BULLETIN DE LA S. M. F.

MAX BEZARD

Régularité L^p précisée des moyennes dans les équations de transport

Bulletin de la S. M. F., tome 122, n° 1 (1994), p. 29-76
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1994__122_1_29_0>

Bull. Soc. math. France,
122, 1994, p. 29–76.

RÉGULARITÉ L^p PRÉCISÉE DES MOYENNES DANS LES ÉQUATIONS DE TRANSPORT

PAR

MAX BEZARD (*)

RÉSUMÉ. — On s'intéresse à des versions précises pour la régularité des moyennes d'équations de transport, c'est-à-dire pour les moyennes en v de fonctions $f(x,v)$ pour lesquelles $(v\cdot\nabla_x)f$ possède une certaine régularité a priori. On améliore ainsi les résultats précédents de Di Perna-Lions-Meyer, en utilisant la théorie de Littlewood Paley, les espaces de Hardy pour la structure produit et l'interpolation complexe.

ABSTRACT. — We present precised version of regularity lemmas for velocity averages of solutions of transport equations $(v\cdot\nabla_x)f = g$, where some weak regularity assumption on g is made. We improve previous results of Di Perna-Lions-Meyer, using Littlewood-Paley theory, product Hardy spaces and complex interpolation.

Plan de l'article

(*) Texte reçu le 7 septembre 1992, révisé le 4 janvier 1993. Ce travail a été définitivement rédigé, pendant que l'auteur séjournait à l'Institute for Advanced Study, Princeton NJ 08540 USA, grâce à la grant DMS 9100 383.

M. BEZARD, Centre de Mathématiques, URA CNRS 169, École Polytechnique, 91128 Palaiseau et DRET, 32 Boulevard Victor, 75015 Paris (France).
Email : bezard@orphee.polytechnique.fr

Mots clés : opérateur de transport, opérateur de Calderòn-Zygmund vectoriel, espace de Hardy produit, décomposition de Littlewood-Paley.

Classification AMS : 35, 42.

1. Introduction

Une quantité appréciable de problèmes liés aux équations cinétiques, tant linéaires (équation de transport, équation de la neutronique) que non linéaires (équations de Fokker-Planck, de Boltzmann, systèmes de Vlasov-Poisson, de Vlasov-Maxwell), ont reçu récemment une solution, pour autant qu'on s'intéresse à l'existence globale en temps de solutions suffisamment faibles.

La caractéristique commune de tous ces travaux [7], [8], [9], [10] et [24] est de reposer principalement sur un outil récent : les lemmes de moyennisation.

Sous leur forme initiale, ces lemmes apparaissent d'abord dans le travail [24] de GOLSE-PERTHAME-SENTIS, avant d'être étendus — en collaboration avec P.L. LIONS — au cadre L^p dans [23].

D'autre part, dès 1987, P. GÉRARD [20] montrait la limitation de tels résultats en prouvant que le gain de régularité d'une demi-dérivée, dans le cadre L^2, est optimal.

Les travaux relatifs aux moyennes d'équations de transport prennent alors deux directions légèrement différentes : d'une part, en liaison avec les problèmes d'estimations L^2 sous-elliptiques, P. GÉRARD éclaircit dans [21] les liens profonds qui existent entre la compacité par compensation, devenue comme on sait un outil classique en théorie de l'homogénéisation et dans l'étude de systèmes hyperboliques non linéaires unidimensionnels, les lemmes de moyenne, et l'analyse 2-microlocale. D'autre part, pour des questions intervenant en physique des plasmas, autour des systèmes de Vlasov-Poisson et de Vlasov-Maxwell, R. DI PERNA et P.L. LIONS [8] ont été amenés à généraliser les situations où ce genre d'arguments est applicable dans le cadre hilbertien, puis, en collaboration avec Y. MEYER [11], les mêmes auteurs introduisent des méthodes d'analyse harmonique pour adapter leurs résultats au cadre L^p.

Le but de cette note est d'améliorer les résultats de [11] pour obtenir sur les moyennes des gains de régularité et d'intégrabilité qui, s'ils améliorent ce qui était connu, ne nous paraissent pourtant pas optimaux, laissant cette question ouverte à de futures investigations.

Au paragraphe 2, les résultats sont établis et comparés avec ceux de [11], au paragraphe 3, quelques rappels de théorie de Littlewood Paley et de théorie des espaces de Hardy sont donnés. Le lecteur pourra trouver que ces rappels sont un peu trop développés par rapport à l'usage qui en est fait ; on a simplement voulu montrer que l'outil clé de notre étude, c'est-à-dire la théorie des espaces de Hardy pour la structure produit, possède une théorie en tout point (ou presque) similaire à celle des espaces de Hardy classiques, justifiant leur utilisation par une souplesse d'emploi quasiment identique.

C'est dans cette utilisation judicieuse des espaces de Hardy — que les auteurs de [11] ne considéraient que comme une astuce technique permettant de deviner le choix de certaines décompositions — c'est dans cette utilisation donc que réside notre apport.

Les paragraphes 4 et 5 sont consacrés aux preuves des résultats annoncés au paragraphe II, dans les situations indépendantes du temps, et dépendantes du temps respectivement.

L'auteur tient à remercier G. DAVID pour ses suggestions, et les auditeurs de ses deux exposés sur ce sujet, à l'École Polytechnique en juin 1990 et à l'Université d'Orsay en octobre 1990, pour leurs remarques et questions, qui ont amené une simplification des arguments initiaux.

