

J.-P. BENZÉCRI

La vision des couleurs. I. Structure physique des stimuli et axiomes de l'équivalence sensorielle

Les cahiers de l'analyse des données, tome 6, n° 1 (1981),
p. 59-85

http://www.numdam.org/item?id=CAD_1981__6_1_59_0

© Les cahiers de l'analyse des données, Dunod, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Les cahiers de l'analyse des données » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LA VISION DES COULEURS

I. - STRUCTURE PHYSIQUE DES STIMULI ET AXIOMES DE L'ÉQUIVALENCE SENSORIELLE

[COULEURS I]

(à suivre)

par J.-P. Benzécri (1)

Le présent exposé, premier d'une série de quatre consacrés à la vision des couleurs, fait suite à deux articles de psychophysique parus dans les Cahiers (Vol IV pp 391-412 ; 1979).

1 *Introduction* : Dans beaucoup de recherches psychométriques, le stimulus est une grandeur physique unidimensionnelle, ou du moins une grandeur dont on ne fait varier qu'une dimension. Mais les stimuli naturels présentent un grand nombre de dimensions. Un exemple complètement formalisable mathématiquement est celui des stimuli physiques ondulatoires (sons ou lumière...) : par la formule intégrale de Fourier, chaque stimulus s'exprime comme combinaison linéaire d'une infinité continue de stimuli sinusoïdaux purs ; les stimuli varient donc dans un espace vectoriel de dimension infinie. Dans le cas des stimuli sonores, l'énergie vibratoire est transmise globalement, mécaniquement, jusqu'à la membrane basilaire (dans l'oreille interne). A ce niveau, une certaine analyse spectrale mécanique s'opère, avant que le stimulus ne soit codé en influx nerveux : chaque portion de la membrane répond principalement aux fréquences d'une bande déterminée. On peut donc dire que l'infinité des composantes du stimulus se trouve, comme dans le toucher, distribuée à une infinité d'éléments sensoriels répartis continûment (les cellules de la membrane basilaire) ; tandis que l'organisation en des formes sonores (paroles, musique...) de l'ensemble de ces composantes est un problème plus perceptif que sensoriel. Mais dans le cas des stimuli lumineux, chaque portion de la rétine est soumise à un flux complexe entré dans l'oeil par la pupille et réfracté vers cette portion au travers des divers milieux transparents ; chaque corpuscule de la rétine répond à un stimulus qui a un nombre infini de dimensions. Toutefois, la réponse sensorielle n'a pas la complexité du stimulus : le sujet n'a conscience que d'un phénomène tridimensionnel. Il est possible de demander à un sujet de chiffrer ses impressions sensibles, et aussi de reprendre ici, dans un domaine multidimensionnel, l'étude des seuils. Mais c'est la réduction du nombre des dimensions de l'infini à trois qui est le plus remarquable : sur l'espace infini-dimensionnel des stimuli est définie une relation d'équivalence (deux lumières sont équivalentes si elles sont vues semblables par le sujet) et l'espace des réponses (impressions sensibles), espace quotient tridimensionnel, hérite approximativement de la structure vectorielle de l'espace des stimuli. Mathématiquement, parler de structure approchée est insolite, (un espace n'est pas à peu près vectoriel...). Cependant une structure mathématique \mathcal{S} , e.g. une loi de groupe sur E , peut être considérée comme un cas particulier d'une structure \mathcal{S}' comportant les mêmes relations que \mathcal{S} , mais assujetties à des axiomes plus faibles : e.g., au lieu de la loi de multiplication, application ensembliste de $E \times E$ dans E assujettie aux axiomes des groupes, on aura une application quelconque ou même une probabilité de

(1) Professeur de statistique. Université P. et M. Curie.

transition de $E \times E$ dans E . Dans le cadre général, on peut définir la proximité entre une structure faible \mathcal{J}' et une structure forte \mathcal{J} . Or dans les sciences naturelles, il peut être fécond et légitime d'associer rigoureusement à des phénomènes des éléments d'une structure mathématique dont les relations ne coïncident pas absolument avec les relations expérimentales : c'est en ce sens qu'on parle de structure mathématique approchée de la nature. Si, avec, notamment, Suppes et Zinnes (1963), on considère la psychométrie comme l'étude de systèmes de relations qui définissent sur des ensembles de stimuli ou de réponses diverses structures mathématiques, l'exemple des sensations lumineuses est précieux.

Dans notre exposé, nous ferons de fréquentes références à deux textes, l'un de Judd (1951), l'autre de Stiles (1955), qui nous ont apporté l'essentiel des faits analysés ici, ainsi qu'à la thèse de F. Parra (1966) qui nous a apporté de très intéressants compléments. Pour la commodité du lecteur, nous donnons ici quelques références, réservant pour la fin des articles de la présente série, une liste bibliographique complète.

D.B. Judd : Basic correlates of the visual stimulus ; in Stevens et al., *Handbook of experimental psychology*, pp 811-867 ; J. Wiley ; N.-Y. (1951).

F. Parra : *Recherches sur le seuil différentiel de couleur* ; Thèse Paris (1966).

W.S. Stiles : The basic data of colour-matching ; *Physical Soc. Year Book* pp 44-65 (1955) ; reproduit dans : Luce et al. : *Readings in Mathematical Psychology* Vol II (nous citons d'après la pagination de ce recueil).

2 Description physique des stimuli rayonnants : Décrire les phénomènes lumineux, c'est décrire le champ magnétique, avec sa double nature ondulatoire et corpusculaire ; problème qui, dans toute sa généralité, est très complexe. Il faut tenter de simplifier pour avoir de l'état de stimulation de la rétine à la fois une conception intuitive et une formulation mathématique convenable. Dans la suite nous emploierons exclusivement le terme de rayonnement quand il s'agira de propriétés physiques et réserverons le terme de lumière pour les cas où l'on considèrera l'impression sensible produite par les stimuli rayonnants ; d'où le titre de ce paragraphe.

Le § 2 relève de l'optique géométrique. Nous avons tenu à écrire un exposé complet, car les bases géométriques de la propagation du rayonnement ne se trouvent guère dans les anciens cours d'optique, cependant que la notion d'élément de volume sur la variété des droites (cf *infra* 2.3.2sq), ainsi que les notions analogues relatives aux sous-variétés linéaires de dimension p de \mathbb{R}^d , servent aux probabilistes pour résoudre des problèmes de géométrie intégrale tels que celui de l'aiguille de Buffon (cf, e.g., le cours de G. Darmon). Mais un lecteur qui ne s'intéresse qu'à la psychophysique, et accepte de se contenter d'une conception imprécise de la brillance énergétique (puissance émissive d'une source ou d'un pinceau lumineux) pourra se borner à lire les §§ 2.1, 2.2, et 2.5.5. Dans la suite, seuls les §§ 4.1.4 et 4.2.1 (unités de mesure en photométrie et dispositif expérimental de Stiles) font essentiellement référence à l'ensemble du § 2.

2.1 Le rayonnement considéré comme un fluide : Nous dirons que le rayonnement est un phénomène vibratoire transportant de l'énergie : de ce point de vue, on a une description complète si, étant donné un élément de surface ΔS (d'orientation et de position déterminées), un angle solide Ω (ensemble continu de directions orientées, e.g. un secteur

conique), un intervalle de temps (t_1, t_2) et un intervalle de fréquence (ν_1, ν_2) on peut (cf *infra* 2.3) dire quelle quantité d'énergie rayonnante de fréquence comprise entre ν_1 et ν_2 (on dit dans la bande (ν_1, ν_2)), traverse pendant l'intervalle de temps (t_1, t_2) la surface ΔS dans une direction appartenant à Ω . Ainsi, le rayonnement est assimilé à un fluide : mais par rapport au mouvement d'un fluide usuel (gaz ou liquide), le cas du rayonnement est plus complexe en ce qu'en tout point peuvent coexister une infinité continue de mouvements élémentaires, correspondant aux diverses fréquences et directions. Dans le vide, l'énergie rayonnante se propage sans absorption (flux conservatif), en ligne droite à une vitesse (notée c) indépendante de la fréquence. Mais, en présence de matière, se produisent concurremment à des degrés divers selon le matériau en cause, les phénomènes de réfraction, réflexion, absorption, diffusion, émission, phénomènes que nous caractériserons sommairement. Dans la matière, l'énergie rayonnante se propage sans changer de fréquence (c'est le principe de l'indépendance des fréquences, selon lequel on peut scinder le fluide rayonnant en une infinité continue de fluides indépendants caractérisés par leur fréquence) ; mais la vitesse est le quotient de c par une grandeur supérieure à 1, l'indice de réfraction, qui est fonction de la fréquence et du milieu. Les variations d'indice, dues à l'hétérogénéité du milieu, ou à la juxtaposition de milieux divers, sont cause que le rayonnement ne se propage pas en ligne droite : il y a réfraction. A la surface de séparation de deux milieux d'indices différents une partie de l'énergie rayonnante peut rebrousser chemin (sans pénétrer dans le milieu contigu à celui d'où elle provient) dans une direction symétrique par rapport à la normale de sa direction d'incidence ; c'est la réflexion (phénomène qui peut se produire seulement si l'indice varie rapidement mais continûment, les surfaces d'indice constant jouant le rôle des surfaces de séparation...). Il se peut encore qu'une partie de l'énergie rayonnante soit renvoyée dans toutes les directions, indépendamment de la direction d'incidence : c'est la diffusion, (qui se produit à la limite d'un milieu peu transparent, ou dans toute l'étendue d'un matériau hétérogène, e.g. gaz chargé de poussières). En définitive, dans la matière le flux d'énergie rayonnante n'est pas invariable. D'une part une partie de l'énergie n'est ni réfractée ni réfléchie ni diffusée, elle est absorbée (d'autant plus que pour la fréquence en cause le milieu est moins transparent...) et opère dans la matière diverses transformations (par exemple chimiques...). D'autre part, il peut y avoir émission, transformation en énergie rayonnante d'énergie d'une autre nature (par exemple d'énergie chimique, dans une flamme où la combustion s'accompagne d'émission ; ou d'énergie rayonnante, mais d'une autre fréquence, dans le cas des substances fluorescentes). Notons qu'absorption et émission ont en commun leur caractère quantique : la plus petite quantité d'énergie d'une fréquence ν susceptible d'être émise ou absorbée est $h\nu$, produit de ν par la constante universelle de Planck.

2.2 Mesure et répartition en fréquence : Mathématiquement, une quantité d'énergie rayonnante E est représentée par une mesure positive $E(\nu)d\nu$ sur la demi-droite $(0, \infty)$; l'intégrale

$$\int_0^{\infty} E(\nu) d\nu$$

est l'énergie totale ; l'intégrale :

$$\int_{\nu_1}^{\nu_2} E(\nu) d\nu$$

donne la portion d'énergie correspondant aux fréquences comprises entre ν_1 et ν_2 . Notons ici l'emploi du terme mesure : on parle souvent de radiation monochromatique E_0 de fréquence ν_0 à quoi correspond une

mesure ponctuelle (toute l'énergie est dans une seule fréquence) ; dans ce cas il n'y a pas de densité continue mais on écrit :

$$E_{\nu_0}(\nu)d\nu = \delta(\nu - \nu_0)d\nu,$$

comme s'il y avait une densité, (la fonction $\delta(x)$ de Dirac infinie pour $x = 0$, nulle ailleurs et d'intégrale 1). Toutefois, comme l'on ne dispose jamais de radiation rigoureusement monochromatique, on peut dire qu'il y a une vraie densité très grande en ν_0 et nulle en dehors d'un petit voisinage. En tout cas nous ferons souvent figurer l'élément différentiel $d\nu$ pour marquer qu'il s'agit non d'une fonction $E(\nu)$, mais d'une mesure $E(\nu)d\nu$ (i.e. d'une distribution de masse continue ou discontinue).

