Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE @ DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 309–312
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Équations aux dérivées partielles

Transport-diffusion et viscosité évanescente

Taoufik Hmidi

Centre de mathématiques, École polytechnique, 91128 Palaiseau cedex, France

Reçu le 15 juillet 2003 ; accepté le 18 juillet 2003

Présenté par Jan-Michel Bony

Résumé

Dans cet article, nous étudions un modèle de transport-diffusion relatif à un champ log-Lipschitzien. Plus précisément, on s'intéresse à la répartition visqueuse de la masse des solutions de l'équation correspondante. On démontre que la masse est quasiment concentrée autour du transporté du support initial par le flot. Ceci nous permet, dans le cas des poches de tourbillon bidimensionnelles non régulières, de montrer un résultat global de convergence L^p du tourbillon de Navier–Stokes ω_ν vers celui d'Euler ω, avec $p > 1$. ***Pour citer cet article : T. Hmidi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

Abstract

Convection-diffusion and vanishing viscosity. In this paper, we study a convection-diffusion model with respect to a vector field having log-Lipschitz regularity. More precisely, we are interested in the viscous repartition of the mass for the solutions of the corresponding equation. We prove that mass is essentially concentrated around the image, through the flow, of the initial support. This allows us, for non-regular bidimensional vortex patches, to prove the global L^p convergence of the Navier–Stokes vorticity ω_ν to the Eulerian vorticity ω, with $p > 1$. ***To cite this article: T. Hmidi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003).***

1. Introduction

Nous envisageons dans cet article de localiser les endroits où est concentrée la quasi-totalité des normes L^p de toute solution du modèle de transport-diffusion (TD_ν) décrit ci-dessous. Le champ de vecteurs v_ν qui apparaît dans le terme de convection est supposé uniquement log-lipschitzien. Plus précisément, nous allons établir un résultat de décroissance localement exponentielle et globalement « polynomiale » par rapport à la viscosité ν. La motivation initiale de cette étude est un problème de convergence visqueuse du tourbillon du système de Navier–Stokes incompressible vers celui d'Euler incompressible, dans le cas des poches de tourbillon non régulières. Les deux modèles qu'on envisage d'étudier sont

$$(TD_\nu)\quad \begin{cases}\partial_t a_\nu + v_\nu\cdot\nabla a_\nu - \nu\Delta a_\nu = 0,\\ a_\nu|_{t=0} = a^0,\end{cases}\qquad \text{et}\qquad (T)\quad \begin{cases}\partial_t a + v\cdot\nabla a = 0,\\ a|_{t=0} = a^0,\end{cases}$$

Adresse e-mail : hmidi@math.polytechnique.fr (T. Hmidi).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/S1631-073X(03)00351-0

où ν est un réel positif désignant la viscosité, a_ν est une fonction de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ et (v_ν) est une famille de champs de vecteurs de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$, avec $d \geqslant 2$. L'opérateur $v_\nu \cdot \nabla$ est défini par $v_\nu \cdot \nabla = \sum_{i=1}^d v_\nu^i \partial_i$. Nous signalons que (TD_ν) et (T) sont les équations modèle qui régissent, en dimension 2, le tourbillon ω_ν associé au système de Navier–Stokes incompressible (NS_ν) et respectivement celui correspondant au système d'Euler (E).

$$(NS_\nu) \quad \begin{cases} \partial_t v_\nu + v_\nu \cdot \nabla v_\nu - \nu \Delta v_\nu = -\nabla p_\nu, \\ \operatorname{div} v_\nu = 0, \\ v_\nu|_{t=0} = v^0, \end{cases} \qquad \text{et} \quad (E) \quad \begin{cases} \partial_t v + v \cdot \nabla v = -\nabla p, \\ \operatorname{div} v = 0, \\ v|_{t=0} = v^0. \end{cases}$$

On note $\psi_\nu(t,x)$ le flot associé au champ de vecteurs v_ν dont l'évolution obéit à l'équation intégrale

$$\psi_\nu(t,x) = x + \int_0^t v_\nu\big(\tau, \psi_\nu(\tau,x)\big)\,\mathrm{d}\tau.$$