La rédaction finale de ce travail a été partiellement supportée par la Grant DMS 9100383.

2. Présentation des résultats

Notons (x,v) le point courant de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et considérons, sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, l'opérateur de transport défini par exemple sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, par

$$f(x,v) \mapsto (v \cdot \nabla_x) f(x \cdot v) = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial}{\partial x_j} f(x,v).$$

Le prototype des résultats de moyennisation est le suivant.

THÉORÈME 0 (cf. [23]). — *Soient $f(x,v)$ et $g(x,v)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Soit $\theta(v)$ donnée dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et considérons la moyenne*

$$F(x) = \int f(x,v)\theta(v)\,\mathrm{d}v.$$

Il existe une constante $C > 0$ telle que, si f et g satisfont l'équation de transport $(v \cdot \nabla_x) f = g$, alors F appartient à l'espace de Sobolev $H^{1/2}(\mathbb{R}^n)$ et vérifie :

$$\|F\|_{H^{1/2}} \leq C\big(\|f\|_{L^2} + \|g\|_{L^2}\big).$$

Preuve. — On renvoie le lecteur à l'article original [20]. Contentons-nous simplement de rappeler que l'argument essentiel consiste à estimer $\mathrm{vol}\{\xi \in \mathbb{R}^n\,;\ |(v \cdot \xi)| < \varepsilon,\ v \in \operatorname{supp}\theta\}$ lorsque ε tend vers 0 et de voir que cette grandeur est $\mathcal{O}(\varepsilon^{1/2})$. $\square$

Le cas L^p nous intéresse :

THÉORÈME 1. — *Si $f(x,v)$ et $g(x,v)$ sont dans $L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq 2$, si θ est une fonction donnée de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, on considère la moyenne $F(x) = \int f(x,v)\theta(v)\,\mathrm{d}v$. Si f et g satisfont à l'équation de transport $(v \cdot \nabla_x)f = g$, alors F appartient à l'espace de Sobolev $W^{s,p}$ où $s = p'^{-1} = 1 - p^{-1}$ et vérifie l'inégalité $\|F\|_{W^{s,p}} \leq C(\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p})$ où la constante C ne dépend que de θ, n, et p.*

En réalité, notre preuve du THÉORÈME 1 repose sur un argument plus précis. Afin d'en donner l'esprit, donnons en une formulation volontairement biaisée.

SEMI-THÉORÈME 1′. — *Si $f(x,v)$ et $g(x,v)$ appartiennent à l'espace $L^1(\mathrm{d}v\,;\ \mathfrak{H}^1(\mathbb{R}_v \times \mathbb{R}^{n-1}_{v\perp}))$ et si $(v \cdot \nabla)f = g$, alors $F = \int f(x,v)\theta(v)\,\mathrm{d}v$ appartient à $\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^n)$.*

Ici, $\mathfrak{H}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1})$ désigne l'espace de Hardy produit et $\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace de Hardy usuel ; le néologisme $\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}_v \times \mathbb{R}^{n-1}_{v\perp})$ vise à exprimer qu'à $v \in \mathbb{R}^n$ fixé, la structure produit considérée se fait en $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}v \oplus (\mathbb{R}v)^\perp$.

Dans [8], l'étude du système de Vlasov-Maxwell faisait apparaître la généralisation suivante.

THÉORÈME 0′. — *Si $f(x,v)$ et $g(x,v)$ sont dans $L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, si $m \in \mathbb{R}_+$, si θ est donnée dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et si on considère la moyenne $F(x) = \int f(x,v)\theta(v)\,\mathrm{d}v$ sous l'hypothèse $(v\cdot\nabla_x)f = (1-\Delta_v)^{m/2}g$, alors F est dans l'espace de Sobolev $H^{\frac{1}{2(1+m)}}$ et satisfait l'inégalité :*

$$\|F\|_{H^{1/(2(1+m))}} \leq C\big(\|f\|_{L^2} + \|g\|_{L^2}\big).$$

Dans le cadre L^p nous obtenons :

THÉORÈME 2. — *Si $f(x,v)$, $g(x,v)$ sont dans $L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq 2$, si $m \in \mathbb{R}_+$, si θ est dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et si $(v \cdot \nabla_x)f = (1 - \Delta_v)^{m/2}g$, alors la moyenne $F(x) = \int f(x,v)\theta(v)\,\mathrm{d}v$ est dans $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ où*

$$s = \frac{1}{(1+m)p'}, \quad \frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p}$$

et satisfait l'inégalité :

$$\|F\|_{W^{s,p}} \leq C\big(\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}\big).$$

REMARQUE. — Dans [11], les conclusions donnaient F dans l'espace de Besov $B^s_{p,2}$ ce qui est moins bon mais assez proche.

En généralisant un peu plus, on a :

THÉORÈME 3. — *Si $f(x,v), g(x,v)$ sont dans $L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq 2$, si $m \in \mathbb{R}_+$ et $\tau \in [0,1[$ si θ est dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et si*

$$(v \cdot \nabla x) f = (1-\Delta_x)^{\tau/2}(1-\Delta_v)^{m/2} g,$$

alors la moyenne $F(x) = \int f(x,v)\theta(v)\,\mathrm{d}v$ est dans $W^{s,p}$ où

$$s = \frac{1-\tau}{(1+m)p'}, \quad \frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p}.$$

En outre, F satisfait l'inégalité :

$$\|F\|_{W^{s,p}} \leq C\big(\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}\big).$$

Ici encore, les auteurs précédents obtenaient $F \in B^s_{p,2}$.

