Bulletin de la S. M. F.

Daniel Duverney

Approximants de Padé et U-dérivation

Bulletin de la S. M. F., tome 122, nº 4 (1994), p. 553-570
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1994__122_4_553_0>

Bull. Soc. math. France,
122, 1994, p. 553–570.

APPROXIMANTS DE PADÉ ET U-DÉRIVATION

PAR

DANIEL DUVERNEY (*)

RÉSUMÉ. — La notion de U-dérivation nous permet de construire explicitement des suites de polynômes orthogonaux formels relativement à certaines formes linéaires sur $K[X]$, où K est un corps commutatif arbitraire. Nous en déduisons la diagonale de la table de Padé des séries formelles $\Sigma_{n=1}^{+\infty} X^n/u_n$ et $1 + \Sigma_{n=1}^{+\infty} X^n/(u_1 u_2 \cdots u_n)$, dans le cas où $u_{n+1} = qu_n + r$, $q \in K^*$, et nous donnons une majoration du reste de ces approximants lorsque K est muni d'une valeur absolue $|\ \ |$.

ABSTRACT. — The notion of U-derivation allows us to construct explicitily sequences of formal orthogonal polynomials with respect to some linear forms of $K[X]$, where K is an arbitrary commutative field. From this we get the diagonal of the Padé table of the formal series $\Sigma_{n=1}^{+\infty} X^n/u_n$ and $1 + \Sigma_{n=1}^{+\infty} X^n/(u_1 u_2 \cdots u_n)$ in case $u_{n+1} = qu_n + r$, $q \in K^*$, and we give an upper bound for the rest of these approximants when K possesses an absolute value $|\ \ |$.

1. Introduction

a) Le but de ce travail est de montrer comment obtenir explicitement la diagonale de la table de Padé de certaines séries formelles. La méthode proposée se base sur la notion de U-dérivation, et elle est *purement algébrique*; nous cherchons, en effet, à résoudre le problème suivant.

Soit K un corps commutatif, et soit $f \in K[[X]]$. Trouver $P, Q \in K[X]$, avec $\deg P \leq n$, $\deg Q \leq n$ et $R \in K[[X]]$, tels que :

$$Q(X)f(X) - P(X) = X^{2n+1}R(X). \tag{1}$$

b) Nous introduisons les notation suivantes [6]. Soit

$$U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots\}$$

(*) Texte reçu le 14 juin 1993.
D. DUVERNEY, 24, Place du Concert, 59800 Lille.
Classification AMS : 05A30, 33C45, 41A21.

une suite d'éléments de K^*. Nous notons :

$$\mathcal{U}^n = \begin{cases} u_1 u_2 \cdots u_n & \text{si } n \in \mathbb{N} - \{0\}, \\ 1 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Cas particulier. — Soit $q \in K^*$, et soit

$$u_n = 1 + q + \cdots + q^{n-1}. \tag{2}$$

Alors $\mathcal{U}^n$ se note généralement $[n]_q\,!$. En particulier :

$$[n]_1\,! = n\,!.$$

Revenant au cas général, nous posons également :

$$U_n^p = \frac{\mathcal{U}^n}{\mathcal{U}^p \mathcal{U}^{n-p}} \quad \text{pour } p = 0, 1, \ldots, n.$$

Dans le cas où $u_n = 1 + q + \cdots + q^{n-1}$, U_n^p se note généralement $\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}$. Ainsi :

$$\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q\,!}{[p]_q\,!\,[n-p]_q\,!}.$$

Bien entendu, $\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}_1 = \binom{n}{p}$.

Nous utiliserons *la formule du binôme de Cauchy* [7], [8] sous la forme suivante. Soit :

$$H_n(X) = \begin{cases} (X-1)(X-q)\cdots(X-q^{n-1}) & \text{si } n \in \mathbb{N} - \{0\}, \\ 1 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Alors :

$$H_n(X) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}_q q^{p(p-1)/2} X^{n-p}. \tag{3}$$

c) Considérons la série *U-logarithme* et la série *U-exponentielle*, définies, pour toute suite U d'éléments de K^*, par :

$$L_U(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{X^n}{u_n}, \tag{4}$$

$$\exp_U(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{X^n}{\mathcal{U}^n}. \tag{5}$$

On observe que :

$$\exp_U(X) = 1 + L_U(X). \tag{6}$$

Nous obtiendrons les approximants de Padé de $L_U(X)$ et $\exp_U(X)$ dans le cas où la suite U est *arithmético-géométrique*, c'est-à-dire vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$:

$$u_n = \begin{cases} aq^n + b & \text{si } q \in K - \{0, 1\}, \\ an + b & \text{si } q = 1, \end{cases} \tag{7}$$

avec $a, b \in K$, $a \neq 0$ dans les deux cas. Remarquons que ce sont essentiellement toutes les suites vérifiant une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = qu_n + r$ avec $(q, r) \in K^* \times K$. Nous poserons :

$$c = \begin{cases} a & \text{si } u_n = an + b, \\ b(1-q) & \text{si } u_n = aq^n + b, \ \ q \neq 1. \end{cases}$$

La méthode utilisée consiste à construire une suite de polynômes orthogonaux formels pour une forme linéaire ζ sur $K[X]$; elle se situe donc dans un cadre bien connu (voir [4], [5]). Nous la développerons cependant de manière complètement autonome, en suivant la démarche adoptée par K. ALLADI et M.L. ROBINSON pour obtenir les approximants de Padé de $\log(1+z)$ (cf. [1]) .