L'usage est de répartir l'énergie rayonnante non suivant les fréquences ν (invariantes quand le rayonnement se propage au travers des milieux divers) mais suivant la longueur d'onde λ dans le vide (liée à ν par la formule $\lambda\nu = c$, c vitesse dans le vide). La même distribution d'énergie pourra s'écrire :

$$E'(\nu)d\nu \quad \text{ou} \quad E(\lambda)d\lambda$$

les deux densités (si elles existent !) étant reliées par la formule (conséquence de $\lambda\nu = c$)

$$E(\lambda) = \frac{c}{\lambda^2} E'(c/\lambda)$$

De même une puissance rayonnante (quantité d'énergie rayonnée par unité de temps) sera représentée par une mesure (en ν ou plus communément en λ) $W(\lambda)d\lambda$, la puissance totale étant $\int W$ qui se mesure dans les unités usuelles de puissance (e.g. en watts).

Pour une distribution de brillance énergétique on écrira $B(\lambda)d\lambda$; et $\int B$ sera la brillance énergétique totale (qui se mesure en watts par $\text{cm}^2 \times \text{stéradians}$, cf *infra* § 2.3.2...).

Dans la suite, partout sauf au § 2.5.4, il s'agira de flux permanent de rayonnement (flux invariant dans le temps ; ou flux dont la variation n'est pas considérée...) ; on parlera donc presque toujours non d'énergie, mais de puissance.

2.3 Propagation du flux lumineux : Nous décrirons d'abord le flux lumineux dans le vide ; nous étendrons ensuite cette description à un milieu transparent hétérogène, où la réfraction se produirait en l'absence de toute réflexion, absorption ou émission ; nous donnerons enfin l'effet de l'absorption, laissant au n° suivant l'étude des sources rayonnantes (émisives ou diffusantes).

2.3.1 Avant de réaliser le programme esquissé au début du § 2.1, considérons le cas du mouvement plan permanent conservatif d'un fluide ordinaire. Soit (Ox, Oz) deux axes rectangulaires (cf fig. 1). Supposons (pour fixer les notations) que les lignes de courant (trajectoires des molécules du fluide en mouvement) aient pour équation explicite :

$$x = X(x_0, z), \quad \text{avec} \quad : \quad X(x_0, 0) = x_0.$$

Supposons de plus que le fluide se déplace sur ces lignes dans le sens des z croissants. On peut écrire le flux (masse de fluide par unité de temps) qui traverse la droite d'ordonnée z_1 entre les points d'abscisse x_1 et x_2 ($x_1 < x_2$) comme une intégrale :

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x, z_1) dx$$

où $\rho(x, z)dx$ est une mesure en x , dépendant du paramètre z , mesure que nous écrirons toujours (cf § 2.2) comme si elle avait une densité. La conservation du flux s'écrit alors sous forme intégrale :

$$\forall x_1, x_2, z_1 :$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x, 0) dx = \int_{X(x_1, z_1)}^{X(x_2, z_1)} \rho(x, z_1) dx$$

ou sous forme différentielle :

$$\forall x_0, z_1 : \rho(x_0, 0) = \rho(X(x_0, z_1), z_1) \frac{\partial X(x_0, z_1)}{\partial x_0}$$

Autrement dit les trajectoires peuvent être paramétrées aussi bien par $x_0 = X(x_0, 0)$ que par $x_{z_1} = X(x_0, z_1)$, où z_1 est une ordonnée quelconque ; le flux est une mesure sur l'espace des trajectoires qui

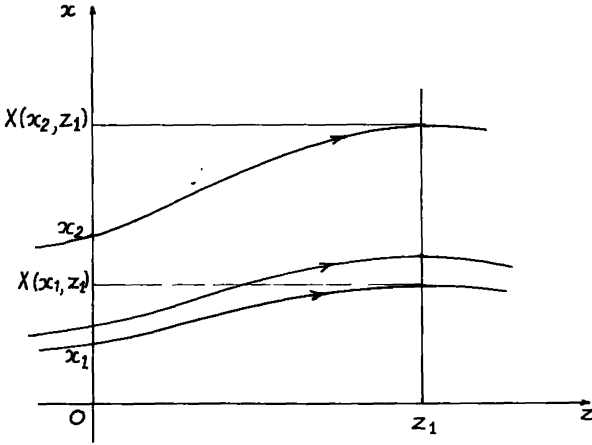


Figure 1: schéma d'un flux plan.

s'écrit selon la paramétrage choisi,

$$\rho(x_0, 0) dx_0 \text{ ou } \rho(x_{z_1}, z_1) dx_{z_1}$$

avec entre les deux densités la relation correspondant au changement de paramètre.

2.3.2 Pour le flux rayonnant la situation est plus complexe parce que les trajectoires dépendent non d'un seul paramètre mais de cinq : un rayon, c'est en effet une droite orientée δ (4 paramètres) affectée d'une longueur d'onde λ (1 paramètre) : la variété des rayons est le produit de la variété (espace) D_4 des droites par \mathbb{R}^+ (où λ prend ses valeurs). (Dans la suite du § nous distinguerons toujours droite, de rayon, comme on vient de le faire ici). Le flux rayonnant est défini pour une mesure sur $D_4 \times \mathbb{R}^+$, (la masse d'une partie de la variété étant la puissance transportée par les rayons, éléments de cette partie). Mais finalement le résultat est simple parce que sur D_4 (espace des droites)

est défini un élément de volume naturel invariant par les déplacements de l'espace euclidien orienté E_3 . Si on note $d\delta$ cet élément de volume, la mesure flux s'écrira donc :

$$B(\delta, \lambda) d\delta d\lambda ;$$

et la puissance transportée par une partie P (pinceau) de $D_4 \times R^+$ sera

$$\int_P B(\delta, \lambda) d\delta d\lambda .$$

Si au voisinage du rayon (δ, λ) la mesure flux a une densité $B(\delta, \lambda)$, on dit que $B(\delta, \lambda)$ est la brillance énergétique spectrale du rayon (δ, λ) dans le flux considéré, ou encore la brillance du flux (suivant le rayon δ, λ). De même la mesure $B(\delta, \lambda)d\lambda$ est appelée distribution de brillance énergétique de la droite orientée δ . Et par intégration partielle on obtient (en regroupant tous les rayonnements des diverses longueurs d'onde) la brillance énergétique totale de la droite δ :

$$B(\delta) = \int_{\lambda=0}^{\infty} B(\delta, \lambda) d\lambda ;$$

$B(\delta)$, (cf § 2.3.3 *in fine*) peut être mesurée en watts par $cm^2 \times$ stéradians. Il importe ici de relier la notion de flux $\phi(P)$ transporté par un pinceau P de droites (les droites d'une partie $P \subset D_4$) et celle, usuelle, de flux $\phi \langle S \rangle$ traversant une surface S dans un sens donné : $\phi \langle S \rangle$ n'est autre que le flux $\phi(P)$ transporté par l'ensemble P des droites δ qui traversent S dans le sens donné.

Notons que dans les applications pratiques, la conservation du flux n'est pas rigoureusement vérifiée, soit que les rayons ne portent d'énergie que sur une demi-droite (à partir de la naissance d'une source, § 2.4) soit que l'énergie transportée varie continûment du fait de l'absorption (§ 2.3.6 *in fine*). La mesure $\int_P B(\delta, \lambda) d\delta d\lambda$ de la puissance transportée par un pinceau P doit donc être définie à un certain niveau des rayons, par exemple à la traversée d'une surface, (ou d'une zone de l'espace où la conservation soit vérifiée avec une approximation suffisante). C'est en ce sens que, dans la suite, on parlera parfois de brillance à un certain niveau (e.g. § 2.5.2 au niveau de la rétine).

Nous allons maintenant définir l'élément de volume invariant $d\delta$ sur l'espace D_4 des droites.

2.3.3 Pour définir un élément de volume invariant sur D_4 , on utilise des coordonnées locales, i.e. des paramètres qui permettent de repérer de façon biunivoque les droites δ d'une certaine partie de D_4 , les changements de paramètres (d'un système de coordonnées à un autre) étant différentiables. Les coordonnées locales utilisées sur D_4 ne sont pas valables partout, (comme le sont les coordonnées usuelles sur E_3), parce que, d'une part, les fonctions coordonnées ne sont pas partout définies, (e.g. ci-dessous, ξ et η deviennent infinis pour une droite orthogonale à δ_0), et d'autre part deux droites qui ne diffèrent que par l'orientation auraient mêmes coordonnées (c'est pourquoi, ci-dessous, on se limite aux droites faisant avec δ_0 un angle de cosinus positif). Notons qu'en utilisant sur D_4 des systèmes de coordonnées locales, reliés par des changements de coordonnées différentiables, on définit, *ipso facto* une topologie sur D_4 : un voisinage d'une droite δ_1 sera un ensemble de droites contenant toutes les droites dont les coordonnées sont suffisamment voisines de celles de δ_1 .

Soit δ_0 une droite orientée de l'espace euclidien E_3 de dimension 3;

$\delta_0 \in D_4$. On va définir sur D_4 pour les droites orientées faisant avec δ_0 un angle de cosinus positif, des systèmes de coordonnées que nous appellerons les systèmes de centre δ_0 .

Pour définir sur D_4 un système de coordonnées de centre δ_0 on fait choix dans E_3 d'un trièdre trirectangle direct de coordonnées (Ox, Oy, Oz) dont le troisième axe Oz soit porté par δ_0 ; une droite δ voisine de δ_0 admettra des équations de la forme :

$$(\delta) \begin{cases} x = a + \xi z \\ y = b + \eta z \end{cases} ;$$

les quatre nombres (a, b, ξ, η) seront les coordonnées de la droite δ dans le système de centre δ_0 défini par le trièdre (Ox, Oy, Oz) .

Prenons un autre trièdre $(O'x', O'y', O'z')$ dont le troisième axe soit aussi δ_0 : on aura sur D_4 un autre système de coordonnées de centre δ_0 , (a', b', ξ', η') , avec les formules de changement de coordonnées :

$$\begin{aligned} a' &= a \cos \theta + b \sin \theta + (\xi \cos \theta \times z) + (\eta \sin \theta \times z) \\ b' &= -a \sin \theta + b \cos \theta - (\xi \sin \theta \times z) + (\eta \cos \theta \times z) \\ \xi' &= (\xi \cos \theta \times z) + (\eta \sin \theta \times z) \\ \eta' &= -(\xi \sin \theta \times z) + (\eta \cos \theta \times z) \end{aligned}$$

(où $\theta = (\vec{Ox}, \vec{Ox}')$, $z = \vec{OO}'$).

On constate que le changement de coordonnées est linéaire de déterminant 1. Géométriquement, les systèmes de coordonnées de centre δ_0 sont reliés entre eux par les déplacements de E_3 laissant fixe δ_0 : i.

e. les coordonnées (a', b', ξ', η') de δ dans le second système sont celles dans le premier de la droite $g\delta$ déduite de δ par le déplacement hélicoïdal g : rotation autour de Oz d'angle $-\theta$ et translation $-z$ le long de Oz ; g n'est autre que l'inverse du déplacement qui fait passer de (O, x, y, z) à (O', x', y', z) .

On peut maintenant définir l'élément de volume $d\delta$ de D_4 , invariant par déplacement. Il est caractérisé par la propriété suivante : en tout point $\delta_0 \in D_4$ (une droite, c'est un point de la variété D_4 ...) $d\delta$ est égal à $da \wedge db \wedge d\xi \wedge d\eta$, où (a, b, ξ, η) est un système de coordonnées de centre δ_0 (peu importe le système particulier choisi, puisqu'on passe de l'un à l'autre par une transformation de Jacobien 1 en δ_0). Autrement dit, dans ce système $d\delta$ s'écrira :

$$d\delta = \varphi(\delta) da \wedge db \wedge d\xi \wedge d\eta$$

avec $\varphi(\delta_0) = 1$. On va déterminer l'expression exacte de $\varphi(\delta)$. Mais $d\delta$ est d'ores et déjà déterminé puisqu'en chaque point (dans un système de coordonnées convenables) on connaît son expression : connaître $\varphi(\delta)$ au voisinage de δ_0 n'est qu'un calcul de jacobien, qu'on va simplifier par des considérations géométriques.

