Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007) 621–626
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Partial Differential Equations

On Lars Hörmander's remark on the characteristic Cauchy problem

Jean-Philippe Nicolas

Institut de mathématiques de Bordeaux, Université Bordeaux 1, 351, cours de la Libération, 33405 Talence cedex, France

Received 27 November 2005; accepted 6 March 2007

Available online 4 May 2007

Presented by Jean-Michel Bony

Abstract

In 1990, L. Hörmander solved the Cauchy problem for the wave equation on a smooth spatially compact space–time, for data fixed on a Lipschitz and weakly spacelike hypersurface. He concluded his paper by a remark to the effect that his theorems should be valid for a Lipschitz metric. We extend his results to a Lipschitz metric for a spacelike hypersurface and to a metric whose regularity is intermediate between Lipschitz and $\mathcal{C}^1$ for a totally characteristic hypersurface (the Goursat problem). ***To cite this article: J.-P. Nicolas, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***

Résumé

Sur une remarque de Lars Hörmander concernant le problème de Cauchy caractéristique. En 1990, L. Hörmander résolvait le problème de Cauchy pour l'équation des ondes sur un espace–temps régulier spatialement compact et pour des données sur une hypersurface Lipschitz faiblement spatiale. Il concluait son article par une remarque disant que ses théorèmes devaient être valables pour des métriques Lipschitz. Nous étendons ses résultats à une métrique Lipschitz pour une hypersurface spatiale et à une métrique de régularité intermédiaire entre Lipschitz et $\mathcal{C}^1$ pour une hypersurface totalement caractéristique (le problème de Goursat). ***Pour citer cet article : J.-P. Nicolas, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***

Version française abrégée

En 1990, dans un court article [1], Lars Hörmander proposait une méthode pour résoudre le problème de Goursat (i.e. un problème de Cauchy où les données initiales sont fixées sur une hypersurface caractéristique) sur des espaces–temps spatialement compacts, pour une équation des ondes avec une perturbation générique du premier ordre. L'hypersurface sur laquelle les données initiales sont spécifiées est de régularité Lipschitz et est supposée faiblement spatiale, c'est-à-dire que localement, elle peut être spatiale ou caractéristique. Ainsi le travail d'Hörmander permet de résoudre le problème de Cauchy, le problème de Goursat et tout problème intermédiaire. Sa technique est basée sur des estimations d'énergie. Toute la construction est réalisée pour une métrique régulière et des coefficients des termes d'ordre inférieur réguliers. L'article est conclu par une remarque, dans laquelle Hörmander dit que toutes les bornes dans les estimations d'énergie ne dépendant que de la norme Lipschitz de la métrique et des normes L^∞ des

E-mail address: Jean-Philippe.Nicolas@math.u-bordeaux1.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2007.03.010

coefficients du potentiel du premier ordre, ceci doit être la bonne généralité des théorèmes. A notre connaissance, cette remarque n'a pas été vérifiée à ce jour. Cette Note présente des résultats proches de ceux proposés par Hörmander. Le problème de Cauchy est résolu pour une métrique Lipschitz et des coefficients L^∞ pour le potentiel du premier ordre. Pour le problème de Goursat, nous renforçons très légèrement les hypothèses de régularité. Ces résultats sont détaillés et démontrés dans [2].

Nous travaillons sur une variété $\tilde{X} = \mathbb{R}_t \times X$ où X est une variété compacte régulière sans bord. On considère sur X une métrique Riemannienne dépendante du temps $g(t)$, i.e. une fonction sur $\tilde{X}$ à valeurs dans le fibré des 2-formes symétriques sur X. Nous définissons également sur X une mesure régulière $\mathrm{d}\nu$; en coordonnées locales $\mathrm{d}\nu = \gamma \mathrm{d}x$.

Sur $\tilde{X}$, nous considérons l'équation

$$\Box u + L_1 u = 0, \quad \Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \gamma^{-1} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\gamma g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\beta}\right), \tag{1}$$

où L_1 est un opérateur différentiel du premier ordre général

$$L_1 = b^0 \frac{\partial}{\partial t} + b^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + c,$$

dont les coefficients b^0, b^α et c sont des fonctions sur $\tilde{X}$.