Les approximants de Padé obtenus dans les THÉORÈMES 4 et 6 ci-après sont connus dans certains cas particuliers :

• En ce qui concerne le U-logarithme, dans les cas $u_n = an + b$ (cf. [10] ou [9, chap. XIII]) et $u_n = \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ $(q \in \mathbb{C} - \{1\}$, cf. [2]).

• Pour la U-exponentielle, dans les cas $u_n = an + b$ (cf. [9, chap. XIV]), $u_n = q^n - 1$ (cf. [12], [2]) et $u_n = q^n$ [2].

Pour des applications en théorie des nombres, voir [1], [3], [12].

d) Le plan de l'article est le suivant : dans le § 2, nous ferons un bref rappel sur les notions de U-dérivation et de U-racine d'ordre k d'un polynôme (pour plus de détails, voir [6]). Dans le § 3, nous introduirons les U-intégrales et reprendrons la démarche de K. ALLADI et M.L. ROBINSON pour associer une suite de polynômes orthogonaux formels aux approximants de Padé. Nous déterminerons ensuite explicitement cette suite de polynômes dans le cas où u_n est arithmético-géométrique et en déduirons les approximants de Padé de $L_U(X)$ dans ce cas (§ 4). Dans le § 5, nous effectuerons le lien entre U-racines d'ordre k et approximants de Padé de $\exp_U(X)$, ce qui nous permettra de déterminer explicitement ces approximants quand U est arithmético-géométrique. Pour terminer, nous nous placerons (§ 6) dans un corps valué $(K, |\ |)$, et montrerons comment exprimer les U-intégrales sous forme de séries lorsque $u_n = aq^n + b$, $q \neq 1$; nous en déduirons, à titre d'exemple, un majorant du reste des approximants de Padé calculés au § 4.

2. *U*-dérivation

a) Soit $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots\}$ une suite d'éléments de K^*. La *U-dérivée* de $f \in K[[X]]$ est définie par :

$$\text{(8)} \qquad \text{Si } f(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n, \quad \text{alors} \quad \partial_U f(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n u_n X^{n-1}.$$

Un cas particulier important est celui où U vérifie (2). Dans ce cas, nous noterons $\partial_U = \delta_q$. En particulier, δ_1 est la dérivation ordinaire.

On dit que δ_q est la *q-dérivation* (voir [7]).

Pour $q \in K - \{0, 1\}$, on a :

$$\forall f \in K[[X]], \quad \delta_q f(X) = \frac{f(qX) - f(X)}{X(q-1)}.$$

b) Soit $P \in K[X]$, et soit $a \in K$. On dit que a est une *U-racine d'ordre k* de P si :

$$\begin{cases} P(a) = \partial_U P(a) = \cdots = \partial_U^{k-1} P(a) = 0, \\ \partial_U^k P(a) \neq 0. \end{cases}$$

Nous aurons essentiellement besoin, dans ce qui suit, du résultat suivant, qui est un cas particulier du théorème 2 de [6] :

PROPOSITION 1. — *Soit U vérifiant* (7), *et soit, pour $n \in \mathbb{N} - \{0\}$* :

$$G_n(X) = X^n (X-1)(X-q) \cdots (X - q^{n-1}) = X^n H_n(X).$$

Alors G_n admet 1 *comme U-racine d'ordre n, et de plus :*

$$\partial_U^n G_n\Big(\frac{1}{q}\Big) = \Big(\frac{c}{q}\Big)^n [n]_q\,!\,.$$

Démonstration. — Posons $G_n(X) = \sum_{k=n}^{2n} a_k X^k$.

• Supposons $q \neq 1$. Alors, pour $0 \leq j \leq n$, on a :

$$\begin{aligned}
\partial_U^j G_n(X) &= \sum_{k=n}^{2n} a_k u_k u_{k-1} \cdots u_{k-j+1} X^{k-j} \\
&= \frac{1}{X^j q^{j(j-1)/2}} \sum_{k=n}^{2n} a_k (aq^k + b)(aq^k + bq) \cdots (aq^k + bq^{j-1}) X^k \\
&= \frac{1}{X^j q^{j(j-1)/2}} \sum_{k=n}^{2n} a_k \Big(\sum_{i=0}^{j} \alpha_{ji} q^{ki} \Big) X^k,
\end{aligned}$$

avec $\alpha_{ji} \in K$ et $\alpha_{j0} = b^j q^{j(j-1)/2}$. Donc :

$$\begin{aligned}
\partial_U^j G_n(X) &= \frac{1}{X^j q^{j(j-1)/2}} \sum_{i=0}^{j} \alpha_{ji} \sum_{k=n}^{2n} a_k (q^i X)^k \\
&= \frac{1}{X^j q^{j(j-1)/2}} \sum_{i=0}^{j} \alpha_{ji} G_n(q^i X).
\end{aligned}$$

Puisque $G_n(1) = G_n(q) = \ldots = G_n(q^{n-1}) = 0$, on a

$$\begin{cases} \partial_U^j G_n(1) = 0 & \text{si } j = 0, 1, \ldots, n-1\,; \\ \partial_U^j G_n\Big(\dfrac{1}{q}\Big) = (bq)^n G_n\Big(\dfrac{1}{q}\Big) & \text{si } j = n, \end{cases}$$

d'où le résultat.

