Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 327–330

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Topologie

Sur la topologie des fibres d'une fonction définissable dans une structure o-minimale ☆

Didier D'Acunto

Departamento de Algebra, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Espagne

Reçu et accepté le 7 juillet 2003

Présenté par Bernard Malgrange

Résumé

Soient $V \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété fermée, non compacte de classe C^2 et $f : V \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 définissable dans une structure o-minimale. On démontre que le flot du champ de gradient de f par rapport a la métrique riemannienne induite sur V plonge une hypersurface de niveau de f non singulière correspondant à une valeur critique à l'infini dans une hypersurface de niveau typique. On généralise ce résultat au cas d'un polynôme complexe. ***Pour citer cet article : D. D'Acunto, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abstract

On the topology of fibers of functions definable in an o-minimal structure. Let $V \subset \mathbb{R}^n$ be a closed, non compact C^2 manifold and $f : V \to \mathbb{R}$ be a C^2 function definable in an o-minimal structure. We prove that the flow of the gradient field of f with respect to the induced riemannian metric on V embeds a non singular asymptotic critical level of f into a typical level of f. We apply this result to complex polynomials. ***To cite this article: D. D'Acunto, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

1. Introduction

Soient $\mathcal{A}$ une structure o-minimale sur $\mathbb{R}$ (voir [5]) et $V \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété de classe C^2, fermée, non compacte et définissable dans $\mathcal{A}$. Soit $f : V \to \mathbb{R}$ une fonction définissable dans $\mathcal{A}$ de classe C^2. On sait que f est une fibration triviale au-dessus de chaque composante connexe du complémentaire d'un ensemble fini de valeurs Λ. L'ensemble B_f des valeurs de bifurcation de f est le plus petit ensemble Λ qui satisfait la propriété précédente. Il contient l'ensemble $K_0(f)$ des valeurs critiques de f. Lorsque la fonction f n'est pas propre, B_f peut contenir d'autres valeurs qu'on peut caractériser comme des valeurs de bifurcation à l'infini. L'ensemble B_f étant difficile à déterminer, nous utiliserons la notion de valeurs critiques généralisées. Il s'agit d'un ensemble $K(f)$ qui contient B_f.

La variété V étant munie de la métrique riemannienne g induite par la structure euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, on note $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$, $|\cdot|_g$ et ∇_g respectivement le produit scalaire, la norme et le gradient associés à la métrique g.

☆ *Travaux financés par le réseau européen* RAAG (EC contract number HPRN-CT-00271).
Adresse e-mail : ddacunto@mat.ucm.es (D. D'Acunto).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/S1631-073X(03)00348-0

Définition (*Condition de Malgrange*). La fonction f satisfait la *condition* (**M**) *de Malgrange* en $t \in \mathbb{R}$ si et seulement s'il existe un voisinage ouvert $U(t)$ de t dans $\mathbb{R}$ et une constante $C > 0$ tels que pour tout $x \in f^{-1}(U(t))$ et $|x|$ suffisament grand :

$$|x| \cdot \left|\nabla_g f(x)\right|_g \geqslant C. \tag{M}$$

On dira que $c \in \mathbb{R}$ est une *valeur critique asymptotique* de f si la condition (**M**) de Malgrange n'est pas satisfaite en c. On note alors $K_\infty(f)$ l'ensemble des valeurs critiques asymptotiques de f.