On le note simplement ψ lorsqu'il s'agit du flot de v. Signalons au passage l'existence et l'unicité du flot pour les champs log-lipschitziens dans la classe des fonctions continues. On pose aussi

$$F_0 = \operatorname{supp}\big(a^0\big), \quad F_t = \psi(t, F_0) \quad \text{et} \quad F_{t,\nu} = \psi_\nu(t, F_0).$$

Soit A une partie de $\mathbb{R}^d$ et h une longueur. Alors on définit les ensembles

$$A_h^c = \big\{x \in \mathbb{R}^d,\, d(x,A) \geqslant h\big\} \quad \text{et} \quad \big(A^c\big)_h = \big(A^c\big)_h^c.$$

On définit aussi pour tout t positif et pour ℓ fixé dans $[\frac{1}{2}, 1]$

$$V_\nu(t) = \int_0^t \big\|v_\nu(\tau)\big\|_{LL}\,\mathrm{d}\tau \quad \text{et} \quad \delta_\nu(t,h) = e\ell\Big(\frac{h}{e\ell}\Big)^{\exp V_\nu(t)}.$$

Le réel ℓ représente l'unité de longueur. On l'a introduit pour adimensionner les quantités mises en jeu. On désigne par $(C_{LL}, \|\cdot\|_{LL})$ l'espace normé des fonctions v vérifiant

$$\|v\|_{LL} = \frac{\|v\|_{L^\infty}}{\ell} + \sup_{0<|x-x'|\leqslant \ell} \frac{|v(x)-v(x')|}{|x-x'|\ln(e\ell/|x-x'|)} < +\infty.$$

Concernant la convergence du tourbillon ω_ν vers ω, Danchin [3] montre, en dimension 2, que si on part d'une donnée initiale de type poche de tourbillon à bord de classe $C^{1+\varepsilon}$ avec $\varepsilon \in (0,1)$ alors, la vitesse v_ν est lipschitzienne. De plus son contrôle de Lipschitz est uniforme en ν. Cette information importante lui permet d'établir un résultat global de convergence L^p, avec $p \in (1, +\infty)$. En fait, il montre le résultat suivant :

Théorème 1.1. *Soient $\nu > 0$ et v_ν un champ de vecteurs appartenant à $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^d))$ et à divergence nulle. On suppose que a_ν vérifie (TD_ν) avec $a^0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Alors on a pour tout $t > 0$ et $h > 0$:*

(1) $\|a_\nu(t)\|_{L^2((F_{t,\nu})_h^c)} \leqslant \mathrm{e}^{-(h^2/(4\nu t))\,\mathrm{e}^{-4\overline{V}_\nu(t)}} \|a^0\|_{L^2}$.

(2) *Si $a^0 = 1_{F_0}$, alors*

$$\big\|a_\nu(t) - \mathbf{1}_{F_{t,\nu}}\big\|_{L^2((F^c_{t,\nu})_h)} \leqslant 2\big\|a^0\big\|_{L^2} \min\left\{1, C\left(\frac{\nu t}{h^2}\right)^{1/2} \mathrm{e}^{2\overline{V}_\nu(t)}\,\mathrm{e}^{-(h^2/(\nu t))\,\mathrm{e}^{-4\overline{V}_\nu(t)}}\right\}.$$

avec C est une constante universelle et $\overline{V}_\nu(t) = \int_0^t \|\nabla v_\nu(s)\|_{L^\infty}\,\mathrm{d}s$.

Dans le cas des tourbillons moins réguliers, Constantin et Wu [2] ont montré que si le tourbillon initial est dans $L^1 \cap L^\infty \cap B^s_{2,\infty}$ avec $s \in (0,1)$ alors on a un résultat local de convergence L^p. Nous montrons ici que si le tourbillon initial vaut $\mathbf{1}_{F_0}$ avec F_0 juste un domaine borné à bord de mesure nulle alors nous avons un résultat global de convergence $L^p,\ p \in (1, +\infty)$. Nous montrons également un résultat local de convergence « presque » L^∞. L'information cruciale dont on sert est l'uniformité en ν du contrôle du champ de vecteurs v_ν dans l'espace C_{LL}.