Remarquons que géométriquement, $da \wedge db$ n'est autre que l'élément d'aire, dS , dans le plan $H(z=0)$ (décrit par le point d'intersection avec ce plan d'une droite variable); $d\xi \wedge d\eta$ est équivalent à l'élément d'angle solide, $d\Omega$, (i.e. à l'élément d'aire sur la sphère Σ de rayon 1 du vecteur directeur unitaire ω de la droite δ); on a de façon précise :

$$d\Omega = (1 + \xi^2 + \eta^2)^{-3/2} d\xi \wedge d\eta.$$

Au lieu de dire que $d\delta$ est égal au point δ_0 à $da \wedge db \wedge d\xi \wedge d\eta$, on peut aussi bien dire que $d\delta$ est au point δ_0 égal à $dS \wedge d\Omega$. Le sens précis de cette formule est le suivant : l'application $\delta \rightarrow M$ de D_4 dans le plan H (resp. $\delta + \omega$ de D_4 dans la sphère unité Σ) permet d'associer à toute forme différentielle sur H (resp. Σ) une forme différentielle de même degré sur D_4 : ainsi l'élément d'aire dS (resp. $d\Omega$), forme différentielle de degré 2 sur H (resp. Ω) devient une forme différentielle de degré 2 sur D_4 (en particulier sur une sous-variété de dimension 2 de D_4 on peut intégrer dS , ou $d\Omega$: c'est ainsi qu'on parle de l'angle solide d'un cône C considéré comme une famille, à 2 paramètres, de droites passant par un point) et on peut parler du produit $dS \wedge d\Omega$ qui est une forme de degré 4 sur D_4 .

Si on mesure l'angle solide en stéradian (un cône découpant l'unité d'aire sur la sphère de rayon unité vaut 1 stéradian) et les longueurs, e.g. en cm, le volume d'un pinceau de droites se mesurera en $\text{cm}^2 \times \text{st.}$: en fait, physiquement, le volume d'un pinceau de droites a la dimension L^2 d'une aire (l'angle solide est sans dimension, i. e. invariant par homothétie).

Si un flux de puissance se mesure en watt, la brillance énergétique totale, $B(\delta) = \int B(\delta, \lambda) d\lambda$, se mesurera dans C en $\text{watts}/(\text{cm}^2 \times \text{st.})$.

2.3.4 Jusqu'ici, on a voulu caractériser simplement l'élément de volume $d\delta$ pour en démontrer l'existence ; on va maintenant donner des formules explicites.

La forme différentielle $da \wedge db \wedge d\Omega$ est égale à $d\delta$ non seulement en δ_0 , mais en toute droite perpendiculaire au plan ($z = 0$). (Car changer d'origine O dans ce plan revient à augmenter a, b de quantités constantes...). Pour avoir une expression exacte de $d\delta$ en toute droite δ_0' , faisant avec δ_0 un angle aigu, on va considérer un système de centre δ_0' d'où le passage au système de centre δ_0 soit facile. D'après ce qu'on vient de dire on peut supposer que δ_0 et δ_0' se coupent en O . Notons $(0, 0, \xi_0, \eta_0)$ les coordonnées de δ_0' dans le système de centre δ_0 défini par le trièdre (Ox, Oy, Oz) .

Soit (Ox', Oy', Oz') un trièdre direct dont le troisième axe soit porté par δ_0' . Dans le système de centre δ_0' (resp. δ_0) défini par (Ox', Oy', Oz') , (resp. par (Ox, Oy, Oz)), une droite variable δ aura pour coordonnées (a', b', ξ', η') (resp. (a, b, ξ, η)).

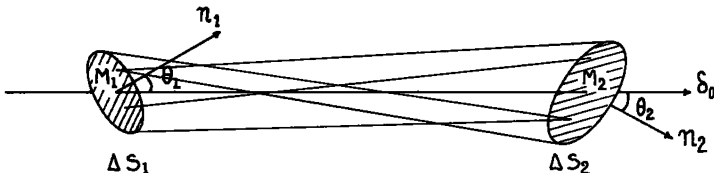


Figure 2 : un pinceau de rayons.

En δ_0 la forme du second ordre $da' \wedge db'$ est égale à $(1 + \xi_0^2 + \eta_0^2)^{-1/2} \times da \wedge db$: en effet le point d'intersection avec le plan (Ox', Oy') (perp. à δ_0) d'une droite δ voisine de δ_0 , est, (au second ordre près) la projection orthogonale sur (Ox', Oy') de l'intersection de δ avec le plan (Ox, Oy) ; et l'élément d'aire $da' \wedge db'$ est égale au produit de $da \wedge db$ par le cosinus $(1 + \xi_0^2 + \eta_0^2)^{-1/2}$ des deux plans (ou de δ_0 avec δ_0). On a donc (en δ_0) :

$$d\delta = (1 + \xi_0^2 + \eta_0^2)^{-1/2} da \wedge db \wedge d\Omega = da' \wedge db' \wedge d\Omega$$

d'où la formule suivante, expression exacte de $d\delta$ sur l'ensemble des droites auxquelles s'étend le système de coordonnées locales de centre δ_0 (droites faisant avec δ_0 un angle aigu) :

$$d\delta = (1 + \xi^2 + \eta^2)^{-1/2} da \wedge db \wedge d\Omega ,$$

formule que l'on peut aussi écrire :

$$d\delta = (1 + \xi^2 + \eta^2)^{-1/2} da \wedge db \wedge d\xi \wedge d\eta ,$$

ou encore :

$$d\delta = \cos\theta dS \wedge d\Omega$$

formule où dS est l'élément d'aire du plan ($z = 0$) et $\cos\theta$ le cosinus de l'angle de δ (droite variable) avec δ_0 .

Voici une deuxième formule explicite, très utilisée en photométrie (cf fin de ce §); l'introduction en est moins naturelle que celle de la première, c'est pourquoi nous la plaçons ici, quoique analytiquement elle constitue une définition satisfaisante de $d\delta$.

Soit deux surfaces S_1, S_2 d'intersection vide ; on suppose qu'une droite δ qui rencontre à la fois S_1 et S_2 n'a en commun avec S_1 (resp. S_2) qu'un point unique noté M_1 (resp. M_2) et que la normale orientée n_1 à S_1 en M_1 (resp. n_2 à S_2 en M_2) fait un angle aigu θ_1 (resp. θ_2) avec le vecteur $\vec{M_1M_2}$ (cette hypothèse peut toujours être réalisée en orientant et réduisant convenablement les surfaces S_1, S_2 (cf fig. 2) ; en particulier, on peut prendre pour S_1, S_2 deux demi-plans ouverts, limités à leur intersection). Sur le pinceau des droites δ rencontrant S_1 et S_2 (en allant de S_1 vers S_2) l'élément de volume dS est donné par la formule explicite :

$$d\delta = (1/|M_1M_2|^2) \cos\theta_1 \cos\theta_2 dS_1 \wedge dS_2$$

où dS_1 , (resp. dS_2) est l'élément d'aire sur S_1 (resp. S_2) ; e.g. si δ est caractérisée par ses points d'intersection M_1, M_2 avec deux portions des plans H_1, H_2 ; et que M_1 (resp. M_2) est donné par ses coordonnées (x_1, y_1) (resp. (x_2, y_2)) dans le plan H_1 (resp. H_2) rapporté à un système d'axes unitaires rectangulaires, on a :

$$d\delta = (1/|M_1M_2|^2) \cos\theta_1 \times \cos\theta_2 dx_1 \wedge dy_1 \wedge dx_2 \wedge dy_2.$$

Pour démontrer la formule on établira d'abord que la densité de la forme différentielle :

$$(1/|M_1M_2|^2) \cos\theta_1 \cos\theta_2 dS_1 \wedge dS_2$$

ne dépend pas du choix particulier des surfaces S_1, S_2 : en bref, si on se place en une droite δ_0 donnée, on peut remplacer S_1 et S_2 par des plans H_1 et H_2 perpendiculaires à δ_0 (car, d'après la formule de la projection d'une aire plane, formule utilisée ci-dessus, $dH_1 = \cos \theta_1 dS_1$, en notant dH_1 l'élément d'aire dans le plan H_1 , $i = 1$ ou 2), et on peut déplacer les plans H_1 et H_2 (l'un après l'autre) parallèlement à eux-mêmes (on le montre, e.g. par un calcul analogue à celui de a', b' , en fonction de a, b où on utilise une méthode générale présentée au § 2.3.5). Puisque l'élément de volume défini par la formule est indépendant de S_1, S_2 , il est aussi invariant par déplacement car le $d\delta$ d'un pinceau de droites rapporté à S_1 et S_2 , est égal au $d\delta$ du pinceau transporté par le déplacement g et rapporté à gS_1, gS_2 (surfaces déplacées).

Remarquons que si la surface S_2 est une sphère de centre M_1^0 et de rayon très grand R , la formule devient :

$$d\delta = \cos \theta_1 dS_1 \wedge d\Omega$$

en effet, $(1/R^2)dS_2$ tend vers $d\Omega$ quand R tend vers l'infini (limite uniforme sur l'ensemble des droites à une distance bornée de M_1^0 ...). C'est la formule démontrée au début de ce § dans le cas particulier où S_1 est plan.

Donnons quelques conséquences des formules ci-dessus.

La mesure de l'ensemble des droites qui traversent (dans un sens déterminé) une portion de plan d'aire S est πS . Plus généralement on a :

$$\int_{D^4} i(S, \delta) d\delta = \pi S$$

où $i(S, \delta)$ est le nombre de points où la droite orientée δ rencontre la surface S (d'aire S) en faisant avec sa normale orientée un angle aigu. Donc si S est une surface convexe fermée, πS est la mesure de l'ensemble des droites orientées rencontrant S (en effet si δ rencontre S il y a une "entrée", où l'angle est obtus, et une "sortie", où l'angle avec la normale est aigu, et $i(S, \delta) = 1$). D'où la formule intégrale (bien malaisée à démontrer sans la notion de volume sur D^4 ...).

$$\pi S = \int_{(M_1, M_2) \in S \times S} \frac{1}{|M_1 M_2|^2} \cos \theta_1 \cos \theta_2 dS_1 dS_2$$

(où $\theta_i = (\vec{M_1 M_2}, n_i)$, angle de la normale à S en M_i avec la corde $M_1 M_2$).

En photométrie enfin on utilise pour mesure approchée de la puissance transportée par un pinceau, ensemble des rayons (δ, λ) , où δ rencontre deux petites surfaces ΔS_1 et ΔS_2 et où λ est dans un intervalle d'amplitude $\Delta \lambda$, la formule :

$$B(\delta_0, \lambda_0) (1/r^2) \cos \theta_1 \cos \theta_2 \Delta S_1 \Delta S_2 \Delta \lambda ;$$

formule où (cf fig. 2) r est la distance $M_1 M_2$ de ΔS_1 à ΔS_2 , et (δ_0, λ_0) est un rayon moyen du pinceau.

2.3.5 L'étude du flux réfracté repose sur la formule suivante, (généralisation de la relation classique de Lagrange-Helmoltz). Si la droite

δ_1 se réfracte suivant δ_2 en passant d'un milieu (1) d'indice n_1 dans un milieu (2) d'indice n_2 on a l'égalité entre éléments de volume :

$$n_1^2 d\delta_1 = n_2^2 d\delta_2,$$

i.e., au coefficient $(n_2/n_1)^2$ près, la réfraction conserve le volume (quadridimensionnel) d'un pinceau de droites. (De façon précise, les indices dépendent de la fréquence ν , ou de la longueur d'onde dans le vide λ ; pour la réfraction d'un pinceau de rayons, on doit donc écrire :

$$n_1(\lambda)^2 d\delta_1 d\lambda = n_2(\lambda)^2 d\delta_2 d\lambda ;$$

mais pour démontrer une relation géométrique, conséquence de la loi de Descartes, il est inutile de mentionner λ ...).