Pour le problème de Cauchy, nous travaillons dans le cadre suivant :

(H1) la métrique g est dans $\mathcal{C}^0(\tilde{X}) \cap W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\tilde{X})$, et les coefficients de L_1 appartiennent à $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\tilde{X})$.

Théorème 0.1. *Sous l'hypothesèse* (H1)*, pour une donnée initiale* $(u_0, u_1) \in H^1(X) \oplus L^2(X)$*, l'équation* (1) *admet une unique solution u dans*

$$\mathcal{F} := \mathcal{C}\big(\mathbb{R}_t; H^1(X)\big) \cap \mathcal{C}^1\big(\mathbb{R}_t; L^2(X)\big),$$

telle que

$$u_{|_{t=0}} = u_0, \qquad \partial_t u_{|_{t=0}} = u_1.$$

Nous noterons $\mathcal{E}$ *l'espace des solutions de* (3) *dans* $\mathcal{F}$.

Si L_1 est homogène de degré 1 et annule les termes d'ordre 1 provenant du d'Alembertien simplifié $\Box$, on a alors une équation homogène de degré 2 et ceci nous donne accès à des solutions plus régulières :

Corollaire 0.2. *Pour une métrique g in* $\mathcal{C}^0(\tilde{X}) \cap W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\tilde{X})$*, on considère l'équation*

$$\partial_t^2 u - g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta u = 0 \tag{2}$$

correspondant à (1) *avec*

$$L_1 = \gamma^{-1}\partial_\alpha\big(\gamma g^{\alpha\beta}\big)\partial_\beta.$$

Notons que g et L_1 *vérifient alors l'hypothesèse* (H1)*. En consequence, pour des données initiales* (u_0, u_1) *appartenant à* $H^1(X) \oplus L^2(X)$*,* (2) *admet une unique solution* $u \in \mathcal{F}$ *telle que* $u_{|_{t=0}} = u_0$*,* $\partial_t u_{|_{t=0}} = u_1$*. Si de plus* $(u_0, u_1) \in H^2(X) \oplus H^1(X)$*, alors la solution u vérifie*

$$u \in \bigcap_{l=0}^{2} \mathcal{C}^l\big(\mathbb{R}_t; H^{2-l}(X)\big).$$

Pour le problème de Goursat, nous fixerons les données initiales sur une hypersurface Σ, définie comme le graphe d'une fonction Lipschitzienne φ :

$$\Sigma = \big\{(\varphi(x), x); x \in X\big\}, \quad \varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

supposée caractéristique, c'est-à-dire,

$$g^{\alpha\beta}\big(\varphi(x), x\big)\partial_\alpha\varphi(x)\partial_\beta\varphi(x) = 1 \quad \text{presque partout sur } X.$$

Comme Σ est simplement Lipschitz, nous avons uniquement accès aux espaces de Sobolev $H^s(\Sigma)$ pour $-1 \leqslant s \leqslant 1$. Nous supposons que la métrique g et les coefficients de L_1 ont la régularité suivante :

(H2) $g \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_t; \mathcal{C}^1(X)) \cap W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_t; \mathcal{C}^0(X))$, les coefficients des termes du premier ordre de L_1 sont dans $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_t; \mathcal{C}^0(X))$ et ceux des termes d'ordre 0 appartiennent à $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\tilde{X})$.

Théorème 0.3. *Sous l'hypothèse* (H2)*, l'application*

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_\Sigma : \mathcal{E} &\longrightarrow H^1(\Sigma), \\ u &\longmapsto u_{|\Sigma} \end{aligned}$$

est bien définie et est un isomorphisme.