• La démonstration est analogue si $q = 1$. On observe dans ce cas que :

$$\begin{aligned}
\partial_U^j G_n(X) &= \sum_{k=n}^{2n} a_k (ak + b)(a(k-1) + b) \cdots (a(k-j+1) + b) X^{k-j} \\
&= X^{i-j} \sum_{k=n}^{2n} a_k \Big(\sum_{i=0}^{j} \alpha_{ji}\, k(k-1) \cdots (k-i+1) \Big) X^{k-i},
\end{aligned}$$

avec $\alpha_{ji} \in K$ et $\alpha_{jj} = a^j$. Donc

$$\begin{aligned}
\partial_U^j G_n(X) &= X^{i-j} \sum_{i=0}^{j} \alpha_{ji} \sum_{k=n}^{2n} a_k k(k-1) \cdots (k-i+1) X^{k-i} \\
&= X^{i-j} \sum_{i=0}^{j} \alpha_{ji} G_n^{(i)}(X),
\end{aligned}$$

où $G_n^{(i)}$ désigne la i-ième dérivée (ordinaire) de G_n.

Ainsi $\partial_U^j G_n(1) = 0$ pour $j = 0, 1, \dots, n-1$, car

$$G_n(1) = G_n'(1) = \cdots = G_n^{(n-1)}(1) = 0.$$

On a de plus :

$$\partial_U^n G_n(1) = a^n G_n^{(n)}(1) = a^n n!. \quad \square$$

3. Approximants de Padé du U-analogue du logarithme

a) Soit $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}$ une suite d'éléments de K^*. Soit $H \in K[X]$ une U-primitive du polynôme P (i.e. $\partial_U H = P$). On pose pour $\alpha, \beta \in K$:

$$\mathop{\mathrm{S}}_{\alpha}^{\beta} P(z)\,\mathrm{d}_U z = \big[H(z)\big]_{\alpha}^{\beta} = H(\beta) - H(\alpha). \tag{9}$$

On définit une forme bilinéaire symétrique sur $K[X]$ en posant :

$$\langle P, Q\rangle_U = \mathop{\mathrm{S}}_{0}^{1} P(z)Q(z)\,\mathrm{d}_U z. \tag{10}$$

On suppose dans ce qui suit qu'il existe une base $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes orthogonaux formels pour $\langle\ ,\ \rangle_U$; plus précisément (voir [5]) :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \Phi_n(X) = \displaystyle\sum_{m=0}^{n} \varphi_{m,n} X^m \in K[X], \quad \varphi_{n,n} \neq 0, \\ \forall (n,p) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}, \quad n \neq p \ \Rightarrow\ \langle \Phi_n, \Phi_p\rangle_U = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Soit enfin $f(z,X) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n(z) X^n$ un élément de $K[z][[X]]$. On pose :

$$\mathop{\mathrm{S}}_{0}^{1} f(z,X)\,\mathrm{d}_U z = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\mathop{\mathrm{S}}_{0}^{1} F_n(z)\,\mathrm{d}_U z\Big) X^n. \tag{12}$$

Il est clair à partir de (12) que :

$$L_U(X) = X \mathop{\mathrm{S}}_{0}^{1} \frac{1}{1 - zX}\,\mathrm{d}_U z. \tag{13}$$

b) Soit $m \in \mathbb{N} - \{0\}$. Calculons, en suivant [1] :

$$\begin{aligned} X^{m+1} &\mathop{\mathrm{S}}_{0}^{1} \frac{z^m}{1 - zX}\,\mathrm{d}_U z \\ &= X \mathop{\mathrm{S}}_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}_U z}{1 - zX} - X \mathop{\mathrm{S}}_{0}^{1} \frac{1 - (zX)^m}{1 - zX}\,\mathrm{d}_U z \\ &= L_U(X) - \mathop{\mathrm{S}}_{0}^{1} \Big(\sum_{k=1}^{m} z^{k-1} X^k\Big)\,\mathrm{d}_U z \\ &= L_U(X) - \sum_{k=1}^{m} \frac{X^k}{u_k}. \end{aligned} \tag{14}$$

Soit maintenant $P(X)=\sum_{m=0}^{n} a_m X^m$. Avec la convention $\sum_{k=1}^{0}=0$, on obtient après multiplication de (14) par a_m et sommation :

$$X^{n+1}\int_0^1 \frac{P(z)\,\mathrm{d}_U z}{1-zX}=\Big(X^n\sum_{m=0}^{n}\frac{a_m}{X^m}\Big)L_U(X)-\sum_{m=0}^{n}a_m\sum_{k=1}^{m}\frac{X^{n+k-m}}{u_k}. \tag{15}$$

En remplaçant P par Φ_n défini par (11), on déduit de (15) la diagonale de la table de Padé de $L_U(X)$:

THÉORÈME 1. — *Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :*

$$Q_n(X)L_U(X)-P_n(X)=X^{2n+1}R_n(X),$$

avec

$$\begin{cases} Q_n(X)=X^n\Phi_n\Big(\dfrac{1}{X}\Big),\\[2mm] P_n(X)=\displaystyle\sum_{m=0}^{n}\varphi_{m,n}\sum_{k=1}^{m}\frac{X^{n+k-m}}{u_k},\\[2mm] R_n(X)=\dfrac{1}{X^n}\displaystyle\int_0^1\frac{\Phi_n(z)\,\mathrm{d}_U z}{1-zX}. \end{cases} \tag{16}$$

Démonstration. — Ceci se déduit directement de (15). L'appartenance $R_n(X)\in K[[X]]$ résulte de (12) et du fait que $\langle X^p,\Phi_n\rangle_U=0$ pour $0\le p<n$.