THÉORÈME 4. — *Si $f(x,v), g(x,v)$ sont respectivement dans $L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ et $L^q(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ avec $1 < p \leq 2$, $1 < q \leq 2$, si $m \in \mathbb{R}_+$ et $\tau \in [0,1[$, si θ est dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et si on considère la moyenne $F(x) = \int f(x,v)\theta(v)\,\mathrm{d}v$, sous l'hypothèse*

$$(v \cdot \nabla_x) f = (1-\Delta_x)^{\tau/2}(1-\Delta_v)^{m/2} g$$

avec $1 - \tau + n(p^{-1} - q^{-1}) \geq 0$, la fonction F appartient à $W^{s,r}$ et satisfait l'inégalité

$$\|F\|_{W^{s,r}} \leq C\big(\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^q}\big)$$

avec

$$s = \frac{1-\tau}{p'}\Big(\frac{1}{p'} + \frac{1}{q} + m\Big)^{-1}, \quad \frac{1}{r} = \Big(\frac{1}{q} + \frac{m}{p}\Big)\Big(\frac{1}{p'} + \frac{1}{q} + m\Big)^{-1}.$$

THÉORÈME 5. — *Si $f(x,v)$ et $g(x,v)$ sont dans $L^q(\mathrm{d}v; L^p(\mathrm{d}x))$, $1 < q \leq p \leq 2$, si $m \in \mathbb{R}_+$ et $\tau \in [0,1[$, si θ est dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors sous l'hypothèse $(v \cdot \nabla_x) f = (1-\Delta_x)^{\tau/2}(1-\Delta_v)^{m/2} g$, la moyenne $F(x) = \int f(x,v)\theta(v)\,\mathrm{d}v$ appartient à l'espace de Sobolev $W^{s,q}$ où $s = (1-\tau)(p'(m+1))^{-1}$ et $\|F\|_{W^{s,q}} \leq C(\|f\|_{L^q(L^p)} + \|g\|_{L^q(L^p)})$.*

Tous les résultats précédents possèdent un analogue dans la situation dépendant du temps : (t,x,v) est alors le point courant de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, et on considère l'opérateur de transport

$$f(t,x,v) \mapsto (\partial_t + v \cdot \nabla_x) f(t,x,v) = \Big(\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\Big)(t,x,v).$$

THÉORÈME 6. — *Si $f(t,x,v)$ et $g(t,x,v)$ sont dans $L^p(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$, si $1<p\le 2$, si $m\in\mathbb{R}_+$ et $\tau\in[0,1[$, si θ est donnée dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et si on considère la moyenne $F(t,x)=\int f(t,x,v)\theta(v)\,\mathrm{d}v$ alors, sous l'hypothèse*

$$(\partial_t+v\cdot\nabla_x)f=(1-\Delta_{x,t})^{\tau/2}(1-\Delta_v)^{m/2}g,$$

F appartient à l'espace de Sobolev $W^{s,p}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ avec

$$s=\frac{1-\tau}{p'(1+m)},\quad \frac{1}{p'}=1-\frac{1}{p}$$

et vérifie $\|F\|_{W^{s,p}}\le C(\|f\|_{L^p}+\|g\|_{L^p})$.

THÉORÈME 7. — *Si $f(t,x,v)$ et $g(t,x,v)$ sont dans $L^p(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ et $L^q(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$, si $1<p,\ q\le 2$ avec*

$$(\partial_t+v\cdot\nabla)f=(1-\Delta_v)^{m/2}(1-\Delta_{x,t})^{\tau/2}g$$

et $1-\tau+(n+1)(p^{-1}-q^{-1})\ge 0$, $m\in\mathbb{R}_+$, $\tau\in[0,1[$, alors la moyenne $F(t,x)=\int f(t,x,v)\theta(v)\,\mathrm{d}v$ appartient à $W^{s,r}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ pour tout $\theta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ avec

$$s=\frac{1-\tau}{p'}\Big[\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}+m\Big]^{-1},\quad \frac{1}{r}=\Big[\frac{1}{q}+\frac{m}{p}\Big]\Big[\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}+m\Big]^{-1}.$$

THÉORÈME 8. — *Si $f(t,x,v)$ et $g(t,x,v)$ sont dans $L^q(\mathrm{d}v,L^p(\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x))$ où $1<q\le p\le 2$, si $m\in\mathbb{R}_+$ et $\tau\in[0,1[$, si $\theta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et si*

$$(\partial_t+v\cdot\nabla)f=(1-\Delta_v)^{m/2}(1-\Delta_{x,t})^{\tau/2}g$$

alors la moyenne $F(t,x)=\int f(t,x,v)\theta(v)\,\mathrm{d}v$ appartient à l'espace de Sobolev $W^{s,q}$ où $s=(1-\tau)/[p'(1+m)]$.

REMARQUE. — Les résultats ci-dessus, comme le notaient déjà les auteurs de [11], s'étendent à d'autres opérateurs $a(v)\cdot\nabla_x$ et $\partial_t+a(v)\cdot\nabla_x$: ainsi le cas relativiste $a(v)=v(1+|v|^2)^{-1/2}$.

3. Espaces de Hardy et théorie de Littlewood-Paley

Commençons par rappeler quelques faits bien connus, relatifs à l'espace de Hardy $\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^n)$, et qui trouvent leur genèse dans le travail désormais classique de FEFFERMAN et STEIN [19]. La différence majeure que nous introduisons ici consiste à considérer des fonctions à valeurs dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ arbitraire. Le lecteur pourra s'assurer, par la relecture des arguments de [19] ou du livre de TORCHINSKY [29], que les preuves des résultats que nous énonçons s'appliquent directement au cas hilbertien choisi.