1. Introduction

In 1990, in a short paper [1], Lars Hörmander proposed a technique for solving the Goursat problem (the characteristic Cauchy problem) on spatially compact space–times, for a wave equation with generic first order perturbation. The hypersurface on which the initial data are specified is merely Lipschitz and is assumed to be weakly spacelike (i.e. it is locally allowed to be either spacelike or null). Thus, the results allow one to solve the Cauchy problem, the Goursat problem, or anything in between. Hörmander's method is entirely based on energy estimates. All the construction is done for a smooth metric and smooth coefficients of the lower order terms of the equation. He concludes his paper by a remark, to the effect that all the bounds in the energy estimates only depend on the Lipschitz norm of the metric and the L^∞ norms of the coefficients of the lower order terms and that consequently the proper generality of the theorems is a Lipschitz metric and L^∞ coefficients for the first order perturbation. To our knowledge, this remark has never been proved. This Note presents some results close to those proposed by Hörmander. The Cauchy problem is solved for a Lipschitz metric and L^∞ coefficients of the first order potential. For the Goursat problem, we work with very slightly more regular metric and first order perturbation. These results are detailed and proved in [2].

2. Geometrical and analytical framework

We work on a manifold $\tilde{X} = \mathbb{R}_t \times X$, where X is a smooth compact manifold without boundary. We consider on X a time dependent Riemannian metric $g(t)$, i.e. a map on $\tilde{X}$ with values in the bundle of symmetric 2-forms on X. We also define $\mathrm{d}\nu$ a fixed smooth density on X ; in local coordinates $\mathrm{d}\nu = \gamma\,\mathrm{d}x$.

On $\tilde{X}$, we consider a wave equation of the form

$$\Box u + L_1 u = 0 \tag{3}$$

where $\Box$ denotes the simplified d'Alembertian

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \gamma^{-1}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\gamma g^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right), \tag{4}$$

and L_1 is a general first order differential operator

$$L_1 = b^0\frac{\partial}{\partial t} + b^\alpha\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + c, \tag{5}$$

whose coefficients b^0, b^α and c are functions on $\tilde{X}$.

We shall specify the initial data for Eq. (3) either on $X_0 := \{0\}_t \times X$ for the Cauchy problem, or on a characteristic hypersurface Σ for the Goursat problem. This hypersurface Σ is defined as the graph of a Lipschitz function φ:

$$\Sigma = \big\{(\varphi(x), x);\ x \in X\big\}, \quad \varphi : X \longrightarrow \mathbb{R} \tag{6}$$

and is assumed to be characteristic, i.e.

$$g^{\alpha\beta}(\varphi(x), x)\partial_\alpha\varphi(x)\partial_\beta\varphi(x) = 1 \quad \text{almost everywhere on } X.$$

On X, we can define Sobolev spaces $H^s(X)$ in the usual manner via local charts. Since Σ is only Lipschitz, we can also define Sobolev spaces on Σ but we only have access to $H^s(\Sigma)$ for $-1 \leqslant s \leqslant 1$. When multiplying Eq. (3) by $\partial_t u$ and integrating by parts on a 4-volume whose boundary contains $X_t = \{t\} \times X$ or Σ, we obtain natural expressions of the energy on X_t,

$$E_t(u) = \int_{X_t} \left\{ |\partial_t u|^2 + g^{\alpha\beta} \partial_\alpha u \partial_\beta \bar{u} + |u|^2 \right\} \mathrm{d}\nu \simeq \left\| u(t) \right\|^2_{H^1(X)} + \left\| \partial_t u(t) \right\|^2_{L^2(X)}$$

and on Σ,

$$E_\Sigma(u) = \int_\Sigma \left\{ |u|^2 + g^{\alpha\beta} (\partial_\alpha u + \partial_\alpha \varphi \partial_t u)(\partial_\beta \bar{u} + \partial_\beta \varphi \partial_t \bar{u}) \right\} \mathrm{d}\nu_\Sigma \simeq \left\| u_{|\Sigma} \right\|^2_{H^1(\Sigma)},$$

where $\mathrm{d}\nu_\Sigma$ is the measure on Σ induced by $\mathrm{d}\nu$ and parametrization (6).

3. Cauchy problem

We merely assume the following regularity for g and the coefficients of L_1:

(H1) the metric g is in $\mathcal{C}^0(\tilde{X}) \cap W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\tilde{X})$, the coefficients of L_1 are in $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\tilde{X})$.