Un même cadre théorique renferme la démonstration de cette formule et toutes les démonstrations précédentes : nous ne donnons qu'ici ce cadre, pensant qu'il sera mieux vu après des exemples particuliers.

Soit U_p , V_q , W_q trois variétés de dimension respectives p , q , q ; (on note L (resp. N , resp. M) un point de U (resp. V , resp. W)); soit $d_p L$ (resp. $d_q N$, resp. $d_q M$) un élément de volume (i.e. une forme différentielle de dimension maximale) sur U_p (resp. V_q , resp. W_q); soit ϕ une application de $U \times V$ dans W ; soit ψ l'application de $U \times V$ dans $U \times W$ définie par :

$$(L, N) \xrightarrow{\psi} (L, \phi(L, N))$$

soit ϕ_L l'application de V dans W (paramétrée par $L \in U$) :

$$N \xrightarrow{\phi_L} \phi(L, N),$$

soit ρ (resp. ρ') une fonction numérique sur $U \times V$ (resp. $U \times W$)

Les deux conditions suivantes sont équivalentes pour ϕ :

A) L'application ψ transforme l'élément de volume sur $U \times V$,

$$\rho(L, N) d_p L \wedge d_q N,$$

en l'élément de volume sur $U \times W$;

$$\rho'(L, M) d_p L \wedge d_q M$$

B) quel que soit $L \in U$, l'application ϕ_L transforme l'élément de volume sur V :

$$\rho(L, N) d_q N,$$

en l'élément de volume sur W :

$$\rho'(L, M) d_q M.$$

La démonstration est très simple : si on fait choix de coordonnées locales sur U , V , W , le jacobien de ψ au point (L, N) est égal au jacobien de ϕ_L au point N ; car les p premières lignes du jacobien de ψ ne contiennent chacune que des zéros, et un seul 1 (sur la diagonale); tandis que les q derniers termes des q dernières lignes du jacobien de ψ , reproduisent le jacobien de ϕ_L .

Voyons maintenant pourquoi toutes les questions traitées ici rentrent dans ce cadre.

Au § 2.3.3, une portion de D_4 est identifiée au produit $\Sigma \times H$ (resp. $\Sigma \times H'$) de la sphère Σ par un plan : à $\delta \in D_4$ correspond la paire (ω, M) (resp. (ω, M')), où ω est le vecteur directeur de δ , et $M = \delta \cap H$ (resp. $M' = \delta \cap H'$).

Notons $d_2\omega$, d_2M , d_2M' (ce qu'on note ailleurs $d\Omega$, dS , dS' ...) l'élément d'aire sur Σ , H , H' ; soit ψ l'application de $\Sigma \times H$ dans $\Sigma \times H'$ qui au couple (ω, M) des "coordonnées" d'une droite δ fait correspondre le couple (ω, M') relatif à cette même droite. On démontre au § 2.3.4 que ψ transforme l'élément de volume sur $\Sigma \times H$

$$\cos\theta \, d_2\omega \wedge d_2M$$

en l'élément de volume sur $\Sigma \times H'$:

$$\cos\theta' \, d_2\omega \wedge d_2M'$$

Au § 2.3.4, une portion de D_4 est identifiée au produit $S_1 \times S_2$ ou $S_1 \times S'_2$ ou $S'_1 \times S_2$; pour passer de $S_1 \times S_2$ à $S_1 \times S'_2$, (ou de $S_1 \times S'_2$ à $S'_1 \times S_2$), on a encore une application de la forme ψ .

Soit maintenant S la surface réfractante, Σ la sphère unité : une droite δ peut être considérée comme une paire $(M, \omega) \in S \times \Sigma$, $M = \delta \cap S$ et ω vecteur directeur de δ . La réfraction est une application ψ de $S \times \Sigma$ dans $S \times \Sigma$ qui à une droite $\delta_1 = (M, \omega_1)$ fait correspondre $\delta_2 = (M, \omega_2)$; la loi de Descartes permet de déterminer ω_2 comme une fonction ϕ de ω_1 et de M (du vecteur normal $n(M)$ à S en M). Il faut montrer que ψ transforme la forme différentielle (où $\theta_1 = (\omega_1, n(M))$:

$$n_1^2 \cos\theta_1 \wedge d_2M \wedge d_2\omega_1$$

en la forme différentielle, (où $\theta_2 = (\omega_2, n(M))$:

$$n_2^2 \cos\theta_2 \, d_2M \wedge d_2\omega_2$$

pour cela il suffit d'établir que l'application ϕ_M (réfraction suivant la loi de Descartes au point M), transforme :

$$n_1^2 \cos\theta_1 \, d_2\omega_1$$

en

$$n_2^2 \cos\theta_2 \, d_2\omega_2$$

Or ce dernier point se démontre simplement : soit trois vecteurs unitaires \vec{i} , \vec{j} et $\vec{k} = n(M)$ (normale à S en M) ; ϕ_M transforme le vecteur :

$$\omega_1 = \vec{k} \cos\theta_1 + \sin\theta_1 (\vec{i} \sin\varphi + \vec{j} \cos\varphi)$$

en le vecteur :

$$\omega_2 = \vec{k} \cos\theta_2 + \sin\theta_2 (\vec{i} \sin\varphi + \vec{j} \cos\varphi)$$

avec θ_1 et θ_2 reliés par la loi de Descartes

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 .$$

or l'élément d'aire de la sphère est :

$$d_2\omega = \sin\theta \, d\theta \wedge d\varphi$$

d'où à démontrer que sont égaux :

$$n_1^2 \cos\theta_1 d_2\omega_1 = n_1 \cos\theta_1 d\theta_1 \wedge n_1 \sin\theta_1 d\varphi$$

et :

$$n_2^2 \cos\theta_2 d_2\omega_1 = n_2 \cos\theta_2 d\theta_2 \wedge n_2 \sin\theta_2 d\varphi ;$$

ce qui est évident d'après la loi de Descartes (ou l'expression différenciée de cette loi).

Si on se souvient du principe de Fermat (i.e. que les lignes suivies par le rayonnement sont les géodésiques (lignes de plus court chemin) pour la distance $n ds$, produit de la distance ordinaire par l'indice de réfraction du milieu traversé) on peut rattacher la formule $n_1^2 d\delta_1 = n_2^2 d\delta_2$ à un résultat général de géométrie riemannienne : il existe sur les géodésiques d'un espace de Riemann (ici de dimension 3) un élément de volume naturel, qui peut se calculer sous la forme, (utilisant deux hypersurfaces S_1, S_2) donnée au § 2.3.4 pour le cas euclidien; l'invariant optique $n^2 d\delta$ est bien l'invariant géométrique riemannien $d\delta$ puisque, dans la métrique de Fermat, la distance est $n ds$, donc l'aire $n^2 ds$. Du même coup la formule d'invariance est démontrée pour le cas général de la réfraction dans un milieu d'indice variable.

2.3.6 Soit un flux de rayonnement qui se propage au travers de plusieurs milieux d'indice (variable avec la fréquence ν , ou, ce qui revient au même, cf 2.2, avec la longueur d'onde λ dans le vide) $n_1(\lambda)$, $n_2(\lambda)$ etc. Supposons d'abord qu'il n'y ait aucune absorption ou réflexion parasite. On peut dans chaque milieu (cf 2.3.2) définir la brillance énergétique d'un rayon : soit $B_i(\delta_i, \lambda)$ la brillance du rayon δ (qui est une ligne brisée $\delta_1 - \delta_2 - \delta_3 \dots$) dans le i -ème milieu : on a la relation d'invariance (relation de Lagrange-Helmoltz généralisée...):

$$\frac{B_1(\delta_1, \lambda)}{n_1(\lambda)^2} = \frac{B_2(\delta_2, \lambda)}{n_2(\lambda)^2} = \dots$$

en effet, soit un pinceau différentiel de rayon moyen δ , de mesure $d\delta_1$ dans le premier milieu, $d\delta_2$ dans le deuxième etc. on a d'après le principe de conservation du rayonnement :

$$B_1(\delta_1, \lambda) d\delta_1 = B_2(\delta_2, \lambda) d\delta_2 = \dots$$

et d'après la formule d'invariance optique du § 2.3.4 :

$$n_1(\lambda)^2 d\delta_2 = n_2(\lambda)^2 d\delta_2 = \dots$$

La relation de Lagrange-Helmoltz généralisée est d'une importance fondamentale : elle signifie que sauf phénomènes d'absorption et de réflexion parasite la brillance d'un rayon ne peut être modifiée par aucun système dioptrique (lentilles etc. ou même milieu transparent quelconque à indice variant continûment, cf principe de Fermat, § 2.3.4) ou catoptrique (miroirs réfléchissant totalement...)

S'il y a absorption, enfin, le rayonnement transmis par un milieu transparent (un filtre, e.g. une vitre colorée) est multiplié par un facteur $t(\lambda)$ ($t(\lambda) \leq 1$) : $t(\lambda)$ dépend du milieu, et aussi (multiplicativement) de la longueur l parcourue dans ce milieu ; on peut écrire une formule exponentielle :

$$t(\lambda) = e^{-l\alpha(\lambda)}$$

où $\alpha(\lambda)$ est un coefficient d'absorption par unité de longueur. La brillance énergétique spectrale d'un rayon, après traversée de longueur l d'un milieu absorbant est donc ainsi multipliée par ce coefficient $e^{-l\alpha(\lambda)}$.

2.4 Sources de rayonnement

2.4.1 Sources ponctuelles : Soit S une source dont on néglige les dimensions (S est assimilée à un point géométrique). On peut définir la mesure $W_S(\lambda)d\lambda$ de la puissance émise par S dans les diverses fréquences. Le flux de puissance issue de S qui traverse une surface Σ , cf 2.3.2 *in fine*, est le flux transporté par l'ensemble P des droites issues de S et rencontrant Σ ; ce flux ne dépend que du cône C de sommet S et de base Σ ; si S émet également dans toutes les directions, le flux reçu par Σ sera $(\Omega/4\pi)W_S(\lambda)d\lambda$, où Ω est l'angle solide du cône C . Il faut noter, que dans D_4 , P (bidimensionnel) est de volume nul : pour que $\int_P B(\delta, \lambda)d\delta$ soit non-nul, il faut que B soit infini si $\delta \in P$; en fait la source ponctuelle est un cas limite, comme la mesure de Dirac, (cf § 2.2), et il n'y a plus de densité mais seulement une mesure $B(\delta, \lambda)d\delta$ dont le support, bidimensionnel est la "sphère" des droites issues de S . Comme dans la suite on s'intéresse à des expériences psychophysiques où les stimuli doivent être de brillance bornée (pour épargner l'oeil...) le schéma de la source ponctuelle nous servira peu.

Notons cependant ici que l'on peut, pour toute source S convexe finie définir une source ponctuelle équivalente. Pour cela on utilise la distribution d'intensité énergétique spectrale de S , qui est une mesure $I_S(\omega, \lambda)d\Omega d\lambda$ sur le produit $\Sigma \times R^+$ de la sphère des directions Σ par la demi-droite des longueurs d'onde R^+ . Notons Ω un angle solide (une partie mesurable de la sphère Σ); notons $P(S, \Omega)$ l'ensemble des droites orientées issues de S , dont la direction appartient à Ω (Ω_S est une partie mesurable de D_4 ; pour ne pas avoir à considérer les rayons qui, issues de S , sont réabsorbés par S , nous avons supposé S convexe...); notons Λ un intervalle (ou plus généralement une partie mesurable quelconque) de R^+ ; on peut maintenant définir I_S , en fonction de la distribution de brillance énergétique spectrale B_S : quels que soient Ω et Λ , on a l'égalité des puissances :

$$\int_{\Omega \times \Lambda} I_S(\omega, \lambda) d\Omega d\lambda = \int_{P(S, \Omega) \times \Lambda} B_S(\delta, \lambda) d\delta d\lambda,$$

(où B_S est la brillance énergétique spectrale de S). Si la mesure distribution d'intensité a une densité $I_S(\omega, \lambda)$, cette fonction est appelée intensité énergétique spectrale.