Définition 3.1.

(i) L'espace de Hardy sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est donné par

$$\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^n;\mathcal{H}) = \{f \in L^1(\mathbb{R}^n;\mathcal{H}) \mid \forall j = 1\cdots n,\ R_j f \in L^1(\mathbb{R}^n;\mathcal{H})\}$$

où les R_j désignent les transformées de Riesz :

$$R_j f(x) = \text{v.p.} \int \frac{y_j}{|y|^{n+1}} f(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

(ii) L'espace BMO sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est donné par

$$\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n;\mathcal{H}) = \{f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n;\mathcal{H}) \mid f^\sharp \in L^\infty(\mathbb{R}^n)\}$$

où la fonction $f^\sharp$ de Fefferman est donnée par

$$f^\sharp(x) = \sup_{Q\ni x} \frac{1}{|Q|}\int_Q \|f - f_Q\|_{\mathcal{H}}\,\mathrm{d}y, \quad f_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q f(y)\,\mathrm{d}y$$

(dans la définition de la fonction $f^\sharp$, le sup est pris sur tous les cubes qui contiennent x).

Il est bien connu que $\mathfrak{H}^1$ peut être caractérisé de multiples manières : rappelons-en ici quelques unes pour mieux voir le parallèle avec la structure produit ci-après.

• Pour $t > 0$, $P_t(x) = c_n t(t^2 + |x|^2)^{-(n+1)/2}$ désigne le noyau de Poisson et la constante c_n est fixée de sorte que pour tout $t > 0$, on ait $\int P_t(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

• Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ fonction telle que $\int \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$, on pose $\varphi_t(x) = t^{-n}\varphi(x/t)$ pour $t > 0$.

• Pour $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ non nulle telle que $\int \psi(x)\,\mathrm{d}x = 0$, on pose $\psi_t(x) = t^{-n}\psi(x/t)$ pour $t > 0$,.

• Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on note Γ_x le domaine d'approche non tangentielle défini sur $\mathbb{R}^{n+1}_+$ par

$$\Gamma_x = \big\{(y,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+ \,;\ |x-y| < t\big\}.$$

• Pour $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathcal{H})$ distribution tempérée à valeurs dans $\mathcal{H}$, on définit :

$$\begin{aligned} P_t f(x) &= (P_t * f)(x), \quad P_\varphi f(t,x) = (\varphi_t * f)(x),\\ \nabla P_t f(x) &= \Big(\frac{\partial}{\partial t}P_t f, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}P_t f\Big),\\ \nabla P_\varphi f(x) &= \Big(\frac{\partial}{\partial t}P_\varphi f, \frac{\partial}{\partial x_1}P_\varphi f, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}P_\varphi f\Big). \end{aligned}$$

Muni de ces objets de base, on définit les fonctions maximales non tangentielles

$$N_p f(x) = \sup_{(y,t)\in\Gamma_x} \big\|P_t f(y)\big\|_{\mathcal{H}}, \quad N_\varphi f(x) = \sup_{(y,t)\in\Gamma_x} \big\|P_\varphi f(t,y)\big\|_{\mathcal{H}},$$

puis les fonctions d'aire

$$\begin{aligned} A_p f(x) &= \Big(\int_{\Gamma_x} \|\nabla P_t f\|^2_{\mathcal{H}}\,\mathrm{d}y\,\frac{\mathrm{d}t}{t^{n-1}}\Big)^{1/2},\\ A_\varphi f(x) &= \Big(\int_{\Gamma_x} \|\nabla P_\varphi\|^2_{\mathcal{H}}\,\mathrm{d}y\,\frac{\mathrm{d}t}{t^{n-1}}\Big)^{1/2},\\ \widetilde{A}_\psi f(x) &= \Big(\int_{\Gamma_x} \|\psi_t * f\|^2_{\mathcal{H}}\,\mathrm{d}y\,\frac{\mathrm{d}t}{t^{n+1}}\Big)^{1/2} \end{aligned}$$

et enfin les fonctions g :

$$\begin{aligned} g_p(x) &= \Big(\int_0^\infty \|\nabla P_t f\|^2_{\mathcal{H}}\,t\,\mathrm{d}t\Big)^{1/2},\\ g_\varphi(x) &= \Big(\int_0^\infty \|\nabla P_\varphi\|^2_{\mathcal{H}}\,t\,\mathrm{d}t\Big)^{1/2},\\ \tilde{g}_\psi(x) &= \Big(\int_0^\infty \|\psi_t * f\|^2_{\mathcal{H}}\frac{\mathrm{d}t}{t}\Big)^{1/2}. \end{aligned}$$

La théorie classique se résume dans la proposition suivante.

PROPOSITION 3.2.

(i) $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n;\mathcal{H})$ *est le dual de* $\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^n;\mathcal{H})$.

(ii) $\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^n;\mathcal{H})$ *est caractérisé par l'un des énoncés équivalents suivants :*

$$\begin{array}{lll} A_p f \in L^1(\mathbb{R}^n), & A_\varphi f \in L^1(\mathbb{R}^n), & \widetilde{A}_\psi f \in L^1(\mathbb{R}^n), \\ g_p f \in L^1(\mathbb{R}^n), & g_\varphi f \in L^1(\mathbb{R}^n), & \tilde{g}_\psi f \in L^1(\mathbb{R}^n), \\ N_p f \in L^1(\mathbb{R}^n), & N_\varphi f \in L^1(\mathbb{R}^n), & f \in \mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^n;\mathcal{H}). \end{array}$$

De plus, chaque norme ainsi définie est équivalente à la norme $\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^n;\mathcal{H})$ *définie par* $\|f\|_{\mathfrak{H}^1} = \sum_{j=0}^{n} \|R_j f\|_{L^1(\mathcal{H})}$ *où* $R_0 = \mathrm{id}$.