Theorem 3.1. *Under hypothesis* (H1), *for any* $(u_0, u_1) \in H^1(X) \oplus L^2(X)$, *Eq.* (3) *has a unique solution* u *in*

$$\mathcal{F} := \mathcal{C}\big(\mathbb{R}_t; H^1(X)\big) \cap \mathcal{C}^1\big(\mathbb{R}_t; L^2(X)\big),$$

such that

$$u_{|t=0} = u_0, \qquad \partial_t u_{|t=0} = u_1.$$

We denote by $\mathcal{E}$ *the space of solutions of* (3) *in* $\mathcal{F}$.

The next result states that when the operator L_1 is homogeneous of the first order and exactly cancels the first order terms of the d'Alembertian, we can get more regular solutions. This is a trivial corollary of Theorem 3.1, but it will be crucial for the Goursat problem.

Corollary 3.2. *For a metric* g *in* $\mathcal{C}^0(\tilde{X}) \cap W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\tilde{X})$, *we consider the equation*

$$\partial_t^2 u - g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta u = 0 \tag{7}$$

corresponding to (3) *with*

$$L_1 = \gamma^{-1} \partial_\alpha \big(\gamma g^{\alpha\beta}\big) \partial_\beta.$$

Note that g *and* L_1 *then satisfy hypothesis* (H1). *As a consequence of Theorem* 3.1, *for any initial data* $(u_0, u_1) \in H^1(X) \oplus L^2(X)$, (7) *admits in* $\mathcal{F}$ *a unique solution* u *such that* $u_{|t=0} = u_0$, $\partial_t u_{|t=0} = u_1$. *Moreover, if* $(u_0, u_1) \in H^2(X) \oplus H^1(X)$, *then the solution* u *satisfies* $u \in \bigcap_{l=0}^{2} \mathcal{C}^l(\mathbb{R}_t; H^{2-l}(X))$.

Ideas of the proof of Theorem 3.1.

(i) *Uniqueness.* We consider $u \in \mathcal{F}$ a solution of (3) and $T > 0$ large enough.[1] We wish to prove that there exists a continuous function $C_1(T, g, L_1)$ of $T > 0$, the Lipschitz norms on $]-T, T[\times X$ of g and g^{-1} and the L^∞ norms on $]-T, T[\times X$ of the coefficients of L_1, such that, for any $t, s \in [-T, T]$,

$$E_t(u) \leqslant \mathrm{e}^{C_1(T,g,L_1)|t-s|} E_s(u).$$

[1] Simply meaning here that $T > \max_{x \in X} |\varphi(x)|$, so that $\Sigma \subset]-T, T[\times X$.

This is done by regularizing u purely in space. The equation gives the missing regularity in time and we have a family in $H^2_{\mathrm{loc}}(\tilde{X})$, for which we can perform energy estimates, this family converges towards u in the correct spaces for the convergence of the energy estimates.

(ii) *Existence.* We regularize the metric and coefficients of L_1 but we keep the initial data. We get a family $\{u_k\}$ of solutions of the regularized equations that is bounded in

$$\mathcal{C}\big([-T,T];H^1(X)\big)\cap\mathcal{C}^1\big([-T,T];L^2(X)\big).$$

We use standard weak convergence and compactness arguments to infer the existence in $\mathcal{F}$ of a solution u of (3) such that $u(0)=u_0$. We then need to interpret the trace of $\partial_t u$. We do this in a weak sense: we use the equation to show that

$$\partial_t^2(u-u_k)\longrightarrow 0 \quad \text{in } L^2\big(]-T,T[;H^{-1}(X)\big)-w.$$

This allows us to write

$$\partial_t u(t)-\partial_t u_k(t)=\partial_t u(0)-\partial_t u_k(0)+\int_{]0,t[}\partial_t^2(u-u_k)(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

and since

$$\partial_t(u-u_k)\longrightarrow 0 \quad \text{in } L^2\big(]-T,T[\times X\big)-w\hookrightarrow L^2(]-T,T[;H^{-1}(X)\big)-w,$$

we infer

$$\partial_t u_k(0)\longrightarrow \partial_t u(0) \quad \text{in } H^{-1}(X)-w.$$

4. The Goursat problem

We assume the following regularity for g and the coefficients of L_1:

(H2) the metric g is in $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_t;\mathcal{C}^1(X))\cap W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_t;\mathcal{C}^0(X))$, the coefficients of the first order terms of L_1 are in $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_t;\mathcal{C}^0(X))$ and the coefficients of the zero-order terms of L_1 are in $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\tilde{X})$.