L'ensemble $K_\infty(f)$ contient au plus un nombre fini de points. En effet, la démonstration de [3] pour $V = \mathbb{R}^n$ se généralise facilement au cas d'une sous-variété. Posons $K(f) = K_0(f) \cup K_\infty(f)$. On a alors la

Proposition. *La condition* (**M**) *de Malgrange est condition suffisante de fibration de f par le flot du champ $\frac{\nabla_g f}{|\nabla_g f|_g^2}$. En particulier $B_f \subset K(f)$.*

Démonstration. Soit $[a,b]$ un intervalle fermé d'intersection vide avec $K(f)$. Alors f satisfait la condition (**M**) de Malgrange sur le segment $[a,b]$ pour une constante C ne dépendant pas du choix de $t \in [a,b]$. Notons ϕ le flot du champ $X = \frac{\nabla_g f}{|\nabla_g f|_g^2}$. Soit $\Sigma \subset f^{-1}(a)$ une section compacte de X. Pour tout $x \in \Sigma$, notons γ_x la courbe intégrale de X passant par x. D'après (**M**) on a $|\gamma_x(t)| \leqslant |x| + \frac{1}{C}\int_a^t |\gamma_x(s)|\,\mathrm{d}s$ pour tout $t \in [a,b]$. En appliquant le lemme de Gronwall à cette inégalité on a $|\gamma_x(t)| \leqslant |x| \exp\frac{b-a}{C}$. Par compacité de Σ on obtient une borne uniforme de la longueur des γ_x pour $x \in \Sigma$ entre les niveaux $f^{-1}(a)$ et $f^{-1}(b)$. La restriction de ϕ à $\Sigma \times \{b\}$ est un C^1-difféomorphisme sur son image. On déduit des propriétés de f que $\tilde{\phi} = \phi_{|f^{-1}(a)\times\{b\}}$ est un C^1-difféomorphisme global entre $f^{-1}(a)$ et $f^{-1}(b)$. □

La condition (**M**) de Malgrange est également suffisante pour trivialiser un polynôme complexe (voir [8]). Remarquons qu'en général $B_f \neq K(f)$, même si f est un polynôme défini sur $\mathbb{R}^2$ (cf. [4]). On s'interesse désormais à la topologie des fibres au voisinage d'une valeur $c \in K_\infty(f) \setminus K_0(f)$. Soit $t \in]c, +\infty[$ tel que $[c,t] \subset \operatorname{Im} f$ et $[c,t] \cap K(f) = \{c\}$. Sous les hypothèses précédentes on a le résultat principal de la note :

Théorème de plongement. *Il existe un plongement de classe C^1, $\Phi_t : f^{-1}(c) \to f^{-1}(t)$. Plus précisément, le flot du champ $\frac{\nabla_g f}{|\nabla_g f|_g^2}$ plonge chaque composante connexe de $f^{-1}(c)$ dans une composante connexe de $f^{-1}(t)$.*

Un résultat similaire a été obtenu par Chazal (voir [1] et [2]) dans le cas d'un feuilletage de Rolle. La preuve du théorème de plongement repose sur l'étude du comportement à l'infini du champ de gradient $\nabla_g f$.

2. Inégalité de Łojasiewicz à l'infini

Nous étudions dans cette partie comment $|\nabla_g f|_g$ tend vers 0 au voisinage d'une valeur critique asymptotique. La Proposition 2.1 montre qu'en composant f à gauche par une fonction définissable ψ, la fonction $\psi \circ f$ une condition de type (**M**), mais $\psi \circ f$ n'est pas bornée au voisinage de $f^{-1}(0)$. Supposons $f \leqslant 0$, $0 \in K_\infty(f) \setminus K_0(f)$ et que 0 appartient à l'adhérence de l'image de f.

Proposition 2.1. *Il existe des réels $C, R, \varrho > 0$, et une fonction définissable $\psi :]-\varrho, 0[\to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $]-\varrho, 0[$, strictement croissante et positive, tels que pour tout $x \in V$, $|x| > R$ et $f(x) \in]-\varrho, 0[$, on ait : $|x| \cdot |\nabla_g(\psi \circ f)(x)|_g \geqslant C$.*