4. Cas des suites arithmético-géométriques

On dispose alors d'une *formule d'intégration par parties* pour la U-dérivation. Cette formule fait intervenir la q-dérivation définie au § 2 a).

THÉORÈME 2. — *Supposons que U vérifie* (7), *et soient $f,g\in K[X]$, avec $g(0)=0$. Alors, pour tous $(\alpha,\beta)\in K^2$, on a :*

$$\int_\alpha^\beta f(qz)\partial_U g(z)\,\mathrm{d}_U z=\big[f(z)g(z)\big]_\alpha^\beta - c\int_\alpha^\beta \delta_q f(z)g(z)\,\mathrm{d}_U z$$

avec $c=\begin{cases} a & \textit{si } u_n=an+b,\\ b(1-q) & \textit{si } u_n=aq^n+b,\ q\in K-\{0,1\}.\end{cases}$

Démonstration.

a) Nous supposons d'abord que $q \in K - \{0,1\}$ et $u_n = aq^n + b$. Posons $g(X) = \sum_{n=1}^{N} g_n X^n$. On vérifie facilement que :

$$\partial_U g(X) = \frac{ag(qX) + bg(X)}{X}. \tag{17}$$

Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\partial_U\big(X^k g(X)\big) = \frac{a(qX)^k g(qX) + bX^k g(X)}{X}. \tag{18}$$

Mais, d'après (17), on a aussi $ag(qX) = X\partial_U g(X) - bg(X)$. D'où en reportant dans (18) :

$$\partial_U\big(X^k g(X)\big) = (qX)^k \partial_U g(X) + b(1-q^k)X^{k-1}g(X).$$

Et par linéarité :

$$\partial_U\big[f(X)g(X)\big] = f(qX)\partial_U g(X) + c\delta_q f(X)\cdot g(X). \tag{19}$$

b) Si $u_n = an + b$, on a alors :

$$\partial_U g(X) = ag'(X) + b\,\frac{g(X)}{X}, \tag{20}$$

où g' désigne la dérivée usuelle de g. Donc :

$$\partial_U X^k g(X) = aX^k g'(X) + (ak+b)X^{k-1}g(X). \tag{21}$$

Puisque $ag'(X) = \partial_U g(X) - bg(X)/X$, on obtient en procédant comme au a) :

$$\partial_U\big[f(X)g(X)\big] = f(X)\partial_U g(X) + c\delta_1 f(X)\cdot g(X). \tag{22}$$

c) La formule d'intégration par parties résulte immédiatement de (19) et de (22).

THÉORÈME 3. — *Si la suite U vérifie* (7), *alors*

$$\Phi_n(X) = \partial_U^n\big[X^n H_n(X)\big] = \partial_U^n\big[X^n(X-1)(X-q)\cdots(X-q^{n-1})\big]$$

vérifie (11).

Démonstration. — Il suffit de prouver que, pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$:

$$\mathop{\mathrm{S}}_0^1 X^k \Phi_n(X)\,\mathrm{d}_U X = 0. \tag{23}$$

Posons $G_n(X) = X^n H_n(X)$. En vertu de la PROPOSITION 1, on a :

$$\begin{cases} G_n(1) = \partial_U G_n(1) = \cdots = \partial_U^{n-1} G_n(1) = 0, \\ G_n(0) = \partial_U G_n(0) = \cdots = \partial_U^{n-1} G_n(0) = 0. \end{cases}$$

L'égalité (23) s'obtient alors facilement en U-intégrant k fois par parties $\mathrm{S}_0^1 X^k \partial_U^n G_n(X)\,\mathrm{d}_U X$, et le THÉORÈME 3 est démontré.

Nous avons donc obtenu la diagonale de la table de Padé de $L_U(X)$ dans le cas où U est arithmético-géométrique :

THÉORÈME 4. — *Soit U vérifiant* (7). *Alors on a* :

$$Q_n(X) L_U(X) - P_n(X) = X^{2n+1} R_n(X),$$

avec :

$$Q_n(X) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p u_{2n-p} u_{2n-p-1} \cdots u_{n-p+1} \begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}_q q^{p(p-1)/2} X^p, \tag{24}$$

$$P_n(X) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m} u_{n+m} u_{n+m-1} \cdots u_{m+1} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q \times q^{(n-m)(n-m-1)/2} \sum_{k=1}^{m} \frac{X^{n+k-m}}{u_k}, \tag{25}$$

$$R_n(X) = c^n [n]_q\,! \mathop{\mathrm{S}}_0^1 \frac{z^n(1-z)(q-z)\cdots(q^{n-1}-z)}{(1-zX)(q-zX)\cdots(q^n-zX)}\,\mathrm{d}_U z. \tag{26}$$

Démonstration. — Pour obtenir (24) et (25), on remarque que, en vertu de (3), on a :

$$\Phi_n(X) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p u_{2n-p} u_{2n-p-1} \cdots u_{n-p+1} \begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}_q q^{p(p-1)/2} X^{n-p}, \tag{27}$$

et on applique le THÉORÈME 1.