Preuve. — On peut consulter l'article de FEFFERMAN-STEIN [19] et le livre de TORCHINSKY [29]. □

Considérons maintenant deux espaces de Hilbert $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ et $\widehat{K}(\xi)$ une fonction bornée, à valeurs dans l'espace des opérateurs linéaires continus de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}_2$, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ qui vérifie les estimations :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ \exists C_\alpha,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \big\|\partial^\alpha \widehat{K}(\xi)\big\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)} \le C_\alpha |\xi|^{-|\alpha|}.$$

Soit alors $K(x)$ la transformée de Fourier inverse de K, de classe C^∞ en dehors de 0. On définit le multiplicateur de Fourier associé à $\widehat{K}$ en posant

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_1), \quad Tf(x) = \mathrm{v.p.} \int K(y) f(x-y)\,\mathrm{d}y$$

c'est-à-dire :

$$Tf = \mathcal{F}^{-1}\big(\widehat{K}(\xi)\hat{f}(\xi)\big).$$

PROPOSITION 3.3. — *T s'étend en un opérateur borné de $L^p(\mathbb{R}^n;\mathcal{H}_1)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n;\mathcal{H}_2)$ pour $1 < p < \infty$, de $\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^n;\mathcal{H}_1)$ dans $\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^n;\mathcal{H}_2)$ et de $L^\infty(\mathbb{R}^n;\mathcal{H}_1)$ dans $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n;\mathcal{H}_2)$.*

Preuve. — Il s'agit de reprendre dans le cadre hilbertien des résultats dont la preuve se trouve par exemple dans le livre de TORCHINSKY [29]. La démonstration s'applique mutatis mutandis. □

Soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ une fonction dont le support est contenu dans la couronne $\{\xi\,;\ \frac{1}{2} \le |\xi| \le 2\}$ et qui vaut identiquement 1 au voisinage de la sphère unité $\{\xi\,;\ |\xi| = 1\}$. Supposons de plus que :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \sum_{-\infty}^{\infty} \psi^2(2^{-p}\xi) = 1.$$

Pour $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n;\mathcal{H}_1)$, on définit $\psi(2^{-j}D)f$ par :

$$\mathcal{F}\big(\psi(2^{-j}D)f\big) = \psi(2^{-j}\xi)\hat{f}(\xi).$$

Le simple fait d'avoir considéré un cadre hilbertien dans la proposition précédente permet le passage aisé à des énoncés faisant intervenir une fonction g discrète plutôt que les versions continues, comme dans l'énoncé suivant.

COROLLAIRE 3.4. — *Il existe une constante positive C qui vérifie, pour toute distribution tempérée $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$:*

$$f \in \mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^n) \iff \Big\{\sum_{-\infty}^{\infty} \big|\psi(2^{-j}D)f\big|^2\Big\}^{1/2} \in L^1(\mathbb{R}^n),$$

$$\frac{1}{C}\|f\|_{\mathfrak{H}^1} \leq \Big\|\Big\{\sum_{-\infty}^{\infty} \big|\psi(2^{-j}D)f\big|^2\Big\}^{1/2}\Big\|_{L^1} \leq C\|f\|_{\mathfrak{H}^1}.$$

Preuve. — Il suffit bien entendu de vérifier l'inégalité lorsque $f \in \mathcal{S}$. Pour cela, nous utilisons le résultat suivant, dû à PEETRE [27] :

$$(*)\quad \left\{\begin{array}{l}\textit{Si } \widetilde{\psi} \textit{ est une autre fonction qui vérifie } \operatorname{supp}\widetilde{\psi} \subset \{\xi\,;\ \tfrac12 \leq |\xi| \leq 2\} \\ \textit{et } \widetilde{\psi} = 1 \textit{ près de } \{\xi\,;\ |\xi| = 1\} \textit{ alors, pour tout } p \geq 1, \textit{ il existe} \\ \textit{une constante } C \textit{ telle que pour tout } f \textit{ on ait :} \\ \\ \Big\|\Big\{\sum_{j\in\mathbb{Z}} \big|\widetilde{\psi}(2^{-j}D)f\big|^2\Big\}^{1/2}\Big\|_{L^p} \leq C\Big\|\Big\{\sum_{j\in\mathbb{Z}} \big|\psi(2^{-j}D)f\big|^2\Big\}^{1/2}\Big\|_{L^p}.\end{array}\right.$$

On constate aisément que $g \mapsto Tg = (\psi(2^{-j}D)g)_{j\in\mathbb{Z}}$ est un opérateur de Caldèron-Zygmund à valeurs vectorielles dont le symbole vérifie les estimées standards. La proposition implique donc que si $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors $(\psi(2^{-j}D)g)_{j\in\mathbb{Z}}$ appartient à $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n;\ell^2(\mathbb{Z}))$.

Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ avec $\|g\|_{L^\infty} \leq 1$, alors :

$$\begin{aligned}\Big|\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\Big| &= \Big|\int \sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi_j(2^{-j}D)f(x)\psi(2^{-j}D)g(x)\,\mathrm{d}x\Big| \\ &\leq C\big\|\psi(2^{-j}D)f\big\|_{\mathfrak{H}^1(\ell^2)}\,\big\|\psi(2^{-j}D)g\big\|_{\mathrm{BMO}(\ell^2)} \\ &\leq C\sum_{i=0}^{n}\Big\|\Big\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}\big|R_i\psi(2^{-j}D)f\big|^2\Big\}^{1/2}\Big\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

De la même manière, pour $k = 1, \dots, n$:

$$\Big|\int R_k f(x) g(x)\,\mathrm{d}x\Big| \le C \sum_{i=0}^{n} \Big\| \Big\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}} \big|R_j R_k \psi(2^{-j}D) f\big|^2 \Big\}^{1/2} \Big\|_{L^1}.$$

Or $R_i R_k \psi(\xi)$ satisfait les mêmes propriétés de support que ψ. Par le lemme de Peetre (*) et en passant à la borne supérieure en $g \in L^\infty$, on obtient donc :

$$\|f\|_{\mathfrak{H}^1} \le C \Big\| \Big\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}} \big|\psi(2^{-j}D) f\big|^2 \Big\}^{1/2} \Big\|_{L^1}.$$

L'inégalité réciproque résulte immédiatement de la proposition : l'application $f \mapsto Tf$ est continue de $\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^n; \ell^2)$. $\square$

Nous pouvons maintenant utiliser cette version discrète de la fonction g pour définir quelques espaces classiques en théorie de Littlewood-Paley.

DÉFINITION 3.5. — L'espace de Triebel-Lizorkin homogène $\dot F^s_{p,q}$, où $s \in \mathbb{R}$, $p \in [1, \infty[$ et $q \in]0, \infty[$ est défini par

$$\dot F^s_{pq} = \Big\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)\ ;\ \Big[\sum_{j\in\mathbb{Z}} \big|2^{js}\psi(2^{-j}D) u\big|^q \Big]^{1/q} \in L^p \Big\}$$

et on note

$$\|u\|_{\dot F^s_{pq}} = \Big\| \Big\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}} \big|2^{js}\psi(2^{-j}D) u\big|^q \Big\}^{1/q} \Big\|_{L^p}.$$

Exemples. — La théorie de Littlewood-Paley classique montre que $\dot F^0_{p,2} = L^p$ pour $1 < p < \infty$. Il est par ailleurs facile de voir que l'on a $\dot F^s_{22} = (-\Delta)^{-s/2} L^2$ et $\dot F^s_{p,2} = (-\Delta)^{-s/2} L^p$ si $1 < p < \infty$. Le COROLLAIRE 3.4 montre qu'en fait $\mathfrak{H}^1 = \dot F^0_{1,2}$.

Sous cette forme, les espaces $\dot F^s_{pq}$ sont faciles à utiliser pour la technique d'interpolation complexe de Calderòn.

PROPOSITION 3.6. — *Si $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $p_1, p_2 \in [1, \infty[$, $q_1, q_2 \in \mathbb{R}^*_+$ et $\theta \in]0, 1[$, alors*

$$\big[\dot F^{s_1}_{p_1 q_1}, \dot F^{s_2}_{p_1 q_2}\big]_{[\theta]} = \dot F^s_{pq} \quad \textit{où} \quad \begin{cases} s = (1-\theta) s_1 + \theta s_2, \\ \dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_1} + \dfrac{\theta}{p_2}, \\ \dfrac{1}{q} = \dfrac{1-\theta}{q_1} + \dfrac{\theta}{q_2}. \end{cases}$$

Preuve. — Pour la définition de l'interpolation complexe dans les treillis de Banach, on a consulté [1] et [30]. Le cas général que nous énonçons provient de [30]. □

Le cas plus simple $[\mathfrak{H}^1, L^p]_{[\theta]} = L^q$ est dû à FEFFERMAN-STEIN [19].

Concluons en rappelant que pour $s > 0$, l'espace de Sobolev usuel $W^{s,p} = (1-\Delta)^{-s/2}L^p$ est caractérisé par : si $s > 0$ et $1 < p < \infty$, alors

$$f \in W^{s,p} \iff f \in L^p \cap \dot{F}^s_{p2} \iff f \in L^p \text{ et } (-\Delta)^{s/2} f \in L^p$$

et que sur $W^{s,p}$, on a deux normes équivalentes :

$$\|(1-\Delta)^{s/2} f\|_{L^p} \sim \|f\|_{L^p} + \|(-\Delta)^{s/2} f\|_{L^p}.$$

La preuve de ce résultat se trouve bien entendu dans la monographie de STEIN [28].

Après avoir rappelé quelques points classiques relatifs aux espaces de Hardy, venons-en à résumer quelques résultats plus récents pour les espaces de Hardy adaptés à la structure produit, et dont la théorie est essentiellement due à R. FEFFERMAN [3]–[6], [13]–[19].

De même que précédemment, nous travaillerons avec des espaces de fonctions à valeurs dans un espace de Hilbert; nous utiliserons une caractérisation de type Littlewood-Paley et les preuves de R. FEFFERMAN, comme dans le cas classique, s'adaptent « mutatis-mutandis ».

