Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

ELSEVIER

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 337–342

COMPTES RENDUS
MATHEMATIQUE

Probabilités/Équations aux dérivées partielles

Représentation de Feynman–Kac dans des domaines temps–espace et sensibilité par rapport au domaine

Cristina Costantini [a], Nicole El Karoui [b], Emmanuel Gobet [b]

[a] *Dipartimento di Scienze, Universita' di Chieti, viale Pindaro 42, 65127 Pescara, Italie*
[b] *École polytechnique, centre de mathématiques appliquées, 91128 Palaiseau cedex, France*

Reçu le 21 mai 2003 ; accepté le 17 juillet 2003

Présenté par Marc Yor

Résumé

Nous considérons la solution $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$ d'une équation différentielle stochastique inhomogène en temps et le temps de sortie τ pour $(t,X_t)_{t\geqslant 0}$ d'un domaine espace–temps $\mathcal{D}$. Nous montrons la différentiabilité d'espérance de fonctionnelles de X arrêté au temps τ par rapport au domaine : ces résultats étendent ceux de la littérature, connus notamment des analystes dans les problèmes d'optimisation de formes. En revanche sur le plan probabiliste, ce n'est pas classique. ***Pour citer cet article : C. Costantini et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abstract

Feynman–Kac's representation in time–space domains and sensitivity with respect to the domain. We consider the solution $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$ of a time-inhomogeneous stochastic differential equation and the exit time τ by $(t,X_t)_{t\geqslant 0}$ of the time–space domain $\mathcal{D}$. We prove the differentiability of expectations of functionals of X stopped at τ, with respect to the domain $\mathcal{D}$: these results extend those in the literature, known in particular by the analysts for the issues of shape optimization. However from the probabilistic point of view, this is not standard. ***To cite this article: C. Costantini et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abridged English version

Statement of the problem

Let $(X_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ be a $\mathbf{R}^d$-valued diffusion process, solution of $\mathrm{d}X_t=b(t,X_t)\,\mathrm{d}t+\sigma(t,X_t)\,\mathrm{d}W_t$, where $(W_t)_{t\geqslant 0}$ is multidimensional Brownian motion defined on a filtered probability space $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0},\mathbf{P})$ satisfying the usual conditions. The coefficients b and σ are globally Lipschitz continuous with respect to both variables. We set

Adresses e-mail : costanti@sci.unich.it (C. Costantini), nicole.elkaroui@polytechnique.fr (N. El Karoui), emmanuel.gobet@polytechnique.fr (E. Gobet).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/S1631-073X(03)00364-9

L for the associated infinitesimal generator and denote by $X^{t,x}$ the solution starting from x at time $t \geqslant 0$. Define $\tau^{t,x} = \inf\{s > t\colon (s, X_s^{t,x}) \notin \mathcal{D}\}$ for its first exit time from a time–space domain $\mathcal{D} \subset]0,T[\times \mathbf{R}^d$. In this Note, we are interested in the sensitivity of $u(t,x) = \mathbf{E}(g(\tau^{t,x}, X^{t,x}_{\tau^{t,x}})\,\mathrm{e}^{-\int_t^{\tau^{t,x}} c(r,X_r^{t,x})\,\mathrm{d}r} - \int_t^{\tau^{t,x}} \mathrm{e}^{-\int_t^s c(r,X_r^{t,x})\,\mathrm{d}r} f(s, X_s^{t,x})\,\mathrm{d}s)$, with respect to the domain $\mathcal{D}$, for some fixed functions c, f, g. This is a relevant issue for instance in optimal stopping problems [4], for numerical procedures based on the optimization of the stopping region; this is also interesting for the improvement of some Monte Carlo procedures [1]. Our main result is the differentiability of u with respect to $\mathcal{D}$, under some assumptions, with an explicit expression for its gradient. In fact, these issues are classic in the numerical analysis literature, if we think of u as the solution of a Partial Differential Equation (PDE in short) with Cauchy–Dirichlet boundary conditions: applications to the shape optimization of elastic structures are important. The sensitivity analysis with respect to the domain dates back to Hadamard and has been generalized in [6,9,8] among others. These references definitely solve the case of elliptic PDEs. The parabolic case, underlying to our framework, is less studied: in [10], the analysis is performed for the Laplacian in cylindrical domains $\mathcal{D} =]0,T[\times D$. This note extends the results to more general diffusion processes and non-cylindrical time–space domains.