Then we have

Theorem 4.1. *Under the assumption* (H2) *the application*

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_\Sigma:\ \mathcal{E}&\longrightarrow H^1(\Sigma),\\ u&\longmapsto u_{|\Sigma}\end{aligned}$$

is well defined and is an isomorphism.

Ideas of the proof of Theorem 4.1. We follow Hörmander's technique.

(i) *Energy estimates.* We prove two reciprocal energy estimates: let $T>\max_{x\in X}|\varphi(x)|$, there exists a positive function $C_2(T,g,L_1)$, continuous in T, the Lipschitz norms of g and g^{-1} and the L^∞ norms of the coefficients of L_1 on $]-T,T[\times X$, such that, for all $u\in\mathcal{E}$,

$$\|T_\Sigma u\|^2_{H^1(\Sigma)}=E_\Sigma(u)\leqslant C_2(T,g,L_1)E_0(u), \tag{8}$$

$$E_0(u)\leqslant C_2(T,g,L_1)E_\Sigma(u). \tag{9}$$

These are standard energy estimates proved by integration by parts provided we have access to smooth solutions (at least locally H^2 on $\tilde{X}$) which is not the case here. To make up for it, we write Eq. (3) as (7) plus first order perturbation $\tilde{L}_1 u$ (containing $L_1 u$ and the first order terms coming from the d'Alembertian). Then we regularize the first order perturbation and the initial data at $t=0$, but not the metric. We get solutions u_k of the regularized equations. Each u_k is in $H^2_{\mathrm{loc}}(\tilde{X})$ thanks to Corollary 3.2, and satisfies estimates of the type (8), (9), that can simply be proved by integration by parts, with bounds uniform in k. All the equations have the same principal part, this allows to get for $u_k - u_l$ estimates of the type (8), (9) with a source term $(L_1^k - L_1^l)u_l$. We simply need to show that this term tends to zero in say $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_t; L^2(X))$. This is where we need the first order terms of $\tilde{L}_1$ to be in $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_t; \mathcal{C}^0(X))$, so as to get strong enough convergence of the coefficients of $\tilde{L}_1^k$. The zero order coefficient needs not be more regular than locally L^∞. This translates exactly into hypothesis (H2) and allows us to show the strong convergence of u_k in $H^1(\Sigma)$, which guarantees that $E_\Sigma(u_k)$ tends towards $E_\Sigma(u)$. The convergence of $E_0(u_k)$ towards $E_0(u)$ is ensured because the initial data for u_k are regularizations of the data for u. This gives the right estimates for u.

(ii) *Surjectivity.* Given $v \in H^1(\Sigma)$, we prove the existence of $u \in \mathcal{E}$ such that $T_\Sigma u = v$. We regularize the metric, the coefficients of L_1 and v. In order to make sure that the hypersurface Σ is spacelike for the regularized metric, we need to slow down the propagation. We thus work with a regularized equation of the form

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \lambda_k \gamma^{-1} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\gamma\left({}^k g^{\alpha\beta}\right)\frac{\partial u}{\partial x^\beta}\right) + \tilde{L}_1^k u = 0, \quad u_{|\Sigma} = v_k, \quad \partial_t u_{|\Sigma} = 0, \tag{10}$$

where $0 < \lambda_k < 1$, $\lambda_k \to 1$, ${}^k g$ is an approximation of g, $\tilde{L}_1^k$ of $\tilde{L}_1$ and v_k of v. The results of [1] give us a solution u_k of (10) ; the sequence $\{u_k\}_k$ is bounded in $\mathcal{C}([-T, T]; H^1(X)) \cap \mathcal{C}^1([-T, T]; L^2(X))$ for any $T > 0$ large enough. Standard weak convergence and compactness arguments give us the result.

References

[1] L. Hörmander, A remark on the characteristic Cauchy problem, J. Funct. Anal. 93 (1990) 270–277.

[2] J.-P. Nicolas, On Lars Hörmander's remark on the characteristic Cauchy problem, Ann. Inst. Fourier 56 (2006) 517–543.