DÉFINITION 3.7. — Sur $\mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}$, $m_i \in \mathbb{N}^*$, on définit les transformées de Riesz R^i_j pour $i = 1, 2$ et $j = 0 \cdots m_i$. Si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert et si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}; \mathcal{H})$, on pose :

$$R^i_0 f = f\,;$$

$$R^1_j f(x^1, x^2) = \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^{m_1}} \frac{x^1_j - y^1_j}{|x^1 - y^1|^{m_1+1}} f(y^1, x^2)\,\mathrm{d}y^1, \quad j = 1, \ldots, m_1\,;$$

$$R^2_j f(x^1, x^2) = \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}^{m_2}} \frac{x^2_j - y^2_j}{|x^2 - y^2|^{m_2+1}} f(x^1, y^2)\,\mathrm{d}y^2, \quad j = 1, \ldots, m_2.$$

Un rapide coup d'œil aux transformées de Fourier permet, comme dans le cas classique, de s'assurer de la continuité L^2 de telles transformations.

DÉFINITION 3.8. — L'espace de Hardy produit sur $\mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}$ à valeurs dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est donné par :

$$\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}; \mathcal{H}) = \big\{ f \in L^1(\mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}, \mathcal{H})\,; \quad \forall j_i = 0, \ldots, m_i,\ R^1_{j_1} R^2_{j_2} f \in L^1 \big\}.$$

On définit évidemment la norme de $\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{m_1}\times\mathbb{R}^{m_2};\mathcal{H})$ par :

$$\|f\|_{\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{m_1}\times\mathbb{R}^{m_2};\mathcal{H})}=\sum_{\substack{j_i=0\cdots m_i\\ i=1,2}}\|R^1_{j_1}R^2_{j_2}f\|_{L^1(\mathbb{R}^{m_1+m_2};\mathcal{H})}.$$

Tout comme dans le cas des espaces de Hardy classiques, nous disposons de différentes caractérisations dues à GUNDY-STEIN [25] et FEFFERMAN [14]. Notons $P_t=P_{t_1,t_2}$ le noyau de Poisson sur $\mathbb{R}^{m_1}\times\mathbb{R}^{m_2}$ donné par

$$P_t(x^1,x^2)=\frac{c_{m_1}c_{m_2}t_1t_2}{(t_1^2+|x^1|^2)^{(m_1+1)/2}\,(t_2^2+|x^2|^2)^{(m_2+1)/2}}$$

si $(t,x^1,x^2)\in(\mathbb{R}_+^*)^2\times\mathbb{R}^{m_1}\times\mathbb{R}^{m_2}$.

Pour $i=1,2$, soient $\varphi_i(x^i)$ deux fonctions dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{m_i})$ telles que $\int\varphi_i(x^i)\,\mathrm{d}x^i=1$ et posons, pour $(t,x)\in(\mathbb{R}_+^*)^2\times\mathbb{R}^{m_1+m_2}$:

$$\Phi_t(x^1,x^2)=t_1^{-m_1}t_2^{-m_2}\varphi_1\Big(\frac{x^1}{t^1}\Big)\varphi_2\Big(\frac{x^2}{t^2}\Big).$$

Pour $i=1,2$, soient $\psi_i(x^i)$ deux fonctions dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{m_i})$, telles que $\psi_i\not\equiv 0$, $\int\psi_i(x^i)\,\mathrm{d}x^i=0$ et posons, pour $(t,x)\in(\mathbb{R}_+^x)^2\times\mathbb{R}^{m_1+m_2}$:

$$\Psi_t(x^1,x^2)=t_1^{-m_1}t_2^{-m_2}\psi_1\Big(\frac{x^1}{t^1}\Big)\psi_2\Big(\frac{x^2}{t^2}\Big).$$

Pour $x\in\mathbb{R}^{m_1+m_2}$, notonc Γ_x le domaine d'approche non tangentielle

$$\Gamma_x=\big\{(t,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2\times\mathbb{R}^{m_1}\times\mathbb{R}^{m_2}\ ;\ |x^i-y^i|<t_i\,,\ i=1,2\big\}.$$

Suivant les définitions des objets de la théorie des espaces de Hardy à un paramètre, on pose, pour $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{m_1}\times\mathbb{R}^{m_2};\mathcal{H})$:

$$P_tf(x^1,x^2)=(P_t*f)(x^1,x^2),\quad P_\Phi f(t,x)=(\Phi_t*f)(x^1,x^2),$$

$$N_Pf(x)=\sup_{(t,y)\in\Gamma_x}\big\|P_tf(y)\big\|_{\mathcal{H}},\qquad N_\Phi f(x)=\sup_{(t,y)\in\Gamma_x}\big\|P_\Phi(t,y^1,y^2)\big\|_{\mathcal{H}}.$$

Notons par ailleurs :

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}P_tf=\Big(&\frac{\partial}{\partial t_1}P_tf,\frac{\partial}{\partial x^1}P_tf,\frac{\partial}{\partial t_2}P_tf,\frac{\partial}{\partial x^2}P_tf,\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}P_tf,\\&\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial x^2}P_tf,\frac{\partial^2}{\partial t_2\partial x^1}P_tf,\frac{\partial^2}{\partial x^1\partial x^2}P_tf\Big),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}P_\Phi f=\Big(&\frac{\partial}{\partial t_1}P_\Phi f,\frac{\partial}{\partial x^1}P_\Phi f,\frac{\partial}{\partial t_2}P_\Phi f,\frac{\partial}{\partial x^2},\\&P_\Phi f,\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}P_\Phi f,\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial x^2}P_\Phi f,\frac{\partial^2}{\partial t_2\partial x^1}P_\Phi f,\frac{\partial^2}{\partial x^1\partial x^2}P_\Phi f\Big).\end{aligned}$$