Notations and definitions

Appropriate references for PDEs in time–space domains are [3], and especially [5] more recently; we follow the notations of the latter. The topological boundary of $\mathcal{D}$ is denoted by $\partial\mathcal{D}$, and we introduce some subsets:

- the *parabolic boundary* $\mathcal{PD}$ is given by the points $(t,x) \in \partial\mathcal{D}$ such that for any $\varepsilon > 0$, the cylinder $]t, t+\varepsilon^2[\times \{y\colon |y-x| < \varepsilon\}$ contains some points outside of $\mathcal{D}$;
- the *bottom* $\mathcal{BD}$ is given by the points $(t,x) \in \partial\mathcal{D}$, such that for some $\varepsilon > 0$, $\mathcal{D}$ contains the cylinder $]t-\varepsilon^2, t[\times \{y\colon |y-x| < \varepsilon\}$;
- the *corner* is defined by $\mathcal{CD} = (\overline{\mathcal{BD}} \cap \mathcal{PD}) \setminus \mathcal{BD}$ and the *side* by $\mathcal{SD} = \mathcal{PD} \setminus (\mathcal{BD} \cup \mathcal{CD})$.

For $a > 0$, $(\mathcal{H}_a(\mathcal{D}'), |\cdot|_{a,\mathcal{D}'})$ stands for the usual Banach space of functions, defined on the time–space domain $\mathcal{D}'$, with Hölder regularity (see [5], p. 47). The domain $\mathcal{D}$ is supposed to be of class $\mathcal{H}_2$ in the following sense:

(D) the domain $\mathcal{D}$ is bounded; the bottom $\mathcal{BD}$ lies in the hyperplane $\{t = T\}$; for some fixed $\varepsilon_0 > 0$ and any $(\bar t, \bar x) \in \mathcal{SD}$, the restriction of $\mathcal{D}$ to the cylinder $]\bar t, \bar t + \varepsilon_0^2[\times \{x = (x_1,\dots,x_d)\colon |\bar x - x| < \varepsilon_0\}$ is given by $x_i > \phi(t, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_d)$ for some index $i \in \{1,\dots,d\}$ and some function ϕ of class $\mathcal{H}_2$.

Main result

To ensure a minimum of regularity to $u(t,x)$ defined above, we assume a uniform ellipticity assumption and some smoothness properties on the functions c, f, g.

(E) For some $a_0 > 0$, one has $\xi \cdot [\sigma\sigma^*](t,x)\xi \geqslant a_0\|\xi\|^2$ for any $(t,x,\xi) \in \mathcal{D} \times \mathbf{R}^d$.
(F) For some $\alpha \in]0,1]$, the discount factor c is of class $\mathcal{H}_1(]0,T[\times \mathbf{R}^d)$, the source term f of class $\mathcal{H}_\alpha(]0,T[\times \mathbf{R}^d)$ and the boundary data g of class $\mathcal{H}_{1+\alpha}(]0,T[\times \mathbf{R}^d)$.

A first result consists in relating u to the solution of some parabolic PDE in $\mathcal{D}$: this is a simple extension of Feynman–Kac's formula, which is well-known in cylindrical domains [2].

Proposition 0.1. *Assume* D, E *and* F. *Then, there is a unique solution of class $C^{1,2}(\mathcal{D}) \cap \mathcal{H}_{1+\alpha}(\mathcal{D})$ to the problem $\partial_t v + Lv - cv = f$ in $\mathcal{D}$ and $v = g$ on $\mathcal{PD}$. This solution is given by u defined above.*

Now, modify $\mathcal{D}$ into a domain $\mathcal{D}_\varepsilon$ defined by $\mathcal{D}_\varepsilon = \{(t,x)\colon (t, x + \varepsilon\Theta(t,x)) \in \mathcal{D}\}$, for a scalar parameter ε and a mapping Θ of class $C^{1,2}([0,T] \times \mathbf{R}^d, \mathbf{R}^d)$. Denote $\tau_\varepsilon^{t,x} := \inf\{s > t\colon (s, X_s^{t,x}) \notin \mathcal{D}_\varepsilon\}$ the new exit time for this modified domain. Our main result is