En ce qui concerne (26), on observe qu'une récurrence élémentaire conduit à : pour tout $q \in K^*$, on a

$$\delta_q^k\Big(\frac{1}{1-zX}\Big) = \frac{[k]_q\,!\,X^k}{(1-zX)(1-qzX)\cdots(1-q^kzX)}, \tag{29}$$

la q-dérivée étant prise par rapport à z.

En utilisant l'expression de $R_n(X)$ donnée par le THÉORÈME 1

$$R_n(X) = \frac{1}{X^n}\,\mathsf{S}_0^1\,\frac{\Phi_n(z)}{1-zX}\,\mathrm{d}_U z,$$

et la formule d'intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} R_n(qX) &= \frac{1}{(qX)^n}\,\mathsf{S}_0^1\,\frac{\Phi_n(z)}{1-(qz)X}\,\mathrm{d}_U z \\ &= \frac{1}{(qX)^n}(-c)\,\mathsf{S}_0^1\,\frac{\partial_U^{n-1}(z^nH_n(z))}{(1-zX)(1-qzX)}X\,\mathrm{d}_U z \\ &= -\frac{c}{q^n}V_n(X). \end{aligned}$$

Nous recommençons la même opération sur $V_n(X)$, et (26) s'ensuit par récurrence, en utilisant (29).

REMARQUE 1. — Le THÉORÈME 4 donne également la diagonale de la table de Padé de $L_U(X)$ si $u_n = a\omega^n + b\eta^n$, puisque dans ce cas :

$$L_U(X) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{aq^n+b}\Big(\frac{X}{\eta}\Big)^n, \quad \text{avec} \quad q = \frac{\omega}{\eta}\cdot \tag{30}$$

REMARQUE 2. — Si on travaille dans $\mathbb{C}$, on peut remarquer que les polynômes Φ_n sont des polynômes de Jacobi pour $q = 1$, ou leur q-analogue pour $q \neq 1$ (voir [8]). L'expression de Φ_n dans le THÉORÈME 3 équivaut évidemment à la formule de Rodrigues.

REMARQUE 3. — Les approximants de Padé de

$$L_q(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1+q+\cdots+q^{n-1}}$$

obtenus par P. BORWEIN [2, th. 3] peuvent se déduire de l'expression de Φ_n donnée au THÉORÈME 3 ci-dessus, et de la formule de Leibnitz pour δ_q (voir [7]) :

$$\delta_q^n\big[f(x)g(x)\big] = \sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{-n(n-k)}(\delta_q^{n-k}f)(q^kx)(\delta_q^kg)(x). \tag{31}$$

REMARQUE 4. — S'il existe $k \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ tel que $q^k = 1$, il est immédiat que $[n]_q! = 0$ pour $n \geq k$, donc $R_n = 0$ en vertu de (26) et $L_U(X)$ est une *fraction rationnelle.* Dans le cas contraire, on a :

PROPOSITION 2. — *Soit $q \in K^*$ avec $q^k \neq 1$ pour tout $k \in \mathbb{N} - \{0,1\}$. Alors la table de Padé de L_U est normale, c'est-à-dire :*

$$\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}, \quad R_n(0) \neq 0.$$

Démonstration. — En utilisant (26), on obtient avec les notations de la PROPOSITION 1 :

$$R_n(0) = c^n [n]_q! q^{-n(n+1)/2} \int_0^1 (-1)^n G_n(z) \, \mathrm{d}_U z.$$

Nous notons Z_n la U-primitive de G_n qui s'annule pour $X = 0$, et nous voulons démontrer que $Z_n(1) \neq 0$.

- Supposons d'abord $q \neq 1$. Alors, en vertu de (17), on a :

$$G_n(X) = \frac{aZ_n(qX) + bZ_n(X)}{X}.$$

Si $Z_n(1) = 0$, on en déduit $Z_n(q) = 0$ car $G_n(1) = 0$, puis $Z_n(q^2) = 0$ car $G_n(q) = 0$ et par récurrence $Z_n(q^k) = 0$ pour $k = 0, 1 \ldots, n$. On a donc

$$Z_n(X) = X^{n+1} \alpha \prod_{k=0}^{n} (X - q^k),$$

ce qui est impossible car $\deg Z_n = 2n + 1$. Donc $Z_n(1) \neq 0$.

- Supposons maintenant $q = 1$. Alors on a (voir (20)) :

$$\partial_U Z_n(X) = G_n(X) = aZ_n'(X) + b\frac{Z_n(X)}{X}.$$

Si $Z_n(1) = 0$, on obtient $Z_n'(1) = 0$ car $G_n(1) = 0$ et en U-dérivant encore $Z_n''(1) = \cdots = Z_n^{(n)}(1) = 0$. Ainsi $Z_n(X) = X^{n+1}\alpha(X-1)^{n+1}$, ce qui amène encore une contradiction avec le degré de Z_n. Donc $Z_n(1) \neq 0$ dans ce cas, et la PROPOSITION 2 est démontrée.

REMARQUE 5. — Il résulte immédiatement de la normalité de la table de Padé de L_U que les Φ_n vérifient une relation de récurrence du type :

$$\Phi_{n+1}(X) = (A_n X + B_n)\Phi_n(X) + C_n \Phi_{n-1}(X) \tag{32}$$

où A_n, B_n, C_n peuvent s'expliciter facilement [5, th. 4.1].