2. Énoncé des résultats principaux

Théorème 2.1. *Il existe deux constantes positives C_0 et C telles que, si v_ν est un champ de vecteurs appartenant à $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\ C_{LL})$ de divergence nulle et si a_ν vérifie (TD_ν), avec a^0 dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour un certain p pris dans l'intervalle $[2, +\infty)$ alors, en posant*

$$T_\nu = \sup\left\{t \geqslant 0,\ \int_0^t \left\|v_\nu(s)\right\|_{LL} \mathrm{d}s \leqslant \frac{1}{C_0}\right\},$$

on aura pour tout $t \in [0, T_\nu)$, pour tout $h \in [0, \ell]$ et pour tout ν vérifiant

$$\frac{\nu t}{\ell^2} \leqslant \left(\frac{h}{C\ell}\right)^{C/(1-C_0 V_\nu(t))}, \tag{1}$$

l'estimation suivante

$$\left\|a_\nu(t)\right\|_{L^p((F_{t,\nu})^c_h)} \leqslant C\left\|a^0\right\|_{L^p} \exp\left(-\frac{e}{4}\left(\frac{\ell^2}{\nu t}\right)^{1/4}\left(\frac{h}{e\ell}\right)^{\exp V_\nu(t)}\right).$$

De plus, si F_0 est un domaine borné de $\mathbb{R}^d$ alors, en posant $a^0 = \mathbf{1}_{F_0}$ et en se restreignant à des réels $t \in [0, T_\nu)$, $h \in [0, \ell]$ et ν satisfaisant (1), *on aura l'estimation suivante*:

$$\left\|a_\nu(t) - \mathbf{1}_{F_{t,\nu}}\right\|_{L^p((F^c_{t,\nu})_h)} \leqslant C\left\|a^0\right\|_{L^p} \exp\left(-\frac{e}{4}\left(\frac{\ell^2}{\nu t}\right)^{1/4}\left(\frac{h}{e\ell}\right)^{\exp V_\nu(t)}\right).$$

La condition $p \geqslant 2$ est juste technique : elle permet de valider les intégrations par parties dont on se sert dans la méthode d'énergie. Remarquons que le théorème ci-dessus donne un résultat local de décroissance exponentielle. Cependant, nous établissons un résultat global de décroissance mais seulement en une puissance fractionnaire de ν. Voici l'énoncé :

Théorème 2.2. *Il existe deux constantes strictement positives C_0 et C telles que, si (v_ν) est une famille de champs de vecteurs de divergence nulle, appartenant à $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\ C_{LL})$ et si a_ν vérifie (TD_ν), avec $a^0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ alors, pour tout temps $T > 0$ et pour tout nombre réel $\alpha \in (0, 1)$ et $h \in [0, \ell]$, si ν vérifie*

$$\frac{\nu T}{\ell^2} \leqslant \min\left\{\left(\frac{h}{32e\ell}\right)^{C\exp(V_\nu(T)/(1-\alpha))^2},\ \left(\frac{\mathrm{e}^{1-\exp C_0 V_\nu(T)}}{C_0 V_\nu(T)}\right)^{4/(1+\alpha)}\right\}, \tag{2}$$

on aura pour tout temps t appartenant à $[0, T]$

$$\left\|a_\nu(t)\right\|_{L^2((F_{t,\nu})^c_h)} \leqslant C\left(\frac{\nu t}{\ell^2}\right)^{\alpha/2}\left(\frac{4e\ell}{h}\right)^{\exp(CV_\nu(T)/(1-\alpha))^2}\left\|a^0\right\|_{L^2}.$$

De plus, considérons la donnée initiale $a^0 = \mathbf{1}_{F_0}$, avec F_0 un domaine borné. Alors pour tout h et ν vérifiant la condition (2), *l'estimation suivante a lieu*: *pour tout $t \in [0, T]$,*

$$\left\|a_\nu(t) - \mathbf{1}_{F_{t,\nu}}\right\|_{L^2((F^c_{t,\nu})_h)} \leqslant C\left(\frac{\nu t}{\ell^2}\right)^{\alpha/2}\left(\frac{4e\ell}{h}\right)^{\exp C(V_\nu(T)/(1-\alpha))^2}\left\|a^0\right\|_{L^2}.$$

Le corollaire suivant fournit un résultat de convergence en norme $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\ L^p(\mathbb{R}^2))$ du tourbillon ω_ν vers ω, quand la viscosité tend vers zéro. Le taux de convergence qu'on réussit à expliciter est une puissance de ν qui se dégrade au cours du temps. La preuve est basée sur les résultats précédents ainsi que sur un résultat de convergence L^2 de v_ν vers v que Chemin a établi dans [1].