Theorem 0.2. *Assume that assumptions* D, E, F *are satisfied and take* $(t,x) \in \mathcal{D}$. *Then, the mapping* $\mathcal{J}^{t,x} : \varepsilon \mapsto \mathbf{E}(g(\tau_\varepsilon^{t,x}, X_{\tau_\varepsilon^{t,x}}^{t,x})\,\mathrm{e}^{-\int_t^{\tau_\varepsilon^{t,x}} c(r, X_r^{t,x})\,\mathrm{d}r} - \int_t^{\tau_\varepsilon^{t,x}} \mathrm{e}^{-\int_t^s c(r, X_r^{t,x})\,\mathrm{d}r} f(s, X_s^{t,x})\,\mathrm{d}s)$ *is differentiable at* $\varepsilon = 0$ *and*

$$\partial_\varepsilon \mathcal{J}^{t,x}(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \mathbf{E}\big[\mathrm{e}^{-\int_t^{\tau^{t,x}} c(r, X_r^{t,x})\,\mathrm{d}r}\big[(\nabla u - \nabla g)\Theta\big]\big(\tau^{t,x}, X_{\tau^{t,x}}^{t,x}\big)\big].$$

Note that ∇u in the above expression is well defined on the boundary since u is of class $\mathcal{H}_{1+\alpha}(\mathcal{D})$.

1. Position du problème

Soit $(X_t)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ le processus de diffusion à valeurs dans $\mathbf{R}^d$, solution de $\mathrm{d}X_t = b(t, X_t)\,\mathrm{d}t + \sigma(t, X_t)\,\mathrm{d}W_t$, où $(W_t)_{t \geqslant 0}$ est un mouvement brownien multidimensionnel défini sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}, \mathbf{P})$ satisfaisant les conditions habituelles. Dans toute la suite, nous supposons les coefficients b et σ globalement lipschitziens en les deux variables, assurant en particulier l'existence d'une unique solution forte à l'équation précédente : nous notons L le générateur infinitésimal associé défini par $Lv(t,x) = \nabla_x v(t,x) b(t,x) + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(H_v(t,x)[\sigma\sigma^*](t,x))$ (avec H_v la matrice hessienne de v par rapport aux variables d'espace), et $X^{t,x}$ la solution partant de x au temps $t \geqslant 0$. Considérons également un domaine temps–espace $\mathcal{D}$, c'est-à-dire un ouvert connexe non vide de $]0, T[\times \mathbf{R}^d$, et posons

$$\tau^{t,x} = \inf\big\{s > t\colon \big(s, X_s^{t,x}\big) \notin \mathcal{D}\big\} \tag{1}$$

pour le premier temps de sortie du processus $(s, X_s^{t,x})_{s>t}$ de $\mathcal{D}$. Nous nous intéressons dans cette Note à des espérances de fonctionnelles de $X^{t,x}$ stoppé en $\tau^{t,x}$ du type

$$u(t,x) = \mathbf{E}\left(g\big(\tau^{t,x}, X_{\tau^{t,x}}^{t,x}\big)\,\mathrm{e}^{-\int_t^{\tau^{t,x}} c(r, X_r^{t,x})\,\mathrm{d}r} - \int_t^{\tau^{t,x}} \mathrm{e}^{-\int_t^s c(r, X_r^{t,x})\,\mathrm{d}r} f\big(s, X_s^{t,x}\big)\,\mathrm{d}s\right) \tag{2}$$

pour des fonctions c, f, g définies plus loin ; notre objectif ici est l'analyse de sensibilité de u par rapport au domaine $\mathcal{D}$. Cette question a de l'intérêt par exemple en arrêt optimal [4] pour des approches numériques basées sur l'optimisation de la région d'arrêt, ou en amélioration de certaines procédures de simulation de Monte Carlo [1]. Notre principal résultat (Théorème 3.2) est la différenciabilité de u par rapport à $\mathcal{D}$, sous certaines hypothèses, avec un calcul de sa différentielle. En fait, ces questions sont assez classiques du point de vue des analystes, si l'on voit u comme la solution d'une Équation aux Dérivées Partielles (EDP dans la suite) avec condition de Cauchy–Dirichlet : les applications en optimisation de structure mécanique sont importantes. L'analyse de sensibilité par rapport au domaine remonte à Hadamard et a été généralisée dans [6,9,8] entre autres. Ces références traitent complètement du cas d'EDP elliptique (sans dépendance temporelle). Le cas parabolique (sous-jacent à notre cadre) est moins étudié : dans [10], l'analyse est menée pour le laplacien dans des domaines cylindriques $\mathcal{D} =]0, T[\times D$. Cette Note a pour but d'étendre les résultats au cas de diffusions et domaines temps–espace plus généraux.