Demonstration (*inspirée de* [6]**).** Définissons $\varphi(t) = \inf\{|x_\nu| \cdot |\nabla_g f(x_\nu)|_g\colon\ |x_\nu| \to +\infty,\ \lim_{\nu\to+\infty} f(x_\nu) = t\}$. Si $t \notin K_\infty(f)$, alors $\varphi > 0$ dans un voisinage ouvert de t. Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, posons

$$\Delta = \bigl\{x \in V \setminus f^{-1}(0)\colon\ -\varepsilon < f(x),\ |x| \cdot \bigl|\nabla_g f(x)\bigr|_g \leqslant 2\varphi\bigl(f(x)\bigr)\bigr\}.$$

L'ensemble $\Delta \subset V$ est définissable dans $\mathcal{A}$ puisque $\nabla_g f$ est définissable. Il existe (cf., e.g., [3]) un chemin de classe C^1, définissable $\gamma : [R, +\infty[\to \Delta$, vérifiant $|\gamma(r)| = r$ et $(f \circ \gamma)(r) \to 0$ quand $r \to +\infty$. Posons $h = f \circ \gamma$. Si R est suffisamment grand, alors h est un difféomorphisme de l'intervalle $]R, +\infty[$ sur un intervalle $]-\varrho, 0[$, où $\varrho = -h(R)$. Posons $\psi(t) = h^{-1}(t)$, pour $t \in]0, \varrho[$. Soit $x \in f^{-1}(h(r))$ alors par définition de φ on obtient l'inégalité :

$$|x| \cdot \bigl|\nabla_g f(x)\bigr|_g \geqslant \frac{1}{2}\bigl|\gamma(r)\bigr| \cdot \bigl|\nabla_g f\bigl(\gamma(r)\bigr)\bigr|_g.$$

Comme $|h'(r)| \leqslant |\nabla_g f(\gamma(r))|_g \cdot |\gamma'(r)|_g$ et $\psi'(t) \cdot h'(r) = 1$ on obtient finalement :

$$|x| \cdot \bigl|\nabla_g(\psi \circ f)(x)\bigr| \geqslant \frac{|\psi'(t) \cdot h'(r)| \cdot |\gamma(r)|}{2|\gamma'(r)|_g} = \frac{|\gamma(r)|}{2|\gamma'(r)|_g} \geqslant \frac{R}{2A} = C,$$

puisqu'il existe $A > 1$ tel que $|\gamma'(r)|_g < A$ dès que r est suffisamment grand (cf. [3]). □

Remarque 1. Si la structure o-minimale $\mathcal{A}$ est polynomialement bornée l'inégalité de la Proposition 2.1 s'exprime plus simplement ; c'est-à-dire il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $|x| \cdot |\nabla_g f(x)|_g \geqslant C|f(x)|^\alpha$.

3. Preuve du théorème de plongement

Remarquons que $\nabla_g f$ est de classe C^1 et partout non nul sur le niveau $f^{-1}(c)$ (car c n'appartient pas à $K_0(f)$ et f est C^2). Ainsi, pour tout $x \in f^{-1}(c)$, il existe un voisinage ouvert $U(x) \subset V$ de x sur lequel le gradient est non nul. Fixons $x_c \in f^{-1}(c)$ et notons γ_{x_c} la courbe intégrale de $\nabla_g f$ passant par x_c. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, γ_{x_c} coupe le niveau $f^{-1}(c + \varepsilon)$ en un point $x_{c+\varepsilon}$. Notons encore γ_{x_c} la courbe intégrale après reparamétrage par sa longueur d'arc (i.e., $|\gamma'_{x_c}(s)|_g = 1$ pour tout $s \geqslant 0$ et $\gamma_{x_c}(0) = x_c$). On obtient alors

Lemme 3.1. *Pour tout ε suffisament petit, il existe $\delta \in]c, c + \varepsilon[$ tel que si $\xi = (f \circ \gamma_{x_c})^{-1}(\delta)$, alors la longueur s_ε de la courbe γ_{x_c} entre les niveaux $f^{-1}(c)$ et $f^{-1}(c + \varepsilon)$ est bornée par*

$$C \cdot s_\varepsilon \leqslant \bigl|\psi'(\delta)\bigr| \cdot \bigl|\gamma_{x_c}(\xi)\bigr| \cdot \varepsilon.$$