Corollaire 2.3. *Soient ω_ν et ω les tourbillons respectifs des solutions de (NS_ν) et de (E) tels qu'on ait $\omega_\nu(0)=\omega(0)=\omega^0=\mathbf{1}_{F_0}$, avec F_0 un domaine borné ayant un bord rectifiable de longueur finie L_0. Alors pour tout $p\in(1,+\infty)$, on a*

$$\lim_{\nu\to 0^+}\|\omega_\nu-\omega\|_{L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\,L^p(\mathbb{R}^2))}=0.$$

Plus précisément, il existe une fonction f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ strictement décroissante vers zéro et il existe une constante C strictement positive telles que, pour tout réel T positif et pour tout nombre positif ν vérifiant

$$\frac{\nu T}{\ell^2}\leqslant f\big(T\|\omega^0\|_{L^1\cap L^\infty}\big),$$

on a l'estimation

$$\forall t\in[0,T],\quad \big\|\omega_\nu(t)-\omega(t)\big\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\leqslant C\big\|\omega^0\big\|^2_{L^1\cap L^\infty}\big(L_0\ell+\ell^2\big)\left(\frac{\nu T}{\ell^2}\right)^{C^{-1}\exp(-CT^2\|\omega^0\|^2_{L^1\cap L^\infty})}.$$

De plus, il existe une constante universelle $C_1>0$ telle que, pour tout réel $h\in[0,\ell]$ et pour tout temps $t\in[0,C_1\|\omega^0\|^{-1}_{L^1\cap L^\infty})$, on ait

$$\lim_{\nu\to 0^+}\big\|\omega_\nu(t)-\omega(t)\big\|_{L^\infty(\mathcal{T}^c_{t,h})}=0,$$

où l'on a posé $\mathcal{T}_{t,h}=\{x\in\mathbb{R}^2,\ d(x,\partial F_t)\leqslant h\}$.

La preuve du Théorème 2.1 est basée sur la régularisation du champ de vecteurs v_ν via l'opérateur de filtrage en fréquence S_λ et l'utilisation de troncatures exponentielles à la manière de [3]. Ensuite on procède à une estimation d'énergie suivie d'une application d'un lemme portant sur la description de la dynamique d'un ensemble donné à travers le flot. Finalement, on choisit judicieusement la valeur de λ en fonction de ν, t et ℓ. En ce qui concerne la preuve du Théorème 2.2, elle est fondée sur une procédure récursive faisant appel à des troncatures non exponentielles qui utilisent le flot à deux paramètres $\psi(t,s,\cdot)$. Ensuite on développe une méthode d'énergie similaire à celle du Théorème 2.1.

Remarques. (1) L'hypothèse que ∂F_0 est rectifiable n'est pas essentielle. On peut juste supposer que la mesure de Lebesgue de cet ensemble est nulle. Mais on ne peut pas avoir un contrôle explicite.

(2) La condition (1) est dictée par deux faits : le premier est lié à la dynamique des ensembles $(F_0)^c_h$ et $(F^c_0)_h$ à travers les flots, y compris le flot régularisé. Alors que le second concerne la simplification de l'expression figurant dans l'exponentielle. La condition (2) est liée essentiellement au premier fait.

Références

[1] J.-Y. Chemin, A remark on the inviscid limit for two-dimmensionnel incompressible fluid, Comm. Partial Differential Equations 21 (1996) 1771–1779.

[2] P. Constantin, J. Wu, The inviscid limit for non-smooth vorticity, Indiana Univ. Math. J. 45 (1996) 67–81.

[3] R. Danchin, Poches de tourbillon visqueuses, J. Math. Pures Appl. 76 (7) (1997) 609–647.