2. Notations et définitions

Pour préciser les résultats, il est nécessaire d'introduire quelques définitions. La frontière topologique de $\mathcal{D}$ est notée $\partial\mathcal{D}$, et suivant les notations de [5], nous introduisons les parties de $\partial\mathcal{D}$ suivantes :

- la *frontière parabolique* $\mathcal{PD}$ définie par les points $(t,x)\in\partial\mathcal{D}$ pour lesquels pour tout $\varepsilon>0$, le cylindre $]t,t+\varepsilon^2[\times\{y\colon |y-x|<\varepsilon\}$ contient des points en dehors de $\mathcal{D}$;
- le *bas* $\mathcal{BD}$ défini par les points $(t,x)\in\partial\mathcal{D}$ pour lesquels pour il existe $\varepsilon>0$ tel que le cylindre $]t-\varepsilon^2,t[\times\{y\colon |y-x|<\varepsilon\}$ soit contenu dans $\mathcal{D}$;
- le *coin* défini par $\mathcal{CD}=(\overline{\mathcal{BD}}\cap\mathcal{PD})\setminus\mathcal{BD}$ et le *côté* par $\mathcal{SD}=\mathcal{PD}\setminus(\mathcal{BD}\cup\mathcal{CD})$.

Pour $a=k+\alpha$ avec k entier et $\alpha\in]0,1]$, nous introduisons les espaces de Banach $\mathcal{H}_a(\mathcal{D}')$ (munis de la norme $|f|_{a,\mathcal{D}'}$) des fonctions f définies sur le domaine temps–espace $\mathcal{D}'$, de classe $C^{\lfloor k/2\rfloor,k}(\mathcal{D}')$ avec des dérivées $\partial_x^\beta\partial_t^j f$ ($|\beta|+2j=k$ ou $k-1$) hölderiennes : nous renvoyons à [5], p. 47 pour plus de détails. Nous supposons que le domaine $\mathcal{D}$ est de régularité $\mathcal{H}_2$ dans le sens suivant (voir [5], p. 76) :

(D) le domaine $\mathcal{D}$ est borné ; le bas $\mathcal{BD}$ est contenu dans l'hyperplan $\{t=T\}$; il existe $\varepsilon_0>0$ tel que pour tout $(\bar t,\bar x)\in\mathcal{SD}$, $\mathcal{D}$ restreint au cylindre $]\bar t,\bar t+\varepsilon_0^2[\times\{x=(x_1,\dots,x_d)\colon |\bar x-x|<\varepsilon_0\}$ est représenté par $x_i>\phi(t,x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_d)$ pour un indice $i\in\{1,\dots,d\}$ et pour une fonction ϕ de classe $\mathcal{H}_2$.

3. Résultat principal

Pour assurer des résultats de régularité de $u(t,x)$ défini en (2), nous formulons des hypothèses d'ellipticité uniforme et de régularité sur les fonctions $c,\ f,\ g$ impliquées : l'espace de définition de ces dernières est plus large que $\mathcal{D}$ car le domaine est amené à varier.

(E) Pour un réel $a_0>0$, on a $\xi\cdot[\sigma\sigma^*](t,x)\xi\geqslant a_0\|\xi\|^2$ pour tout $(t,x,\xi)\in\mathcal{D}\times\mathbf{R}^d$.
(F) Pour un réel $\alpha\in]0,1]$, le facteur d'actualisation c est de classe $\mathcal{H}_1(]0,T[\times\mathbf{R}^d)$, le terme source f de classe $\mathcal{H}_\alpha(]0,T[\times\mathbf{R}^d)$ et la donnée frontière g de classe $\mathcal{H}_{1+\alpha}(]0,T[\times\mathbf{R}^d)$.

Il est utile de commencer par relier u à la solution d'une certaine EDP parabolique dans $\mathcal{D}$. Nous montrons ici une généralisation simple de la représentation classique de Feynman–Kac, bien connue pour des domaines cylindriques [2].