5. Approximants de Padé de la série U-exponentielle

Pour obtenir le dénominateur du $n \times n$ approximant de Padé de $\exp_U X$, il suffit de construire une suite Ψ_n de polynômes orthogonaux pour $\langle\ ,\ \rangle_{\mathcal{U}}$. Le théorème suivant relie les U-racine à cette suite de polynômes orthogonaux :

THÉORÈME 5. — *Si* 1 *est U-racine d'ordre n de*

$$P_n(X) = X^n \sum_{k=0}^{n} a(n,k)X^k, \quad \text{avec} \quad a(n,n) \neq 0,$$

alors

$$\Psi_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \mathcal{U}^{n+k} a(n,k) X^k$$

est une suite de polynômes orthogonaux formels pour $\langle\ ,\ \rangle_{\mathcal{U}}$, et réciproquement.

Démonstration. — Pour $0 \leq m < n$, calculons :

$$\begin{aligned}\int_0^1 X^m \Psi_n(X)\,\mathrm{d}_{\mathcal{U}} X &= \sum_{k=0}^{n} \mathcal{U}^{n+k} a(n,k) \frac{1}{\mathcal{U}^{m+k+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{n} u_{n+k} u_{n+k-1} \cdots u_{m+k+2}\, a(n,k)\end{aligned}$$

(le produit des $n - m - 1$ termes consécutifs figurant dans cette somme étant égal à 1 si $m = n - 1$). Donc :

$$\int_0^1 X^m \Psi_n(X)\,\mathrm{d}_{\mathcal{U}} X = \partial_U^{n-m-1} P(1). \tag{33}$$

Le THÉORÈME 5 résulte directement de cette relation. $\square$

Le problème des U-racines étant bien résolu dans le cas où U est arithmético-géométrique (PROPOSITION 1), on obtient sous forme explicite la diagonale de la table de Padé de la série U-exponentielle dans ce cas :

THÉORÈME 6. — *Si U vérifie* (7) *et $q^k \neq 1$, pour tout $k \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, on a :*

$$Q_n(X) \exp_U X - P_n(X) = X^{2n+1} R_n(X),$$

avec :

$$(34)\quad \begin{cases} Q_n(X) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}_q q^{p(p-1)/2} \mathcal{U}^{2n-p} X^p, \\ P_n(X) = \displaystyle\sum_{m=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} (-1)^{n-m} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q q^{(n-m)(n-m-1)/2} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u_{n+m} u_{n+m-1} \cdots u_{k+1} X^{n+k-m} \\ R_n(X) = \dfrac{\mathcal{U}^n}{[n]_q!} X^{2n+1} \displaystyle\int_0^1 z^n (z-1)(z-q)\cdots(z-q^{n-1}), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (\delta_q^n \exp_U)\Big(\dfrac{zX}{q^n}\Big)\, \mathrm{d}_U z. \end{cases}$$

De plus, la table de Padé de $\exp_U X$ *est normale.*

Démonstration. — En vertu du THÉORÈME 5, de la PROPOSITION 1 et de la formule du q-binôme de Cauchy (3), on a :

$$\Psi_n(X) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}_q q^{p(p-1)/2} \mathcal{U}^{2n-p} X^{n-p},$$

ce qui amène Q_n et P_n grâce au THÉORÈME 1 (le terme « $k = 0$ » dans $P_n(X)$ provenant du fait que $L_{\mathcal{U}}(X) = \exp_U X - 1$).

Pour obtenir l'expression de R_n, on calcule

$$S_n(X) = X^{n+1} \int_0^1 \Phi_n(z) \exp_U(zX)\, \mathrm{d}_U z$$

grâce à des intégrations par parties successives. On observe d'abord que $S_n(X) = \gamma_n X^{2n+1} + \cdots$ avec $\gamma_n \neq 0$ en vertu de l'orthogonalité des Φ_n et de la PROPOSITION 2.

Appliquons la formule d'intégration par parties (THÉORÈME 2) avec $g(z) = \exp_U(zX) - 1$ et $f(z) = \Phi_n(z/q)$. On obtient :

$$\begin{aligned} X^{n+1} &\int_0^1 \Phi_n(z) \exp_U(zX)\, \mathrm{d}_U z \\ &= X^n \Phi_n\Big(\frac{1}{q}\Big)(\exp_U X - 1) \\ &\qquad - \frac{c}{q} X^n \int_0^1 (\delta_q \Phi_n)\Big(\frac{z}{q}\Big)(\exp_U(zX) - 1)\, \mathrm{d}_U z. \end{aligned}$$

On recommence en posant :

$$g(z) = \exp_U zX - \frac{zX}{u_1} - 1, \quad f(z) = (\delta_q \Phi_n)\Big(\frac{z}{q^2}\Big).$$

En répétant l'opération $(n+1)$ fois, la U-intégrale finit par s'annuler puisque $\deg \Phi_n = n$. On obtient

$$A_n(X) \exp_U X - B_n(X) = X^{n+1} \int_0^1 \Phi_n(z) \exp_U(zX) \, \mathrm{d}_U z,$$

où A_n et B_n sont des polynômes de degré n, avec

$$A_n(X) = \Phi_n\Big(\frac{1}{q}\Big) X^n + \cdots .$$

Puisque $S_n(0) \neq 0$, il y a unicité (à un facteur près) de l'approximant de Padé. On obtient donc, en utilisant la PROPOSITION 1 et en identifiant les termes de plus haut degré dans A_n et Q_n :

$$X^{2n+1} R_n(X) = \Big(\frac{-1}{c}\Big)^n q^{n(n+1)/2} \frac{\mathcal{U}^n}{[n]_q!} X^{n+1} \int_0^1 \Phi_n(z) \exp_U(zX) \, \mathrm{d}_U z.$$