Réciproquement, il est clair que si S est une source ponctuelle, I_S détermine B_S (B_S est alors une mesure qui, comme on l'a dit plus haut, n'a pas de densité finie...); car si P est un pinceau quelconque, $\Omega(S, P)$ l'ensemble, (angle solide), des directions des droites de P passant par S , on a (quel que soit Λ):

$$\int_{\Omega(S, P) \times \Lambda} I_S(\omega, \lambda) d\Omega d\lambda = \int_{P \times \Lambda} B_S(\delta, \lambda) d\delta d\lambda$$

(en effet, seuls les rayons passant par S portent de l'énergie!). En ce sens, une source S quelconque est équivalente à une source ponctuelle unique définie par I_S .

La notion d'intensité énergétique spectrale est sous-jacente à celle d'intensité lumineuse (cf *infra* § 4.1.4).

2.4.2 Sources étendues : Le rayonnement émis ou diffusé par une surface est complètement décrit si on donne la brillance énergétique spectrale de tout rayon issu d'un point de la surface. Reprenons les notations de la figure 2 : si ΔS_1 émet vers ΔS_2 , et que la brillance de la droite M_1M_2 (on dit communément la brillance de la source dans la direction M_1M_2) est $B(\delta_0, \lambda)d\lambda$, la puissance reçue par ΔS_2 de la source élémentaire ΔS_1 est (cf § 2.3.4)

$$(1/r^2)B(\Delta_0, \lambda)\Delta S_1 \cos\theta_1 \Delta S_2 \cos\theta_2 d\lambda$$

On dit que la loi émet suivant la loi de Lambert si la brillance énergétique spectrale de ses rayons $B(\delta, \lambda) = B(\lambda)$ ne dépend que de λ , non de δ . La puissance émise par l'unité de surface d'une source rayonnant suivant la loi de Lambert est $\pi \times B(\lambda) d\lambda$ (en effet, cf 2.3.4 *in fine*, la mesure de l'ensemble des rayons issus d'un élément de surface S est πS) : par exemple si $B = \int B(\lambda)d\lambda$, est mesuré en watt/cm²×sté. (cf 2.32, 2.3.3) πB est la puissance totale en watt émise par un cm² de source.

Les sources émissives usuelles (surface d'un filament de lampe; surface du soleil...) émettent suivant la loi de Lambert : c'est pour cela que le soleil, (observé au travers d'un filtre absorbant, pour éviter l'éblouissement...) paraît uniformément brillant, tous les rayons qu'on en reçoit ayant même brillance.

2.4.3 Les sources diffusantes (un écran blanc éclairé par un projecteur ; une dalle calcaire au soleil...), renvoient aussi la lumière suivant la loi de Lambert. On peut, pour la surface d'un corps (supposée inerte : non émissive, non fluorescente etc.) définir trois fonctions positives de somme 1 :

$$r(\lambda) ; d(\lambda) ; a(\lambda).$$

Si $\Sigma(\lambda)d\lambda$ est la puissance reçue par l'unité de surface du corps, les trois fractions :

$$r(\lambda) \Sigma(\lambda)d\lambda ; d(\lambda)\Sigma(\lambda)d\lambda ; a(\lambda)\Sigma(\lambda)d\lambda$$

sont respectivement réfléchies, diffusées (suivant la loi de Lambert) et absorbées (ou, éventuellement transmises) : la brillance des rayons diffusés est donc donnée par la relation (cf *supra*) :

$$d(\lambda)\Sigma(\lambda)d\lambda = \pi B(\lambda)d\lambda$$

La couleur d'un objet éclairé par la lumière blanche (e.g. solaire) résulte du facteur $d(\lambda)$: un objet parfaitement diffusant ($d(\lambda)=1$) est blanc et aussi brillant que le permet l'éclairage ; si $d(\lambda)$ est constant mais inférieur à 1, l'objet est gris ; si $d(\lambda)$ n'est pas constant, le rayonnement diffusé a une répartition spectrale autre que celle du rayonnement solaire naturel et (en général mais non toujours ; cf *infra*) l'objet paraît coloré. Le facteur $r(\lambda)$ est responsable, lui, des reflets ; si la surface est géométriquement régulière, ces reflets forment des images.

2.4.4 Le rayonnement type est celui du corps noir. C'est là une notion idéale de la thermodynamique : un corps dont le coefficient d'absorption est égal à 1 (absorption totale) et qui émet suivant la loi de Lambert avec une brillance énergétique spectrale qui ne dépend que de la température et est donnée par la formule, démontrée par Planck :

$$B_T(\lambda)d\lambda = [2hc^2 \lambda^{-5} / (e^{hc/kT\lambda} - 1)]d\lambda$$

(où T est la température absolue ; h est la constante de Planck ; k la constante de Boltzmann).

Cette formule donne approximativement la composition et la puissance du rayonnement solaire, si on fait $T \sim 6000^\circ$; d'où l'on peut conclure que telle est la température de la périphérie émissive de l'astre. Les corps usuels (filaments de lampe etc.) s'écartent plus ou moins de la formule du corps noir mais en général, quand la température s'élève, le rayonnement émis se déplace vers les hautes fréquences (basses longueurs d'onde) : e.g. le fer chauffé passe du rouge sombre au blanc, par le rouge cerise.

Si dans un flux $B(\delta, \lambda)d\delta d\lambda$, un rayon (δ_0, λ_0) a pour brillance énergétique spectrale $B(\delta_0, \lambda_0) = B_0$ (cf 2.3.2), on peut, d'après la formule de Planck, dire que ce rayon a une température absolue T donnée par :

$$\frac{1}{T} = \frac{k\lambda_0}{hc} \text{Log} \left[\frac{B_0 \lambda_0^5}{2hc^2} + 1 \right]$$

(i.e. T est la température du corps noir quand il émet un rayon de cette longueur d'onde et de cette brillance spectrale).

2.4.5 *Production de pinceaux de brillance donnée* : A l'origine de tout flux il y a une source émissive : soleil, lampe... Nous avons vu (§ 2.3.6) que réflexion et réfraction ne modifient essentiellement pas la brillance du rayon dans le flux : faire croître la brillance ce serait faire croître la température sans échange avec une 2-ème source, à l'encontre du 2-ème principe de la thermodynamique. Tout ce que l'on peut faire ainsi c'est concentrer les rayons sans augmenter leur température individuelle dans le flux. (i.e. obtenir qu'un élément de surface soit traversé par des rayons de flux de toute direction ; d'ordinaire, on reçoit des rayons solaires, de température 6000° , dans un cône de diamètre angulaire $31'$, mais au centre d'un miroir parabolique, il peut faire 6000° dans presque toutes les directions). On peut aussi disposer les rayons à l'aide d'un prisme : et c'est ainsi qu'on sépare, en vue des expériences de psychophysique, des flux lumineux dont les rayons n'ont de brillance élevée que dans une étroite bande de fréquence (cf 3.4.1). On peut modifier par absorption la brillance d'un rayon dans le flux, par exemple en interposant un filtre coloré (la fonction $\alpha(\lambda)$, cf § 2.3.6, n'est pas constante) ou non : pour les expériences de psychologie on a souvent recours à des filtres interposés entre la source (filament de lampe) et l'observateur.

Enfin, une surface diffusante (cf 2.4.3) qui reçoit par unité de surface une puissance rayonnante $\Sigma(\lambda)d\lambda$, devient la source d'un flux de brillance $(1/\pi)d(\lambda)\Sigma(\lambda)d\lambda$. Dans des conditions d'éclairage type bien défini, $\Sigma(\lambda)$ peut être rigoureusement fixé ; en disposant diverses surfaces diffusantes (surfaces colorées, rassemblées en un atlas des couleurs, cf *infra*) on peut avoir à peu de frais des sources diffusantes de composition spectrale très variée.

Récemment, on a pu réaliser des sources (tout autres que le corps noir) émettant tout leur flux dans une bande spectrale et un pinceau directionnel très étroit : on atteint ainsi pour un rayon (δ, λ) au

centre du flux, une brillance correspondant à des températures inusitées ; d'où des effets violents.

2.4.6 *Mesure de la brillance* : Certaines surfaces (surface noire, plaques photographiques, cellule photoélectrique, et... rétine de l'oeil) réagissent (par élévation de température, transformation chimique (noircissement), courant électrique, influx nerveux) au rayonnement qu'elles reçoivent. Pour mesurer la brillance énergétique du flux au niveau d'une droite δ_0 , on doit séparer un pinceau centré sur δ_0 : pour cela le plus simple est (cf fig. 2, dont nous reprenons les notations) de disposer sur δ_0 un orifice appelé pupille ΔS_1 , percé dans une surface opaque, et un élément de surface sensible ΔS_2 ; ΔS_2 reçoit alors la distribution de puissance donnée par la formule du § 2.3.4, et sa réponse (chimique, électrique, nerveuse...) est fonction de ce qu'il reçoit. Le dispositif très simple que nous venons de décrire doit être perfectionné : on peut (cf 2.4.5) introduire des lentilles, pour concentrer les rayons, un prisme pour les disperser, un filtre pour observer sélectivement une partie du spectre. (Prisme et filtre permettent d'étudier non la distribution de brillance $B(\delta_0, \lambda)d\lambda$ de la droite δ_0 , distribution à laquelle l'élément sensible donne une réponse intégrée..., mais la brillance énergétique spectrale d'un rayon (δ_0, λ_0) - ou du moins celle d'une bande étroite du spectre...). Mais en définitive il y aura généralement une unité de surface sensible ΔS_2 recevant un pinceau de rayons défini par elle et par un certain ΔS_1 image (réelle ou virtuelle) à la sortie du dispositif d'une pupille interposé sur le trajet des rayons lumineux. Au § 2.5.2 nous considérerons le cas de l'oeil.

2.5 *Stimulation rétinienne* : Après quelques précisions de nature physique ou physiologique, nous donnerons des stimuli une description très simple qui seule sera utilisée dans la suite.

2.5.1 *L'oeil réduit de Listing* : L'oeil est un système complexe comprenant trois milieux principaux : le cristallin, l'humeur vitrée, et l'humeur aqueuse. Cette dernière limitée à la rétine, a un indice voisin de celui de l'eau, 4/3. Un rayon qui pénètre dans l'oeil par la pupille, centre transparent de la cornée, émerge (après plusieurs réfractions) de l'humeur aqueuse pour stimuler la rétine. Si l'on ne s'intéresse qu'aux deux segments extrêmes du rayon, (incident dans l'air, émergeant dans l'humeur aqueuse), on peut assimiler l'oeil réel à un oeil fictif, l'oeil réduit de Listing : cet oeil, (cf fig. 3),

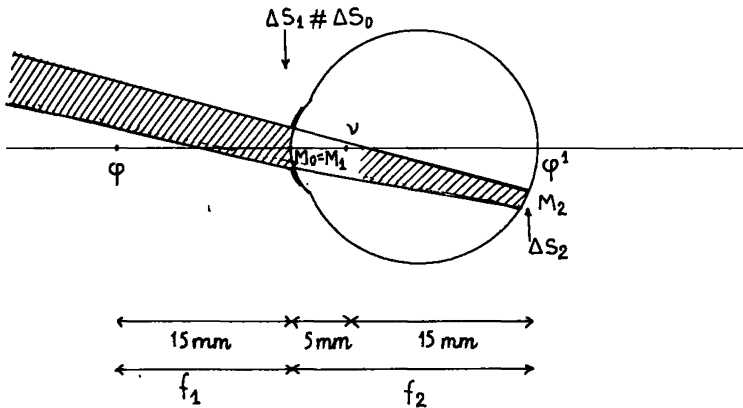


Figure 3 : l'oeil réduit de Listing .

est tout entier rempli d'humeur aqueuse ; il est limité par la rétine et par une sphère, tangente à la cornée en M_0 (centre de la pupille), dont le centre v est 5 mm en arrière de M_0 : Le foyer image est en $\varphi'(M_0, \varphi' = 20 \text{ mm})$ et le foyer objet en $\varphi(\varphi M_0 = 15 \text{ mm})$. Un point M_2 de la rétine reçoit tous les rayons entrés dans l'oeil parallèlement à νM_2 .