Proposition 3.1 (Formule de Feynman–Kac dans des domaines temps–espace). *Sous les hypothèses* D, E *et* F, *il existe une unique solution de classe $C^{1,2}(\mathcal{D})\cap\mathcal{H}_{1+\alpha}(\mathcal{D})$ au problème*

$$\partial_t v+Lv-cv=f\quad\text{dans }\mathcal{D}\quad\text{et}\quad v=g\quad\text{sur }\mathcal{PD}.\tag{3}$$

Cette solution est donnée par u définie par (2) *et satisfait l'estimation*

$$|u|_{1+\alpha,\mathcal{D}}\leqslant C\big(|f|_{\alpha,]0,T[\times\mathbf{R}^d}+|g|_{1+\alpha,]0,T[\times\mathbf{R}^d}\big)$$

pour une constante $C>0$ (indépendante de f et g).

Démonstration. En fait, les problèmes d'EDP posés dans des domaines temps–espace généraux ne sont pas si standards, le cas de cylindre $\mathcal{D}=]0,T[\times D$ étant bien plus étudié : pour couvrir notre cadre, les références appropriées sont [3] et surtout plus récemment [5]. L'existence et l'unicité d'une solution à (3) sont des applications simples des Théorèmes 5.9 et 5.10 de [5] : cela donne une solution de classe $C^{1,2}(\mathcal{D})\cap C^0(\overline{\mathcal{D}})$, même si g est seulement continu. L'appartenance supplémentaire de la solution à $\mathcal{H}_{1+\alpha}(\mathcal{D})$ est possible (Théorème 6.45 [5]) grâce à la régularité additionnelle de g : ainsi, la solution est continûment différentiable jusqu'à la frontière. Reste à vérifier que la solution est égale à u (vraie encore si g est seulement continu) : nous utilisons un argument usuel de vérification, en appliquant la formule d'Itô à la quantité $u(s,X_s^{t,x})\,\mathrm{e}^{-\int_t^s c(r,X_r^{t,x})\,\mathrm{d}r}$. Comme pour la preuve du Théorème 2.3 dans [2], le seul point délicat provient des explosions *a priori* des dérivées de u près de la frontière

(Théorème 5.9 [5]) : la localisation du calcul avec des temps d'arrêt suffit à lever cette difficulté. Pour conclure, nous remarquons que pour $s=\tau^{t,x}$, $u(s,X_s^{t,x})=g(s,X_s^{t,x})$ car $(\tau^{t,x},X_{\tau^{t,x}}^{t,x})\in\mathcal{PD}$. $\square$

Le domaine $\mathcal{D}$ est perturbé en un domaine $\mathcal{D}_\varepsilon$ défini par

$$\mathcal{D}_\varepsilon=\bigl\{(t,x)\colon\ \bigl(t,x+\varepsilon\Theta(t,x)\bigr)\in\mathcal{D}\bigr\}, \tag{4}$$

pour ε réel et pour une application Θ de classe $C^{1,2}([0,T]\times\mathbf{R}^d,\mathbf{R}^d)$. Notons $\tau_\varepsilon^{t,x}:=\inf\{s>t\colon\ (s,X_s^{t,x})\notin\mathcal{D}_\varepsilon\}$ le nouveau temps de sortie pour ce domaine perturbé : à ω fixé, il est clair que $\tau_\varepsilon^{t,x}$ n'est pas différentiable par rapport à ε, mais néanmoins, les lois des fonctionnelles étudiées le sont.

Théorème 3.2. *Supposons* D, E, F *vérifiés, et considérons* (t,x) *dans* $\mathcal{D}$. *Alors, l'application* $\mathcal{J}^{t,x}:\varepsilon\mapsto\mathbf{E}(g(\tau_\varepsilon^{t,x},X_{\tau_\varepsilon^{t,x}}^{t,x})\,\mathrm{e}^{-\int_t^{\tau_\varepsilon^{t,x}}c(r,X_r^{t,x})\,\mathrm{d}r}-\int_t^{\tau_\varepsilon^{t,x}}\mathrm{e}^{-\int_t^s c(r,X_r^{t,x})\,\mathrm{d}r}f(s,X_s^{t,x})\,\mathrm{d}s)$ *est différentiable en* $\varepsilon=0$ *et*

$$\partial_\varepsilon\mathcal{J}^{t,x}(\varepsilon)|_{\varepsilon=0}=\mathbf{E}\bigl[\mathrm{e}^{-\int_t^{\tau^{t,x}}c(r,X_r^{t,x})\,\mathrm{d}r}\bigl[(\nabla u-\nabla g)\Theta\bigr]\bigl(\tau^{t,x},X_{\tau^{t,x}}^{t,x}\bigr)\bigr].$$