Procédons alors comme dans le THÉORÈME 4. Posons :

$$T_n(X) = \frac{1}{X^n} \int_0^1 \Phi_n(z) \exp_U(zX) \, \mathrm{d}_U z. \tag{35}$$

En vertu de la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} T_n(qX) &= \frac{1}{(qX)^n} \int_0^1 \Phi_n(z) \exp_U(qzX) \, \mathrm{d}_U z \\ &= -\frac{c}{q^n} \cdot \frac{1}{X^{n-1}} \int_0^1 \partial_U^{n-1}\big(z^n H_n(z)\big) (\delta_q \exp_U)(zX) \, \mathrm{d}_U z. \end{aligned}$$

On recommence avec

$$V_n(X) = \frac{1}{X^{n-1}} \int_0^1 \partial_U^{n-1}\big(z^n H_n(z)\big) (\delta_q \exp_U)(zX) \, \mathrm{d}_U z$$

et on obtient $R_n(X)$ par récurrence. $\square$

REMARQUE 6. — On retrouve la fromule obtenue par R. WALLISSER [12] pour R_n dans le cas où $u_n = 1 + q + \cdots + q^{n-1}$ si, dans (35), on effectue des intégrations par parties successives suivant la formule :

$$\int_0^1 \delta_q f(z) g(z) \, \mathrm{d}_q z = \big[f(z) g(z)\big]_0^1 - \int_0^1 f(qz) \delta_q g(z) \, \mathrm{d}_q z,$$

en prenant $g(z) = \exp_q z$ et en utilisant le fait que

$$q \eta_q \delta_q = \delta_q \eta_q$$

avec $\eta_q f(z) = f(qz)$.

6. Majoration des U-intégrales dans le cas où U est arithmético-géométrique

Nous supposons dans ce paragraphe que $u_n = aq^n + b$, avec $|q| \neq 1$.

En vue des applications en théorie des nombres, nous montrons comment majorer $\mathfrak{S}_0^1 f(x,z)\,\mathrm{d}_U z$ lorsque $f \in K[z][[x]]$, $(K, |\ |)$ étant un corps valué (en pratique, $K = \mathbb{C}$ ou $K = \mathbb{Q}_p$ avec p premier).

Pour $R \in \mathbb{R}_+^*$ et $q \in K$, $|q| \neq 1$, on note $\mathcal{C}_0(R)$ l'ensemble des fonctions f définies dans

$$B(0,R) = \{z \in K\,;\ |z| < R\},$$

à valeurs dans K et *continues* en 0. La U-dérivée de $f \in \mathcal{C}_0(R)$ est définie sur $B(0, R|q|^{-1}) - \{0\}$ par :

$$\partial_U f(z) = \frac{af(qz) + bf(z) - (a+b)f(0)}{z}. \tag{36}$$

Lorsque f est analytique dans $B(0,R)$, il y a bien sûr coïncidence entre (36) et (8).

THÉORÈME 7. — *On suppose $|q| > 1$, $b \neq 0$ et $|a/b| \geq 1$. Alors, pour tout $f \in \mathcal{C}_0(R)$, il existe une unique fonction $F \in \mathcal{C}_0(R|q|)$ vérifiant :*

(a) $F(0) = 0$,

(b) *pour tout $z \in B(0,R) - \{0\}$,* $\partial_U F(z) = f(z)$.

Et on a :

$$F(z) = \frac{z}{aq}\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(-\frac{b}{aq}\Big)^n f\Big(\frac{z}{q^{n+1}}\Big). \tag{37}$$

Démonstration.

• Démontrons d'abord l'unicité. Soient F et G deux éléments de $\mathcal{C}_0(R|q|)$ vérifiant (a) et (b). En vertu de (36), pour tout $z \in B(0,R)-\{0\}$, on a alors :

$$aF(qz) + bF(z) = aG(qz) + bG(z).$$

Posons $H = F - G$; alors, pour tout $z \in B(0,R) - \{0\}$, on a :

$$aH(qz) = -bH(z).$$

Par suite, pour tout $z \in B(0, R|q|) - \{0\}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$H(z) = \Big(-\frac{b}{a}\Big)^n H\Big(\frac{z}{q^n}\Big).$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, puisque $|-b/a|^n \leq 1$ et $\lim_{n\to+\infty} z/q^n = 0$, on obtient $H(z) = 0$. □

• Montrons maintenant que la fonction F définie par (37) est bien dans $\mathcal{C}_0(R|q|)$ et vérifie (a) et (b). Soit $z \in B(0, R|q|)$. Puisque f appartient à $\mathcal{C}_0(R)$, il existe $M(z) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Big|f\Big(\frac{z}{q^{n+1}}\Big)\Big| \leq M(z) \quad \text{et} \quad \lim_{z \to 0} M(z) = 0.$$

La fonction F est donc définie sur $B(0, R|q|)$, vérifie $F(0) = 0$ et, pour tout $z \in B(0, R|q|)$, on a

$$\big|F(z)\big| \leq \Big|\frac{z}{aq}\Big| \cdot \frac{1}{1 - \big|\frac{b}{aq}\big|} M(z),$$

ce qui implique que F est continue en 0 (et même dérivable).