2.5.2 Le flux dans l'oeil : Le pinceau de rayon qui touche un élément ΔS_2 de la rétine est défini (cf 2.4.6) par ΔS_2 , et l'image ΔS_1 donnée de la pupille ΔS_0 par l'ensemble optique formé du cristallin et des humeurs. Conservons les notations de la fig. 2. Notons de plus $B_2(\delta_0, \lambda)$ la brillance énergétique spectrale du rayon $(M_1 M_2, \lambda)$ à la fin de sa traversée de l'humeur aqueuse. La formule du § 2.3.4 permet de calculer $\Sigma(M_2, \lambda) d\lambda$, puissance reçue par l'unité de surface de la rétine, au niveau du point M_2 ; on a :

$$\Sigma(M_2, \lambda) d\lambda = \frac{1}{(M_1 M_2)^2} \times \cos\theta_1 \times \cos\theta_2 \times \Delta S_1 \times B_2(\delta_0, \lambda) d\lambda$$

Reste à calculer les termes de la formule. Si l'on se limite à des points M_2 voisins du centre de la rétine (vision centrale) on peut assimiler à 1 les cosinus. Dans le schéma de Listing, (§ 2.5.1), $M_1 M_2 = 20 \text{ mm}$. La puissance reçue en M_2 provient des rayons entrés dans l'oeil parallèlement à νM_2 . Donc, avant réfraction, le rayon δ_0 était, dans l'air porté par δ_0 , parallèle à νM_2 menée par M_0 . Si $t_0(\lambda)$ est le coefficient de transmission de l'oeil, et $n = 3/4$ l'indice de l'humeur aqueuse, on a donc (cf § 2.3.6) :

$$B_2(\delta_0, \lambda) = t_0(\lambda) n^2 B(\delta_0^0, \lambda)$$

(où B est brillance du flux incident). D'où finalement, en notant p le rayon de la pupille mesuré en mm :

$$\begin{aligned} \Sigma(M_2, \lambda) d\lambda &= t_0(\lambda) \times B(\delta_0^0, \lambda) \times \frac{\pi p^2}{400} \times \left[\frac{4}{3}\right]^2 d\lambda \\ &= t_0(\lambda) \times B(\delta_0^0, \lambda) \times \frac{\pi p^2}{225} d\lambda \end{aligned}$$

Il résulte de cette formule que, pour faire varier la stimulation rétinienne, il est équivalent de diviser par deux la brillance du flux incident, ou de diviser par deux l'aire de la pupille ; ce qu'il est facile de faire en plaçant devant l'oeil un diaphragme (pupille artificielle), ou en faisant passer le flux reçu par l'oeil au travers d'un diaphragme dont l'image réelle est formée au centre de la pupille (on dit alors qu'on a une pupille fictive). Cet artifice très simple s'ajoute à ceux décrits au § 2.4.5 pour permettre de produire les stimuli les plus divers.

La formule exprimant $\Sigma(M_2, \lambda)$ suppose essentiellement que la brillance $B(\delta, \lambda)$ varie peu quand la droite δ se déplace parallèlement à elle-même sans cesser de passer à l'intérieur de la pupille, réelle ou fictive. Cette condition n'est pas toujours réalisée : elle ne l'est pas notamment dans les magistrales expériences de Stiles où l'on peut dire qu'il y a une pupille fictive complexe dépendant de la longueur d'onde (le rayonnement des diverses longueurs d'onde ne pénètre pas dans l'oeil par la même portion de la cornée, cf *infra* § 4.2.1) il faut

alors dans la formule ci-dessus, remplacer le produit $B(\delta_0, \lambda) \Pi p^2$ (de la brillance par l'aire) par l'intégrale, étendue à l'aire de la pupille naturelle, de la brillance du rayonnement (diversement diaphragmé etc.) que débite, e.g., le dispositif expérimental. On écrira :

$$\Sigma(M_2, \lambda) d\lambda = t_0(\lambda) \times \int_P B(\delta(M), \lambda) dS(M) \frac{d\lambda}{225} ;$$

formule où l'intégrale est étendue à la pupille P ; $\delta(M)$ désigne la parallèle à νM_2 menée par un point variable $M \in P$, et $dS(M)$ l'élément d'aire de P. Pareille intégrale est difficile à calculer, mais plus facile à mesurer physiquement : il suffit de mettre à la place de la pupille de l'oeil, la pupille (diaphragmée) d'entrée, supposée égale à P, d'un instrument dont le champ soit limité à un cône étroit d'angle solide $\Delta\Omega$, centré sur la direction parallèle à $M_2\nu$. Si on note $R(\lambda)d\lambda$ la puissance du rayonnement recueilli par cet instrument (puissance que l'on peut mesurer avec des cellules cf *supra* § 2.4.6) on aura :

$$\Sigma(M_2, \lambda) d\lambda = t_0(\lambda) \times \frac{1}{225} \times \frac{1}{\Delta\Omega} R(\lambda) d\lambda.$$

2.5.3 Absorption et ouverture : Il existe des tables (cf Judd, 1951, p. 813) de la fonction $t_0(\lambda)$; toutefois, l'absorption dans l'oeil d'un sujet vivant étant difficile à déterminer, on préfère (cf § 2.5.5), définir un stimulus non par la puissance que reçoit la rétine mais par celle qu'elle recevrait si le coefficient de transmission de l'oeil $t(\lambda)$ était égal à 1 (pas d'absorption).

L'aire de la pupille diminue, on le sait, quand croît la puissance reçue par l'oeil. D'autre part Stiles et Crawford (1933) ont découvert que les rayons qui passent par le bord de la pupille stimulent moins intensément la pupille que ceux rentrés par le centre, effet qui (cf Bartly 1951 p. 930) semble dû aux différences d'incidence des divers rayons sur la rétine. Dans les études expérimentales, on fait donc souvent intervenir une pupille fictive, (utile d'autre part pour faire varier la stimulation rétinienne, cf § 2.5.2). Toutefois certaines données concernent la pupille naturelle avec son aire fonction de l'énergie qu'elle reçoit (cf e.g. § 4.1.4, tableau 2).

2.5.4 Stimuli ponctuels ou instantanés : On a étudié l'effet produit par une quantité déterminée d'énergie débitée pendant un temps très court sur une zone éventuellement très petite de la rétine : comme on pouvait s'y attendre (vu les nombreux phénomènes de seuil connus en psychologie) si le temps est assez court, inférieur à 0,01 sec, (resp. la zone assez petite : diamètre apparent inférieur à 10' d'angle) l'impression est indépendante de ce temps (resp. de cette zone) ; tout se passe comme si la quantité déterminée d'énergie avait été appliquée instantanément (resp. ponctuellement) : c'est la loi de Bloch et Bunsen-Roscoe (resp. la loi de Ricco), cf Judd (1951, p. 812). La plus petite quantité d'énergie lumineuse susceptible de produire une impression sensible est de quelques *quanta* : donc de l'ordre du minimum physiquement possible pour une interaction entre rayonnement et matière.

2.5.5 Schéma simple des stimuli : Nous ne dirons plus rien de ces recherches ; et dans la suite décrirons les états de stimulation en termes non d'énergie, mais de puissance, même si cette puissance varie périodiquement (cf *infra* photométrie à papillotage § 4.1.1). Le dispositif utilisé pour envoyer du rayonnement dans l'oeil peut être fort complexe (cf *supra* § 2.5.2 et *infra* § 4.2.1). Mais le stimulus est défini complètement par la puissance reçue par les divers éléments de la rétine. Tout stimulus peut donc être réalisé suivant un schéma très

simple : le sujet a devant lui une source rayonnante plane, perpendiculaire à l'axe antéropostérieur de l'oeil (la droite $M_0\varphi$ de la figure 3). Cette source émet suivant la loi de Lambert ; sa brillance au point d'intersection avec une droite δ passant par le centre de pupille ("un rayon visuel") est $B(\delta, \lambda)d\lambda$. Ainsi on pourra dire, par exemple, que le stimulus est un disque de brillance constante $B(\lambda)d\lambda$, vu par le sujet, sous un angle de 20° . Dans les expériences, il s'agit toujours de stimuli très simples de cette sorte. C'est la réalisation expérimentale de ce stimulus ou d'un stimulus équivalent qui, elle, n'est jamais simple.

Comme seules les radiations de longueur d'ondes comprises entre des bornes (que nous fixerons ici arbitrairement à $0,3\mu$ et $0,8\mu$ cf *infra* § 3.5 δ) sont susceptibles de parvenir (sans être absorbées par l'oeil) jusqu'à la rétine et d'impressionner celle-ci sans la détruire, on peut supposer que la mesure $B(\lambda)d\lambda$ a son support dans l'intervalle $(0,3\mu, 0,8\mu)$ (pas de masse en dehors de cet intervalle). Ainsi les stimuli colorés sont physiquement décrits comme des éléments d'un espace vectoriel de dimension infinie : l'espace des mesures sur cet intervalle.

3 Géométrie de l'espace des stimuli

3.1 Espace muni d'un cône :- Dans la suite, on notera \mathcal{M} l'espace vectoriel des mesures sur l'intervalle $(0,3; 0,8)$; on notera \mathcal{M}^+ la partie de \mathcal{M} ensemble des mesures positives ou nulles sur $(0,3; 0,8)$. Une mesure de \mathcal{M} n'est pas, en général, physiquement réalisable (on ne peut réaliser une combinaison de radiations où certaines longueurs d'ondes figurent avec un coefficient négatif!) \mathcal{M}^+ est le sous-ensemble des éléments de \mathcal{M} physiquement réalisables. Un élément de \mathcal{M}^+ sera noté comme le produit d'une densité par $d\lambda$ ($B(\lambda)d\lambda, B_1(\lambda)d\lambda\dots$) ou, simplement d'une lettre ($B, B_1, x\dots$). On notera R^+ l'ensemble des scalaires positifs ou nuls.

Examinons la situation géométrique de \mathcal{M}^+ dans \mathcal{M} : \mathcal{M}^+ est un cône convexe strict engendrant \mathcal{M} , i. e. :

cône convexe :

$$\forall B_1, B_2 \in \mathcal{M}^+ \quad \forall k \in R^+ \\ B_1 + B_2 \in \mathcal{M}^+ ; kB_1 \in \mathcal{M}^+ ;$$

on peut multiplier par un scalaire positif, et additionner sans sortir de \mathcal{M}^+ .

cône convexe strict :

Il n'y a pas de mesure non-nulle qui soit dans \mathcal{M}^+ ainsi que son opposée ; \mathcal{M}^+ ne contient pas de droite entière.