4. Éléments de preuve

Le calcul ne dépendant que de quantités estimées au voisinage de $\mathcal{D}$, on peut considérer que toutes les fonctions mises en jeu sont nulles loin de $\mathcal{D}$; en particulier la fonction Θ peut être prise bornée à dérivées bornées. Nous remarquons aussi qu'il suffit de montrer le résultat pour f et g de classe $C^\infty(\mathbf{R}^{d+1})$ (s'annullant loin de $\mathcal{D}$). En effet, le cas général se déduit en passant par des régularisés $(f_m)_m$ (resp. $(g_m)_m$) convergeant vers f (resp. g) en norme $|\cdot|_{\alpha,]0,T[\times\mathbf{R}^d}$ (resp. $|\cdot|_{1+\alpha,]0,T[\times\mathbf{R}^d}$) : le passage à la limite dans la sensibilité est possible car au vu de la Proposition 3.1, la sensibilité au domaine est contrôlée par $|f|_{\alpha,]0,T[\times\mathbf{R}^d}$ et $|g|_{1+\alpha,]0,T[\times\mathbf{R}^d}$.

Pour simplifier, posons $Z_s=\mathrm{e}^{-\int_t^s c(r,X_r^{t,x})\,\mathrm{d}r}$ et omettons d'indiquer les indices t,x dans X, τ et τ_ε : il s'agit de trouver la limite de $\Delta_\varepsilon/\varepsilon$ quand $\varepsilon\to 0$, avec $\Delta_\varepsilon:=\mathbf{E}[g(\tau_\varepsilon,X_{\tau_\varepsilon})Z_{\tau_\varepsilon}-\int_t^{\tau_\varepsilon}f(s,X_s)Z_s\,\mathrm{d}s]-u(t,x)$. L'idée est de transférer la pertubation du domaine à une pertubation du processus X, plus facile à analyser avec le calcul stochastique, en posant

$$X_s^\varepsilon=X_s+\varepsilon\Theta(s,X_s),\qquad \tau^\varepsilon:=\inf\bigl\{s>t\colon\ \bigl(s,X_s^\varepsilon\bigr)\notin\mathcal{D}\bigr\}. \tag{5}$$

Alors compte tenu de (4), nous remarquons la relation clé $\tau_\varepsilon=\tau^\varepsilon$. Puisque Θ est borné, le processus perturbé X^ε converge uniformément sur $[t,T]$ vers X quand ε tend vers 0. De plus, Θ étant $C_b^{1,2}$ et $x\mapsto x+\varepsilon\Theta(s,x)$ étant bijective (à s fixé) pour ε assez petit, le processus pertubé est encore une diffusion inhomogène : notons L^ε son générateur infinitésimal. Nous justifions à la fin la convergence des temps de sortie perturbés vers τ.

Lemme 4.1. $\tau_\varepsilon=\tau^\varepsilon$ *converge en probabilité vers* τ *quand* ε *tend vers* 0.

Par ailleurs, de la régularité C^∞ de f et g découlent des estimations en norme $\mathbf{L}_p(\mathrm{d}t\otimes\mathrm{d}x)$ pour les dérivées de u (Théorème 7.17 [5]), d'où il est facile de déduire le lemme suivant.

Lemme 4.2. *Pour* $p=1$ *et* $p=2$, *on a* $\int_t^T\mathbf{E}[|\partial_t u(s,X_s^\varepsilon)|^p+|\nabla_x u(s,X_s^\varepsilon)|^p+|H_u(s,X_s^\varepsilon)|^p]\,\mathrm{d}s<\infty$ *uniformément en* ε *proche de* 0.