Calculons maintenant, pour tout $z \in B(0, R) - \{0\}$:

$$\begin{aligned} \partial_U F(z) &= \frac{1}{z}\Big(z \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(-\frac{b}{aq}\Big)^n f\Big(\frac{z}{q^n}\Big) + \frac{bz}{aq}\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(-\frac{b}{aq}\Big)^n f\Big(\frac{z}{q^{n+1}}\Big)\Big) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(-\frac{b}{aq}\Big)^n f\Big(\frac{z}{q^n}\Big) - \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(-\frac{b}{aq}\Big)^{n+1} f\Big(\frac{z}{q^{n+1}}\Big) \\ &= f(z), \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du théorème. □

REMARQUE 1. — Par la même méthode on obtient un résultat analogue lorsque $|a/b| \leq 1$ et $|q| < 1$. L'expression de $F(z)$ est alors :

$$F(z) = \frac{z}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{aq}{b}\Big)^n f(zq^n). \tag{38}$$

Cette dernière formule généralise celle donnée par J. THOMAE ([11], [7] et [8]), dans un cadre légèrement différent.

REMARQUE 2. — Si nous supposons f *analytique* au voisinage de 0, c'est-à-dire :

$$\forall z \in B(0, R), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \tag{39}$$

et si nous utilisons (37), nous obtenons immédiatement la jolie formule sommatoire suivante : si $|q| > 1$ et $|a/b| \geq 1$, si z appartient à $B(0, |q|R)$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{z^n}{aq^{n+1} + b} = \frac{1}{aq}\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(-\frac{b}{aq}\Big)^n f\Big(\frac{z}{q^{n+1}}\Big). \tag{40}$$

A titre d'exemple, nous utilisons maintenant le THÉORÈME 7 pour majorer le reste de l'approximant de Padé du U-logarithme (THÉORÈME 4) dans le cas où :

$$K = \mathbb{C}, \quad |q| > 1, \quad \left|\frac{a}{b}\right| \geq 1.$$

Pour $|x| \leq 1$, la fonction de la variable z

$$f(z,x) = \frac{z^n(1-z)(q-z)\cdots(q^{n-1}-z)}{(1-zx)(q-zx)\cdots(q^n-zx)}$$

est analytique dans $B(0,1)$. Donc

$$\left|\int_0^1 f(z,x)\,\mathrm{d}_U z\right| \leq \left|\frac{1}{aq}\right| \sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{b}{aq}\right|^n \left|f\Big(\frac{1}{q^{n+1}}, x\Big)\right|.$$

Mais pour $|z| \leq 1/|q|$ et $|x| \leq 1$, on a :

$$\left|f(z,x)\right| \leq \frac{|q|^{-n}|q|^{n(n-1)/2}(1+|q|^{-1})(1+|q|^{-2})\cdots(1+|q|^{-n})}{|q|^{n(n+1)/2}(1-|q|^{-1})(1-|q|^{-2})\cdots(1-|q|^{-n-1})}.$$

Posons :

$$\ell(q) = \prod_{j=1}^{+\infty} \frac{(1+|q|^{-j})^2}{(1-|q|^{-j})}.$$

On peut alors majorer le reste de l'approximant de Padé de $L_U(x)$ donné par le THÉORÈME 4, pour $u_n = aq^n + b$, $|a/b| \geq 1$, $|q| > 1$ et $|x| \leq 1$, par :

$$(41) \qquad \left|R_n(x)\right| \leq \frac{\ell(q)}{|aq| - |b|} |q|^{n(n-3)/2} |b|^n.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALLADI (K.) and ROBINSON (M.L.). — *Legendre Polynomials and Irrationality*, J. Reine Angew. Math., t. **318**, 1980, p. 137–155.

[2] BORWEIN (P.). — *Padé Approximants for the q-Elementary Functions*, Constr. Approx., t. **4**, 1988, p. 391–402.

[3] Borwein (P.). — *On the Irrationality of* $\sum(1/(q^n+r))$, J. Number Theory, t. **37**, 1991, p. 253–259.

[4] Brezinski (C.). — *Padé-type Approximation and General Orthogonal Polynomials.* — Birkhäuser, 1980.

[5] Brezinski (C.) and Van Iseghem (J.). — *Padé Approximations, Handbook of Numerical Analysis.* — P.G. Ciarlet and J.L. Lions ed., North Holland, 1992.

[6] Duverney (D.). — *U–Dérivation.* — Annales Fac. Sci. Toulouse, série 6, vol II, fasc. 3, 1993, p. 323–335.

[7] Exton (M.). — *q-Hypergeometric Functions and Applications*, Chichester, 1983.

[8] Gasper (G.) and Rahman (M.). — *Basic Hypergeometric Series.* — Cambridge University Press, 1990.

[9] Luke (Y.L.). — *The Special Functions and their Approximations.* — Academic Press, 1969.

[10] Padé (H.). — *Sur les développements en fractions continues de la fonction* $F(h,1,h',u)$ *et la généralisation de la théorie des fonctions sphériques*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. **141**, 1905, p. 819–821.

[11] Thomae (J.). — *Beiträge zur Theorie der durch die Heinesche Reine...*, J. Reine Angew. Math., t. **70**, 1869, p. 258–281.

[12] Wallisser (R.). — *Rationale Approximation des q-Analogons der Exponentialfunktion und Irrationalitätsaussagen für diese Funktion*, Archiv Math., t. **44**, 1985, p. 59–64.