Preuve du Lemme 3.1. La fonction $f \circ \gamma_{x_c}$ étant de classe C^1, il existe $\xi \in]0, s_\varepsilon[$ tel que

$$\varepsilon = \bigl|f(x_{c+\varepsilon}) - f(x_c)\bigr| = \bigl|f \circ \gamma_{x_c}(s_\varepsilon) - f \circ \gamma_{x_c}(0)\bigr| = \bigl|(f \circ \gamma_{x_0})'(\xi)\bigr| \cdot s_\varepsilon. \tag{1}$$

Avec le paramétrage choisi on a $(f \circ \gamma_{x_c})'(\xi) = \nabla_g f(\gamma_{x_c}(\xi))$. L'Éq. (1) s'écrit : $\varepsilon = |\nabla_g f(\gamma_{x_c}(\xi))| \cdot s_\varepsilon$. Choisissons des réels $C, R, \varrho > 0$ et une fonction ψ qui vérifient l'inégalité de la Proposition 2.1 pour la fonction $c - f$. Soient $0 < \varepsilon < \varrho$ et $|x_c| > R$. Si ε est suffisament petit alors la courbe $\gamma_{x_c} \cap f^{-1}([c, c + \varepsilon])$ est contenue dans l'ensemble $\{x \in V\colon\ |x| > R\}$. En posant $\delta = f \circ \gamma_{x_c}(\xi)$ on obtient la majoration cherchée, ce qui termine la preuve du Lemme 3.1. □

La fonction $|\psi'|$ étant strictement décroissante sur $]c, c + \varrho[$, le Lemme 3.1 appliqué au point $\gamma_{x_c}(s_\varepsilon)$ implique le

Lemme 3.2. *La courbe γ_{x_c} coupe toutes les hypersurfaces de niveau $\tau \in [c, \varrho]$ et est de longueur finie entre les niveaux $f^{-1}(c)$ et $f^{-1}(c + \varrho)$.*

Preuve du théorème de plongement. Soit ϕ_u le flot du champ $\nabla_g f$. Pour $x_c \in f^{-1}(c)$, notons $\beta(x_c) = \sup\{u \mid f(\phi_u(x_c)) \leqslant t\}$. Les champs $\nabla_g f$ et $\nabla_g f / |\nabla_g f|_g^2$ ayant le même portrait de phase, on en déduit que $\beta(x_c) < +\infty$

pour tout $x_c \in f^{-1}(c)$. Ainsi, β est uniformément bornée sur toute section compacte $\Sigma \subset f^{-1}(c)$ de $\nabla_g f$ et l'application $\Phi_\Sigma = (\phi_\beta)_{|\Sigma}$ est un C^1-difféomorphisme sur $\Phi(\Sigma)$. L'application $\Phi = (\phi_\beta)_{|f^{-1}(c)}$ satisfait donc la conclusion du théorème de plongement et le flot du champ $\nabla_g f$ plonge chaque composante connexe du niveau $f^{-1}(c)$ dans une composante connexe du niveau $f^{-1}(t)$. □

4. Application à un polynôme complexe

Soit $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ une fonction polynomiale. On munit $\mathbb{C}^n$ de la métrique hermitienne usuelle. Notons ∇P le champ $\sum_{i=1}^n \frac{\partial P}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$. Comme précédemment, $t \in \mathbb{C}$ est appelée valeur critique asymptotique de P si la condition de Malgrange « il existe un voisinage $U(t)$ de t et une constante $C > 0$ telle que $|x| \cdot |\nabla P| \geqslant C$, pour $|x| \gg 1$ et $P(x) \in U(t)$ » est mise en défaut. On note $K_\infty(P)$ l'ensemble des valeurs critiques asymptotiques et $K(P) = K_0(P) \cup K_\infty(P)$ l'ensemble des valeurs critiques généralisées ; $K_0(P)$ étant l'ensemble des valeurs critiques. Kurdyka, Orro et Simon (cf. [7]) ont montré que $K_\infty(P)$ est fini. Une valeur $t \in \mathbb{C}$ est dite typique si $t \notin K(P)$. On déduit du théorème de plongement le