Utilisant (5) et $\tau_\varepsilon=\tau^\varepsilon$, il vient $g(\tau_\varepsilon,X_{\tau_\varepsilon})Z_{\tau_\varepsilon}-\int_t^{\tau_\varepsilon}f(s,X_s)Z_s\,\mathrm{d}s=g(\tau^\varepsilon,[\mathrm{Id}+\varepsilon\Theta(\tau^\varepsilon,\cdot)]^{-1}X_{\tau^\varepsilon}^\varepsilon)Z_{\tau^\varepsilon}-\int_t^{\tau^\varepsilon}f(s,X_s)Z_s\,\mathrm{d}s$. Ainsi, $\Delta_\varepsilon=\Delta_{1,\varepsilon}+\Delta_{2,\varepsilon}+\Delta_{3,\varepsilon}+\Delta_{4,\varepsilon}$ avec

$$\Delta_{1,\varepsilon}=\mathbf{E}\big[g\big(\tau^{\varepsilon},\big[\mathrm{Id}+\varepsilon\Theta(\tau^{\varepsilon},\cdot)\big]^{-1}X^{\varepsilon}_{\tau^{\varepsilon}}\big)Z_{\tau^{\varepsilon}}\big]-\mathbf{E}\big[g\big(\tau^{\varepsilon},X^{\varepsilon}_{\tau^{\varepsilon}}\big)Z_{\tau^{\varepsilon}}\big],$$

$$\Delta_{2,\varepsilon}=\mathbf{E}\left[g\big(\tau^{\varepsilon},X^{\varepsilon}_{\tau^{\varepsilon}}\big)Z_{\tau^{\varepsilon}}-u\big(\tau^{\varepsilon}\wedge\tau,X^{\varepsilon}_{\tau^{\varepsilon}\wedge\tau}\big)Z_{\tau^{\varepsilon}\wedge\tau}-\int_{\tau^{\varepsilon}\wedge\tau}^{\tau^{\varepsilon}}f(s,X_s)Z_s\,\mathrm{d}s\right],$$

$$\Delta_{3,\varepsilon}=\mathbf{E}\big[u\big(\tau^{\varepsilon}\wedge\tau,X^{\varepsilon}_{\tau^{\varepsilon}\wedge\tau}\big)Z_{\tau^{\varepsilon}\wedge\tau}-u(\tau^{\varepsilon}\wedge\tau,X_{\tau^{\varepsilon}\wedge\tau})Z_{\tau^{\varepsilon}\wedge\tau}\big],$$

$$\Delta_{4,\varepsilon}=\mathbf{E}\left[u(\tau^{\varepsilon}\wedge\tau,X_{\tau^{\varepsilon}\wedge\tau})Z_{\tau^{\varepsilon}\wedge\tau}-\int_{t}^{\tau^{\varepsilon}\wedge\tau}f(s,X_s)Z_s\,\mathrm{d}s\right]-u(t,x).$$

Clairement, on a $\lim_{\varepsilon\to 0}\Delta_{1,\varepsilon}/\varepsilon=-\mathbf{E}[(\nabla g\ \Theta)(\tau,X_\tau)Z_\tau]$. Le terme $\Delta_{2,\varepsilon}$ n'apporte pas de contribution. En effet, remarquons que $g(\tau^{\varepsilon},X^{\varepsilon}_{\tau^{\varepsilon}})=u(\tau^{\varepsilon},X^{\varepsilon}_{\tau^{\varepsilon}})$, et donc $\Delta_{2,\varepsilon}$ peut être décomposé par la formule d'Itô (justifiée par la Proposition 3.1 et les estimations du Lemme 4.2 pour $p=1$). En utilisant l'EDP satisfaite par u, on obtient alors $\Delta_{2,\varepsilon}=\mathbf{E}(\int_{\tau\wedge\tau^{\varepsilon}}^{\tau^{\varepsilon}}[[L^{\varepsilon}-L]u(s,X^{\varepsilon}_s)-[c(s,X_s)-c(s,X^{\varepsilon}_s)]u(s,X^{\varepsilon}_s)-[f(s,X_s)-f(s,X^{\varepsilon}_s)]]Z_s\,\mathrm{d}s)$. Des majorations simples de $[L^{\varepsilon}-L]u$ et des autres différences conduisent facilement à $|\Delta_{2,\varepsilon}/\varepsilon|\leqslant C\mathbf{E}(\int_0^T\mathbf{1}_{[\tau\wedge\tau^{\varepsilon},\tau^{\varepsilon}]}(s)[|\nabla_x u|+|H_u|+C](s,X^{\varepsilon}_s)\,\mathrm{d}s)$, pour une constante $C>0$. Une application de l'inégalité de Cauchy–Schwarz à la mesure $d\mathbf{P}\otimes dt$, combinée avec les Lemmes 4.1 et 4.2 (avec $p=2$) prouve que le membre de droite de la dernière inégalité converge vers 0 avec ε. Concernant le terme $\Delta_{3,\varepsilon}$, puisque la fonction u est continûment différentiable, on obtient immédiatement $\lim_{\varepsilon\to 0}\Delta_{3,\varepsilon}/\varepsilon=\mathbf{E}[(\nabla u\ \Theta)(\tau,X_\tau)Z_\tau]$. Enfin, le terme $\Delta_{4,\varepsilon}$ est nul : en effet, une propriété de Markov montre que le processus $(u(r\wedge\tau,X_{r\wedge\tau})Z_{r\wedge\tau}-\int_t^{r\wedge\tau}f(s,X_s)Z_s\,\mathrm{d}s)_{t\leqslant r\leqslant T}$ est une martingale.

