons le système $x''(t) + ax(t - h_1) = bu(t - h_2)$. En utilisant $f(t) = 1 - \cos(t)$ sur $[0, 2\pi]$, on a $aI_{u,f,T_1,T_2} + b \sin(h_2/(T_2 - T_1))I_{x,\sin,T_1,T_2} + O(h_2^2) - bI_{x,f,T_1,T_2} - a \sin(h_1/(T_2 - T_1))I_{x,\sin,T_1,T_2} + O(h_1^2) = (T_2 - T_1)^{-2}I_{x,f'',T_1,T_2}$. En choisissant un nombre suffisant d’intervalles $[T_1, T_2]$, on peut évaluer par moindres carrés linéaires des approximations de a , $a \sin(h_1/(T_2 - T_1))$, b et $b \sin(h_1/(T_2 - T_1))$. On en déduit des valeurs de h_1 et h_2 que l’on peut réinjecter dans les équations pour améliorer la précision.

Les simulations ont été faites avec $x = 3 \sin(t/2) + 2 \cos(t/3)$, $a = 2,7$, $b = 1,5$, $h_1 = 2$, $h_2 = 4$. L’échantillonnage est effectué à 500 Hz avec des bruits gaussiens d’écart-types différents. On a pris $T_2 - T_1 = 10$ et 20 intervalles avec T_1 variant par pas de 2 à partir de $T_1 = 15$. Le Tableau 2 donne la moyenne et l’écart-type des valeurs calculées (sur 100 essais, chaque calcul durant environ 1,5 s. avec 10 itérations) pour différents niveaux de bruit. Les valeurs de h_1 et h_2 ne sont naturellement définies que modulo la période 12π de la sortie. La précision du calcul se dégrade si les intervalles n’ont pas une longueur $T_2 - T_1$ suffisamment grande devant h_1 et h_2 , mais aussi pour un signal périodique si $T_2 - T_1$ n’est pas assez petit devant la période.

4. Identification en temps réel avec retard lentement variable

On peut également adapter aux systèmes à retard les méthodes d’identification et d’observation en temps réel introduites dans la section 1. On utilise les équations

$$\sum_{i=0}^n a_i \left(\sum_{k=j-1}^{n-1} M_{i,j,k} I_{y,gk} + \sum_{k=1}^j M_{i,n+j-1,k} I_{y,fk} \right) + b_0 I_{u_{\hat{h}},fj} + b_1 I_{u_{\hat{h}},fj} + O(h^2) = 0,$$

avec $b_\ell = bh^\ell$ et $u_{\hat{h}}(t) = u(t - \hat{h})$. Ceci suppose que $|h - \hat{h}| \ll 1$. On peut s’y ramener quel que soit le retard par un changement d’échelle de temps. L’évaluation du retard est alors $\hat{h} + \hat{b}_1/\hat{b}_0$. On résoud le système par intégration au moyen d’une méthode de gradient comme décrit section 2. Lorsque $t > T_0$, on suppose que les valeurs des estimations sont devenues assez stables (il faut au moins que \hat{b}_0 ne s’annule plus). On pose alors $\hat{h}' = 0$ si $t < T_0$ et $\hat{h}' = \lambda_h b_1/b_0$ sinon. Pour plus de précision, on calcule $I_{u_{\hat{h}},fj}$ en posant $I'_{u_{\hat{h}},fj} = (1 + \lambda_h b_1/b_0)(u_{\hat{h}}(t) - \lambda_h I_{u_{\hat{h}},fj})$.

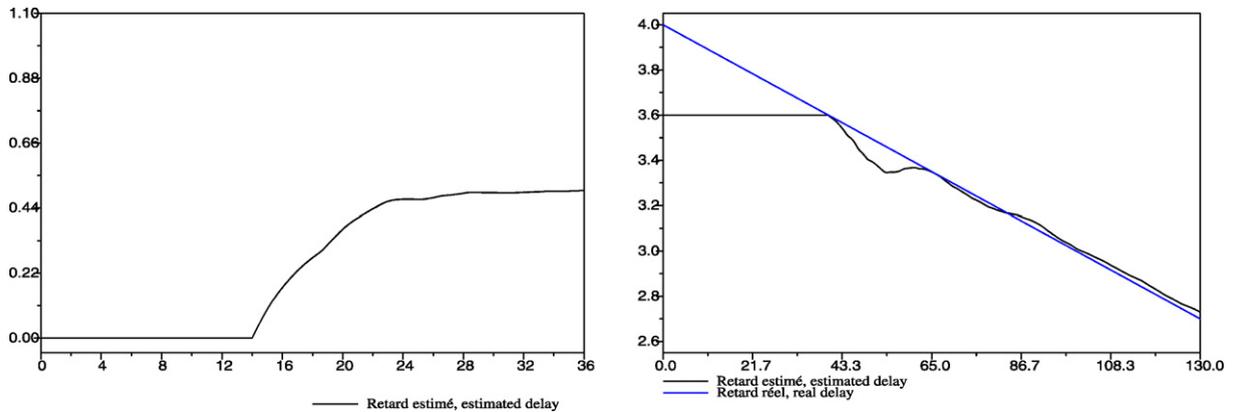


Fig. 2. Estimations du retard, exemples 4 et 5.

Fig. 2. Estimations of the delay, Examples 4 and 5.

Exemple 4. On utilise les mêmes commande, coefficients, type de bruit et fréquence que pour l'exemple 1. On prend $T_0 = 14$, $\lambda = 1$, $\Lambda = 4 \times 10^{-3}$ et $\lambda_h = 0,4$. Le retard $h = 0,5$ est constant et $\hat{h} = 0$ à $t = 0$.

Exemple 5. On utilise les mêmes commande, coefficients, type de bruit et fréquence que pour les exemples 1 et 4. On prend $T_0 = 40$, $\lambda = 1$, $\Lambda = 4 \times 10^{-4}$ et $\lambda_h = 0,4$. Le retard $h = 4 - t/100$ est variable et \hat{h} est initialisé à 3,6 sa valeur à T_0 , afin d'accélérer la convergence.

5. Conclusion

Les méthodes que nous avons introduites permettent un large choix dans leur mise en œuvre. Les quelques essais réalisés montrent qu'elles sont applicables dans des situations réalistes, en particulier avec un niveau de bruit conséquent. Leur capacité à s'adapter à des coefficients ou à un retard lentement variable nous semble un atout intéressant. Les fichiers utilisés pour les simulations sont disponibles *via* l'url [6].

Références

- [1] L. Belkoura, J.-P. Richard, M. Fliess, On-line identification of systems with delayed inputs, MTNS'06, in: 16th Conf. Mathematical Theory of Networks & Systems, 2006.
- [2] M. Fliess, H. Mounier, On a class of delay systems often arising in practice, *Kybernetika* 27 (2000) 295–308.
- [3] M. Fliess, H. Sira-Ramírez, An algebraic framework for linear identification, *ESAIM Contr. Optim. Cal. Var.* 9 (2003) 151–168.
- [4] M. Fliess, H. Sira-Ramírez, Reconstructeurs d'état, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 338 (1) (2004) 91–96.
- [5] J.P. Richard, Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems, *Automatica* 39 (10) (2003) 1667–1694.
- [6] <http://www.lix.polytechnique.fr/~ollivier/>.