Corollaire 4.1. *Soit $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ une fonction polynomiale complexe. Supposons que $0 \in K_\infty(P) \setminus K_0(P)$. Si t est une valeur typique de P, alors il existe un plongement $\varphi_{0,t} : P^{-1}(0) \to P^{-1}(t)$.*

Démonstration. En identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, $K(P)$ devient un sous-ensemble fini du plan réel. Soit $L \subset \mathbb{R}^2$ une courbe algébrique réelle lisse joignant $0 \in K_\infty(P)$ à t et ne rencontrant aucune autre valeur critique généralisée de P. Puisque 0 est une valeur régulière, $P_{|P^{-1}(L)} : P^{-1}(L) \to L$ est une submersion et $\dim_{\mathbb{R}} P^{-1}(L) = 2n - 1$. On munit $\mathbb{C}^n$ identifié à $\mathbb{R}^{2n}$ de la structure euclidienne usuelle. Soit $V_L = P^{-1}(L)$. C'est une hypersurface algébrique réelle lisse. On munit V_L de la structure riemannienne induite par la structure euclidienne de $\mathbb{R}^{2n}$. Soit f_L la restriction de P à V_L. La fonction $f_L : V_L \to L$ est semi-algébrique et n'a qu'un nombre fini de valeurs critiques asymptotiques (voir [3]). C'est par définition une submersion. En particulier 0 n'est pas valeur critique de f_L. Observons que L est difféomorphe à un intervalle fermé. Si 0 est une valeur critique asymptotique de f_L, alors d'après le théorème de plongement il existe un plongement $\Phi_{0,t} : f_L^{-1}(0) \to f_L^{-1}(t)$. Si 0 est une valeur typique de f_L, alors $\Phi_{0,t}$ est un difféomorphisme. Ainsi il existe un plongement $\varphi_{0,t} : P^{-1}(0) \to P^{-1}(t)$.

Remerciements

À l'équipe de Géométrie du LAMA (Université de Savoie). Une pensée particulière à V. Grandjean, K. Kurdyka, P. Orro et S. Simon pour l'aide qu'ils m'ont apportée durant ce travail. Je remercie également R. Moussu.

Références

[1] F. Chazal, Sur les feuilletages algébriques de Rolle, Comment. Math. Helv. 72 (3) (1997) 411–425.
[2] F. Chazal, Structure locale et globale des feuilletages de Rolle, un théorème de fibration, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 48 (1998) 553–592.
[3] D. D'Acunto, Valeurs critiques asymptotiques d'une fonction définissable dans une structure o-minimale, Ann. Polon. Math. 35 (2000) 35–45.
[4] D. D'Acunto, V. Grandjean, On gradient at infinity of polynomial functions on the plane, Preprint.
[5] L. van den Dries, Tame Topology and o-Minimal Structures, in: London Math. Soc. Lecture Notes Ser., Vol. 248, Cambridge University Press.
[6] K. Kurdyka, On gradients of functions definable in o-minimal structures, Ann. Inst. Fourier 48 (3) (1998) 769–783.
[7] K. Kurdyka, P. Orro, S. Simon, Semialgebraic Sard theorem for generalized critical values, J. Differential Geom. 56 (1) (2000) 67–92.
[8] A. Parusiński, On the bifurcation set of complex polynomial with isolated singularities, Compositio Math. 97 (1995) 369–384.