Preuve du Lemme 4.1. Il suffit de montrer une convergence dans $\mathbf{L}_1$, qui peut s'obtenir via la convergence en loi de $(\tau^{\varepsilon},\tau)$. Pour cela, notons F la distance signée à $\partial\mathcal{D}$ à t fixé : c'est une fonction de classe $\mathcal{H}_2$ (voir [5], Section X.3), positive sur $\mathcal{D}$, nulle sur $\partial\mathcal{D}$, négative sur $(\overline{\mathcal{D}})^c$ et telle que $|F(t,x)|=\inf_{(t,y)\in\partial\mathcal{D}}|x-y|$ au voisinage de $\mathcal{SD}$. Étant donné $(s_1,s_2)\in[t,T[\times[t,T]$, la convergence de X^{ε} vers X conduit clairement à $\mathbf{P}(\tau^{\varepsilon}\leqslant s_1,\tau\leqslant s_2)=\mathbf{P}(\inf_{r\in[t,s_1]}F(r,X^{\varepsilon}_r)\leqslant 0,\tau\leqslant s_2)\to\mathbf{P}(\tau\leqslant s_1,\tau\leqslant s_2)$ pourvu que $\mathbf{P}(\inf_{r\in[t,s_1]}F(r,X_r)=0)=0$: cette condition se vérifie sous les hypothèses D et E en utilisant une forme locale du critère de Nualart–Vives [7] d'absolue continuité de la loi du minimum d'un processus. La convergence précédente est aussi valable pour $s_1=T$ puisque $\mathbf{P}(\tau^{\varepsilon}\leqslant T,\tau\leqslant s_2)=\mathbf{P}(\tau\leqslant s_2)=\mathbf{P}(\tau\leqslant T,\tau\leqslant s_2)$. □

Références

[1] M. Broadie, P. Glasserman, S. Kou, Connecting discrete and continuous path-dependent options, Finance and Stochastics 3 (1999) 55–82.
[2] M. Freidlin, Functional Integration and Partial Differential Equations, in: Ann. of Math. Stud., Princeton University Press, 1985.
[3] A. Friedman, Partial Differential Equations of Parabolic Type, Prentice-Hall, 1964.
[4] N. El Karoui, Les aspects probabilistes du contrôle stochastique, in: Ninth Saint Flour Probability Summer School – 1979 (Saint Flour, 1979), in: Lecture Notes in Math., Vol. 876, Springer, Berlin, 1981, pp. 73–238.
[5] G.M. Lieberman, Second Order Parabolic Differential Equations, World Scientific, River Edge, NJ, 1996.
[6] F. Murat, J. Simon, Etude de problèmes d'optimal design, in: Optim. Tech., Part 2, Proc. 7th IFIP Conf., Nice, 1975, in: Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 41, 1976, pp. 54–62.
[7] D. Nualart, Malliavin Calculus and Related Topics, Springer-Verlag, 1995.
[8] P. Pironneau, Optimal Shape Design for Elliptic Systems, in: Springer Ser. Comput. Phys., Springer-Verlag, New York, 1984.
[9] J. Simon, Differentiation with respect to the domain in boundary value problems, Numer. Funct. Anal. Optim. 2 (7–8) (1980) 649–687.
[10] J. Sokolowski, J.P. Zolésio, Introduction to Shape Optimization, Springer-Verlag, Berlin, 1992. Shape sensitivity analysis.