\mathcal{M}^+ engendre \mathcal{M} :

Toute mesure élément de \mathcal{M} est différence de deux mesures positives. De plus \mathcal{M} muni du cône \mathcal{M}^+ est un espace de Riesz (terminologie de N. Bourbaki), i.e. toute mesure $x \in \mathcal{M}$ peut s'écrire de manière unique comme différence de deux mesures positives, x^+ et x^- (appelées partie positive et partie négative de x) telles que si y^+ et y^- sont

deux mesures positives de différence x , on a :

$$x^+ \leq y^+ ; \quad x^- \leq y^- .$$

Dans la suite, on ne se servira d'ailleurs pas de cette dernière propriété. On peut définir \mathcal{M} à partir des seuls termes et opérations physiquement réalisables (i.e. de \mathcal{M}^+ avec pour opérations l'addition et la multiplication par un scalaire positif). Soit Δ la relation d'équivalence sur $\mathcal{M}^+ \times \mathcal{M}^+$, ainsi définie :

$$(B_1, B_2) \approx_{\Delta} (B_3, B_4)$$

si et seulement si :

$$B_1 + B_4 = B_2 + B_3$$

Le quotient $(\mathcal{M}^+ \times \mathcal{M}^+)/\Delta$ correspond biunivoquement à \mathcal{M} par identification à la différence $(B_1 - B_2)$ de la classe d'équivalence $\Delta(B_1, B_2)$ de la paire (B_1, B_2) . Et on a, pour définir les opérations de \mathcal{M} à partir de celles de \mathcal{M}^+ les opérations entre classes :

$$\Delta(B_1, B_2) + \Delta(B_3, B_4) = \Delta(B_1 + B_3, B_2 + B_4) ;$$

$$\Delta(B_1, B_2) - \Delta(B_3, B_4) = \Delta(B_1 + B_4, B_2 + B_3) ;$$

$$k\Delta(B_1, B_2) = \Delta(kB_1, kB_2), \text{ si } k > 0$$

$$k\Delta(B_1, B_2) = \Delta((-k)B_2, (-k)B_1), \text{ si } k < 0 ;$$

Dans la suite, on définira les relations d'équivalence sur \mathcal{M} , à partir de relations définies expérimentalement sur \mathcal{M}^+ , d'où les développements qui suivent. Les notations seront celles de l'alinéa ci-dessus : si \mathcal{R} est une relation d'équivalence, on écrira :

$$x \approx_{\mathcal{R}} y, \text{ ou } : \mathcal{R}(x) = \mathcal{R}(y),$$

pour exprimer l'équivalence de x et y ; $\mathcal{R}(x)$ sera la classe d'équivalence de x , et \mathcal{R} l'application de l'ensemble sur son quotient.

3.2 Equivalence linéaire : On dit qu'une relation d'équivalence \mathcal{R} sur un espace vectoriel (e.g. sur \mathcal{M}) est linéaire s'il existe un sous-espace vectoriel (le noyau $\mathcal{N}(\mathcal{R})$ de \mathcal{R}) tel que :

$$\mathcal{R}(x) = \mathcal{R}(y)$$

si et seulement si :

$$x - y \in \mathcal{N}(\mathcal{R}).$$

Le quotient \mathcal{M}/\mathcal{R} n'est autre alors que l'espace vectoriel quotient de \mathcal{M} par le sous-espace $\mathcal{N}(\mathcal{R})$. De ce que \mathcal{M}^+ est un cône convexe engendrant \mathcal{M} , il résulte immédiatement que $\mathcal{R}(\mathcal{M}^+)$ possède les mêmes propriétés dans \mathcal{M}/\mathcal{R} . Mais $\mathcal{R}(\mathcal{M}^+)$ peut n'être pas un convexe strict ($\mathcal{R}(\mathcal{M}^+)$ peut contenir des droites de \mathcal{M}/\mathcal{R} ; éventuellement, $\mathcal{R}(\mathcal{M}^+)$ peut être identique à \mathcal{M}/\mathcal{R} tout entier); une condition suffisante pour que $\mathcal{R}(\mathcal{M}^+)$ soit convexe strict est l'axiome suivant :

Axiome (S) :

$$\forall x \in \mathcal{M}^+ : (\mathfrak{X}(x) = \mathfrak{X}(0)) \Leftrightarrow (x = 0),$$

autrement dit, \mathcal{M}^+ ne contient pas d'élément non-nul qui soit équivalent à zéro.

Soient \mathcal{C} et \mathcal{L} deux relations d'équivalence linéaire sur \mathcal{M} ; supposons que \mathcal{C} soit plus fine que \mathcal{L} , i.e. :

$$(\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(y)) \Rightarrow (\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(y)) ;$$

\mathcal{L} définit une relation d'équivalence linéaire sur \mathcal{M}/\mathcal{C} : deux classes d'équivalences pour \mathcal{C} (éléments de \mathcal{M}/\mathcal{C}) sont \mathcal{L} -équivalentes si et seulement si elles sont contenues dans la même classe d'équivalence pour \mathcal{L} .

Une relation d'équivalence \mathfrak{X} sur \mathcal{M}^+ se prolonge en une relation d'équivalence linéaire sur \mathcal{M} , (i.e. il existe une relation d'équivalence linéaire sur \mathcal{M} pour laquelle deux éléments de \mathcal{M}^+ sont équivalents si et seulement si ils le sont pour \mathfrak{X}), si et seulement si \mathfrak{X} satisfait aux axiomes (H) et (A) :

Axiome (H) d'homogénéité :

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{M}^+, \forall k \in \mathbb{R}^+ :$$

$$(x_1 \approx_{\mathfrak{X}} x_2) \Rightarrow (kx_1 \approx_{\mathfrak{X}} kx_2) ;$$

Axiome (A) d'additivité :

$$\forall x, y_1, y_2 \in \mathcal{M}^+ :$$

$$(y_1 \approx_{\mathfrak{X}} y_2) \Leftrightarrow ((x + y_1) \approx (x + y_2)).$$

De plus le prolongement de \mathfrak{X} à \mathcal{M} est unique : on le notera donc \mathfrak{R} .

Les axiomes (H) et (A) sont évidemment des conditions nécessaires ; pour montrer qu'il suffit que \mathfrak{X} vérifie (H) et (A), on prolonge à \mathcal{M} , identifié à $(\mathcal{M}^+ \times \mathcal{M}^+)/\Delta$, la relation \mathfrak{X} , en posant :

$$\Delta(x_1, x_2) \approx_{\mathfrak{X}} \Delta(x_3, x_4),$$

si et seulement si :

$$(x_1 + x_4) \approx_{\mathfrak{X}} (x_2 + x_3).$$

On a bien une relation d'équivalence qui prolonge \mathfrak{X} , parce que \mathfrak{X} satisfait à (A) ; et la relation prolongée est linéaire parce que \mathfrak{X} satisfait de plus à (H).

3.3 Dimension du quotient : A partir des relations expérimentales, on définira les quotients $\mathcal{M}^+/\mathfrak{R}$ de dimension finie (voire de dimension 1), propriété que l'on peut caractériser par des axiomes.

Axiomes (U) d'unidimensionnalité :

$$\exists e \in \mathcal{M}^+, \forall x \in \mathcal{M}^+, \exists t \in \mathbb{R}^+, \forall t' \in \mathbb{R}^+ :$$

$$(x \approx_{\mathfrak{R}} t'e) \Leftrightarrow (t = t'),$$

autrement dit, il existe e , (appelé : \mathfrak{R} -générateur), tel que tout x

de \mathcal{M}^+ soit équivalent à un multiple positif de e et un seul. Cet axiome permet de mettre en correspondance biunivoque $\mathcal{M}^+/\mathcal{R}$ et \mathbb{R}^+ , en assignant pour coordonnée à chaque x l'unique nombre $t(x)$ tel que $\mathcal{R}(t(x) \times e) \approx \mathcal{R}(x)$. Tout élément e' de \mathcal{M}^+ tel que $t(e') \neq 0$, peut être pris comme \mathcal{R} -générateur.

Pour exprimer que le quotient de \mathcal{M} par une relation linéaire \mathcal{R} est de dimension n , on peut écrire :

$$\exists \{e_i\} \in \mathcal{M}^n, \forall x \in \mathcal{M}, \exists \{t^i\} \in \mathbb{R}^n, \forall \{t^i\} \in \mathbb{R}^n :$$

$$(x \approx_{\mathcal{R}} \sum_i^n t^i e_i) \Leftrightarrow (\{t^i\} = \{t^i\}),$$

formule où $\{e_i\}$ désigne un système de n vecteurs de \mathcal{M} , $\{t^i\}$ et $\{t^i\}$ un système de n nombres. (Dans le quotient \mathcal{M}/\mathcal{R} , e_i est une base).

Pour n'utiliser que des éléments et des opérations de \mathcal{M}^+ , (physiquement définis), on pose l'axiome (D_n) :

Axiome (D_n) de la dimension n :

$$\exists \{e_i\} \in (\mathcal{M}^+)^n, \forall x \in \mathcal{M}^+, \exists \{t^i\} \in \mathbb{R}^n, \forall \{t^i\} \in \mathbb{R}^n :$$

$$(\mathcal{R}(x + \sum_{i \in I} (-t^i) e_i) \approx \mathcal{R}(\sum_{j \notin I} t^j e_j)) \Leftrightarrow (\{t^j\} = \{t^j\})$$

formule où I est l'ensemble des i tels que t^i soit strictement négatif. Intuitivement, il existe $\{e_i\}$ tel que tout x de \mathcal{M}^+ soit équivalent à une combinaison linéaire unique des e_i ; mais, pour n'utiliser que des coefficients positifs, on doit ajouter à x une combinaison linéaire de ceux des e_i sur lesquels il a une composante négative. Dans la suite $\{e_i\}$ sera appelé une \mathcal{R} -base, et les n -fonctions $t^i(x)$ seront les \mathcal{R} -coordonnées.

Si \mathcal{R} satisfait aux axiomes (H) et (A), l'axiome (D_n) exprime exactement que l'espace vectoriel \mathcal{M}/\mathcal{R} est de dimension n . Mais, en l'absence de l'axiome (A), les fonctions $t^i(x)$ ne fournissent pas un paramétrage de $\mathcal{M}^+/\mathcal{R}$: l'égalité des \mathcal{R} -coordonnées définit une autre relation d'équivalence que \mathcal{R} . Par exemple, soit \mathcal{R} satisfaisant à (D_3) ; $\{e_1, e_2, e_3\}$ une \mathcal{R} -base ; des trois égalités :

$$\mathcal{R}(x + e_1) = \mathcal{R}(e_2 + e_3)$$

$$\mathcal{R}(y + e_1) = \mathcal{R}(e_2 + e_3)$$

$$\mathcal{R}(x) = \mathcal{R}(y)$$

il est faux, (en l'absence de (A)) que deux quelconques impliquent la troisième. (En revanche si x et y ont les mêmes 3 \mathcal{R} -coordonnées positives $\mathcal{R}(x) = \mathcal{R}(y)$). En l'absence de (A) et de (H), l'axiome (D_n) ne permet pas de faire des "changements de base". Notons que l'axiome (U) est plus fort que (D_1), mais (U) est une conséquence de la conjonction des axiomes (A), (H), (S), (D_1).

3.4 Continuité : Jusqu'ici, on a considéré l'espace \mathcal{M} comme un espace vectoriel muni d'un cône \mathcal{M}^+ : que \mathcal{M} soit l'espace vectoriel des mesures sur $(0,3; 0,8)$ va maintenant intervenir. La relation \mathcal{R} étant supposée vérifier l'axiome (D_n) , on va formuler un axiome (C) de continuité des \mathcal{R} -coordonnées $t^i(x)$ par rapport à la longueur d'onde. Des axiomes (H), (A), (D_n) et (C) résultera une expression intégrale des $t^i(x)$.

Axiome (C) de continuité :

Soit $\{e_i\}$ une \mathcal{R} -base ; $t^i(x)$ les \mathcal{R} -coordonnées correspondantes ;

$$\forall \varepsilon \exists \alpha \forall \lambda_0 \forall E \in \mathcal{M}^+ :$$

$$(S(B) \subset (\lambda_0 - \alpha, \lambda_0 + \alpha)) \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n |t^i(B) - t^i(\int B \times \delta(\lambda - \lambda_0) d\lambda)| < \varepsilon \right)$$

(ou $S(B) \subset (a,b)$ signifie que la mesure B n'a pas de masse en dehors de l'intervalle (a,b) ; i.e., si B est une distribution assez concentrée au voisinage de λ_0 , les $t^i(B)$ diffèrent arbitrairement peu de ceux d'une mesure ponctuelle (monochromatique, cf 2.2), $\int B \times \delta(\lambda - \lambda_0) d\lambda$ de longueur d'onde λ_0 et même masse totale, $\int B$, que B .

De l'axiome (C) résulte en particulier la continuité des fonctions de λ_0 :

$$t^i[\lambda_0] = t^i(\delta(\lambda - \lambda_0) d\lambda).$$

Si \mathcal{R} satisfait à (H), (A), (D_n) et (C) on a la formule intégrale :

$$t^i(B(\lambda) d\lambda) = \int_{0,3}^0,8 t^i[\lambda] B(\lambda) d\lambda ;$$

en effet, (en bref), on peut écrire $B(\lambda) d\lambda$ comme une somme de mesures positives B_k dont les supports soient des intervalles arbitrairement petits ; d'après (A) et (H), $t^i(B)$ est la somme des $t^i(B_k)$; d'après (C) et (H) cette somme est approximativement une somme de Riemann pour l'intégrale ci-dessus.

3.5 Relation expérimentale et relation d'équivalence : Lorsqu'on cherche à définir expérimentalement une relation d'équivalence \mathcal{R} satisfaisant à certains des axiomes définis plus haut, on se heurte aux phénomènes de seuil.

a) \mathcal{R} ne peut satisfaire ni à (H) ni à (A) : les stimuli subliminaux (inférieurs au seuil absolu) n'étant pas perçus, ils sont équivalents pour la relation expérimentale \mathcal{R} : mais alors, si \mathcal{R} satisfait à (H) ou à (A) tous les stimuli seront équivalents à zéro, (comme produit par un entier d'un stimulus non perçu). Cette difficulté, (cf *infra* β) peut être palliée en considérant comme donnée expérimentale une relation \mathcal{R} définie sur un domaine \mathcal{D}^+ de \mathcal{M}^+ ne contenant pas les stimuli trop faibles.

β) \mathcal{R} n'est pas définie partout sur \mathcal{M}^+ : un stimulus rayonnant supraliminaire (supérieur au seuil de douleur) détruit l'oeil (ou, du moins, en trouble temporairement le fonctionnement...). L'expérimentation ne peut donc porter que sur un domaine borné \mathcal{D}^+ de \mathcal{M}^+ . Il n'est pas opportun de ranger dans une seule classe d'équivalence les stimuli trop forts, car aucun des axiomes (H), (A), (D_n) ne pourrait alors être

vérifié. Il est préférable d'étendre à \mathcal{M}^+ une relation d'équivalence \mathcal{R} établie expérimentalement sur \mathcal{D}^+ comme au § 3.2 on a étendu \mathcal{R} de \mathcal{M}^+ à \mathcal{M}). Supposons que \mathcal{R} satisfasse sur \mathcal{D}^+ à l'axiome (H') d'homogénéité :

$$\forall x, x' \in \mathcal{D}^+, \forall k \in \mathbb{R}^+ :$$

$$[(x \underset{\mathcal{R}}{\approx} x') \wedge (kx \in \mathcal{D}^+) \wedge (kx' \in \mathcal{D}^+)] \Rightarrow (kx \underset{\mathcal{R}}{\approx} kx')$$

On définit sur \mathcal{M}^+ une relation de prolongement de \mathcal{R} (deux éléments de \mathcal{D}^+ sont équivalents pour la relation prolongée si et seulement si ils le sont pour la relation initiale), notée aussi \mathcal{R} , par la formule :

$$[\mathcal{R}(x) = \mathcal{R}(y)] \Leftrightarrow \dots$$

$$\dots \Leftrightarrow [\exists x', y' \in \mathcal{D}^+, \exists k \in \mathbb{R}^+ : (x = kx') \wedge (y = ky') \wedge (\mathcal{R}(x') = \mathcal{R}(y'))]$$

(i.e. deux éléments sont équivalents dans \mathcal{M}^+ s'ils ont des homothétiques équivalents dans \mathcal{D}^+). Sur \mathcal{M}^+ , \mathcal{R} satisfait à l'axiome (H), et l'on peut considérer des axiomes sur \mathcal{D}^+ impliquant que les axiomes (A), (D_n) etc. soient vérifiés sur \mathcal{M}^+ .

γ) La relation définie expérimentalement n'est pas une relation d'équivalence. Pour définir expérimentalement une relation d'équivalence sur un ensemble de stimuli, on présente conjointement à des sujets, dans un certain processus complexe, un couple de stimuli (B_1, B_2) et l'on note $\mathcal{F}(B_1, B_2)$ la probabilité que B_1 et B_2 soient confondus (la définition de la confusion dépend de l'expérience, cf, e.g. *infrala* photométrie par papillotage). On voudrait définir \mathcal{R} en posant :

$$(B_1 \underset{\mathcal{R}}{\approx} B_2) \Leftrightarrow (\mathcal{F}(B_1, B_2) \geq p_0)$$

(ou p_0 est une limite choisie entre 0 et 1...). Or la relation \mathcal{R} , ainsi définie, pourra être réflexive ($B_1 \approx B_2$) et symétrique (si $B_1 \approx B_2, B_2 \approx B_1$) ; mais elle ne sera généralement pas transitive (le sujet ne distingue pas B_1 de B_{i+1} , mais il distingue les deux extrémités, B_1 et B_{10} , d'une chaîne $\{B_i\}$ de stimuli, chaîne dont les maillons sont inférieurs à un seuil différentiel).

δ) Selon l'axiome (C) de continuité, l'ensemble Λ des longueurs d'onde que l'oeil peut percevoir est un ouvert : (en effet, Λ n'est autre que l'ensemble des λ où l'une au moins des fonctions $t^i[\lambda]$ est non-nulle) ; et il paraît naturel de postuler que cet ouvert est un intervalle (sans lacune), que l'on peut noter $\lambda_{UV}, \lambda_{IR}$ (comme s'il s'étendait de λ_{UV} , la plus grande longueur d'onde ultraviolette à λ_{IR} , la plus petite longueur d'onde d'infrarouge. Mais, vu le caractère aléatoire des perceptions (et singulièrement à la limite de l'imperceptible), il est déraisonnable de postuler un intervalle de perception qui soit bien défini comme un ouvert ou un fermé... : il n'y a qu'une probabilité de perception. Toutefois on peut choisir deux intervalles : un intervalle de fréquences qui (à un niveau de brillance convenable) sont sûrement perçues et un intervalle de fréquences qui, sans lésion irréversible de l'oeil, ne sont jamais perçues : pour celui-ci on a choisi (0,3 ; 0,8) (arbitrairement ; cf § 4.2.3 on rapporte qu'un rayonnement de $\lambda = 1\mu$ a pu être perçu... mais dans des conditions extrêmes...) ; pour celui-là l'expérience suggère (0,39 ; 0,75).

En pratique, on procède comme suit :

1°) L'expérimentation permet de définir un domaine \mathfrak{D}^+ de régularité, où les axiomes (A), (H) et (C) sont approximativement vérifiés. Pour que l'expérience soit intéressante, ce domaine \mathfrak{D}^+ doit être assez vaste. On voudrait imposer à \mathfrak{D}^+ de rencontrer au moins en un point distinct de 0, toute demi-droite de \mathcal{M}^+ issue de l'origine. Mais cf (6), il faut réserver le cas des mesures dont la masse est concentrée aux extrémités de l'intervalle (0,3 ; 0,8). On posera donc seulement :

$$\forall x \in \mathcal{M}^+ - \{0\}, \exists k \in \mathbb{R}^+ - \{0\} : kx \in \mathfrak{D}^+,$$

où \mathcal{M}^+ est le cône des mesures positives sur l'intervalle (0,39 ; 0,75) ($\mathcal{M}^+, c \mathcal{M}^+$, est formée de demi-droites dont chacune contient des stimuli sûrement perçus).

2°) Il est essentiel que soit vérifié, dans \mathfrak{D}^+ , un axiome de dimension [(U) ou (D_n)]. Supposons que ce soit (D_n). Selon l'axiome, il existe dans \mathfrak{D}^+ une \mathcal{R} -base $\{B_i\}$, ensemble de n stimuli ; tout stimulus B de \mathfrak{D}^+ est \mathcal{R} -équivalent, (au sens de (D_n), cf supra § 3.3), à une combinaison linéaire unique :

$$t^1(B) B_1 + \dots + t^n(B) B_n.$$

Voici le sens que peut revêtir cet axiome dans un contexte expérimental :

a) Pour tout sujet, on peut, en ajoutant à B une combinaison convenable de certains des stimuli de la base obtenir un stimulus qui soit confondu avec une combinaison convenable des autres stimuli de la base. Si les deux stimuli confondus sont :

$$B + \sum_{i \in I} \theta^i B_i, \text{ et } : \sum_{j \notin I} \theta^j B_j$$

(formule où I est, comme ci-dessus, une partie des n premiers entiers, et où les θ sont tous positifs), on dira que l'expérience a fourni pour B les coordonnées : $(t^1, \dots, t^h, \dots, t^n)$ où t^h est égal à θ^h , (resp. à $-\theta^h$) si $h \notin I$, (resp. $h \in I$).

b) Les divers sujets, (ceux, du moins, dont la vue est normale) s'accordent approximativement sur les composantes et les proportions des mélanges ; c'est-à-dire que les coordonnées (t^h) varient peu d'une expérience à l'autre. On peut donc choisir des valeurs moyennes qui seront par convention, les $t^i(B)$.

Il est également possible de poser un axiome de dimensionalité adapté à une relation d'équivalence non-linéaire (i.e. s'écartant des axiomes (A) et (H)). C'est ce que nous ferons au § 4 après que l'étude détaillée de l'approximation linéaire nous aura familiarisé avec la forme géométrique du quotient $\mathcal{C}(\mathcal{M}^+)$ de \mathcal{M}^+ par la relation d'équivalence chromatique \mathcal{C} .

3°) On détermine des valeurs aussi satisfaisantes que possible pour les fonctions $t^i[\lambda_0]$; autrement dit, on détermine expérimentalement, cf 2° a et b, les coordonnées dans une base fixée d'un stimulus

monochromatique proportionnel à $\delta(\lambda - \lambda_0)d\lambda$, et inclus dans \mathfrak{D}^+ . En fait, cf 4.2.1, on n'utilise que des stimuli quasi-monochromatiques. Notons que géométriquement, ceci revient à se placer dans un sous-cône convexe de \mathcal{M}^+ , défini par une condition du type suivant : le stimulus a une densité $B(\lambda)$ continue, et, sur tout l'intervalle $(0,3 ; 0,8)$ la densité est inférieure à k fois la masse totale $\int B$ (on peut prendre e.g. $k = 10.000$).

Aux extrémités de l'intervalle $(0,3 ; 0,8)$ (disons en dehors de l'intervalle $(0,39 ; 0,75)$, les fonctions $t^i[\lambda]$ sont très voisines de zéro ; mais trouver la direction précise du vecteur $\{t^i[\lambda]\}$ de \mathbb{R}^n , (les rapports des $t^i[\lambda]$ des uns aux autres), offre une extrême difficulté. Il est cependant intéressant d'étudier au mieux la limite de cette direction quand λ tend vers $0,3$ (U V) ou $0,8$ (I.R.), car tout $\{t^i[\lambda]\}$ est vecteur directeur d'une demi-droite du cône $\mathcal{R}(\mathcal{M}^+)$. Les valeurs expérimentales des $t^i[\lambda]$ sont tabulées et sanctionnées par une convention internationale... On pose par définition :

$$t^i(B(\lambda)d\lambda) = \int_{0,3}^{0,8} t^i[\lambda]B(\lambda)d\lambda.$$

Et, désormais, deux stimuli sont déclarés équivalents si la formule intégrale leur assigne les mêmes coordonnées. On peut écrire l'accord de l'équivalence ainsi défini avec l'équivalence expérimentale ; on vérifie ainsi dans quelle mesure cette dernière relation satisfait aux axiomes. Eventuellement, le désaccord entre les deux relations fait l'objet de formules.

C'est ainsi qu'au prix de retouches successives on parvient à placer les résultats des expériences psychophysiques dans un cadre mathématique régulier ; cadre hérité de la physique ; cadre qu'en dépit de la complexité des phénomènes on croit être naturel.