Cela permet d'introduire les fonctions d'aire

$$A_P f(x) = \Big\{ \iint_{\Gamma_x} \big\| \operatorname{grad} P_t f(y) \big\|^2_{\mathcal{H}} \frac{\mathrm{d}t_1 \,\mathrm{d}y^1}{t_1^{m_1-1}} \frac{\mathrm{d}t_2 \,\mathrm{d}y^2}{t_2^{m_2-1}} \Big\}^{1/2},$$

$$A_\Phi f(x) = \Big\{ \iint_{\Gamma_x} \big\| \operatorname{grad} P_\Phi f(t,y) \big\|^2_{\mathcal{H}} \frac{\mathrm{d}t_1 \,\mathrm{d}y^1}{t_1^{m_1-1}} \frac{\mathrm{d}t_2 \,\mathrm{d}y^2}{t_2^{m_2-1}} \Big\}^{1/2},$$

$$\widetilde{A}_\Psi f(x) = \Big\{ \iint_{\Gamma_x} \big\| (\Psi_t * f)(y) \big\|^2_{\mathcal{H}} \frac{\mathrm{d}t_1 \,\mathrm{d}y^1}{t_1^{m_1+1}} \frac{\mathrm{d}t_2 \,\mathrm{d}y^2}{t_2^{m_2+1}} \Big\}^{1/2}$$

et les fonctions g :

$$g_P f(x) = \Big\{ \int_0^\infty \int_0^\infty \big\| \operatorname{grad} P_t f \big\|^2_{\mathcal{H}} t_1 \,\mathrm{d}t_1 t_2 \,\mathrm{d}t_2 \Big\}^{1/2},$$

$$g_\Phi f(x) = \Big\{ \int_0^\infty \int_0^\infty \big\| \operatorname{grad} P_\Phi f \big\|^2_{\mathcal{H}} t_1 \,\mathrm{d}t_1 t_2 \,\mathrm{d}t_2 \Big\}^{1/2},$$

$$\tilde{g}_\Psi f(x) = \Big\{ \int_0^\infty \int_0^\infty \big\| (\Psi_t * f)(x) \big\|^2_{\mathcal{H}} \frac{\mathrm{d}t_1}{t_1} \frac{\mathrm{d}t_2}{t_2} \Big\}^{1/2}.$$

La différence notable entre la structure produit et la structure usuelle réside dans la définition de $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2})$, dual de $\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2})$.

THÉORÈME 3.9 (GUNDY-FEFFERMAN-STEIN). — $f \in \mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}\,; \mathcal{H})$ *est caractérisé par les énoncés équivalents suivants :*

$$\begin{array}{lll} A_P f \in L^1(\mathbb{R}^{m_1+m_2}), & A_\Phi f \in L^1(\mathbb{R}^{m_1+m_2}), & \widetilde{A}_\psi f \in L^1(\mathbb{R}^{m_1+m_2}), \\ g_P f \in L^1(\mathbb{R}^{m_1+m_2}), & g_\Phi f \in L^1(\mathbb{R}^{m_1+m_2}), & \tilde{g}_\Psi f \in L^1(\mathbb{R}^{m_1+m_2}), \\ N_P f \in L^1(\mathbb{R}^{m_1+m_2}), & N_\Phi f \in L^1(\mathbb{R}^{m_1+m_2}), & f \in \mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}; \mathcal{H}) \end{array}$$

et toutes les normes induites sont équivalentes.

Preuve. — La preuve de tous ces énoncés est disséminée dans la littérature [2]–[6], [13]–[19]. □

De même que dans le cas isotrope, la structure produit pour les espaces de Hardy autorise l'utilisation de multiplicateurs à valeurs dans les opérateurs linéaires continus d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}_1$ dans un autre $\mathcal{H}_2$. Soit $\widehat{K}(\xi^1, \xi^2)$ définie sur $\mathbb{R}^{m_1+m_2} \setminus ((\{0\} \times \mathbb{R}^{m_2}) \cup (\mathbb{R}^{m_1} \times \{0\}))$ et qui vérifie :

$$\forall \alpha_i \in \mathbb{N}^{m_i},\ \forall \xi \neq 0, \quad \big\| \partial^{\alpha_1}_{\xi^1} \partial^{\alpha_2}_{\xi^2} \widehat{K}(\xi^1, \xi^2) \big\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)} \leq C_\alpha |\xi^1|^{-|\alpha_1|}\, |\xi^2|^{-|\alpha_2|}.$$

Soit K la transformée de Fourier inverse de $\widehat{K}$ et définissons l'opérateur d'intégrale singulière par :

$$T : f \mapsto Tf = K * f\,;$$
$$(K * f)(x^1, x^2) = \text{v.p.} \iint K(x^1 - y^1, x^2 - y^2) f(y^1, y^2)\, \mathrm{d}y^1\, \mathrm{d}y^2.$$

Proposition 3.10. — *T s'étend en un opérateur linéaire continu :*
- *de $\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}; \mathcal{H}_1)$ dans $\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}; \mathcal{H}_2)$,*
- *de $L^\infty(\mathbb{R}^{m_1+m_2}; \mathcal{H}_1)$ dans $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}; \mathcal{H}_2)$.*

Preuve. — Il s'agit d'un théorème de Fefferman [17] et la relecture de la preuve nous assure de sa validité dans le cadre hilbertien. □

Remarque. — Bien que nous n'ayons pas explicité clairement $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}; \mathcal{H}_2)$, il suffit pour ce qui suit, de savoir que le dual de $\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}; \mathcal{H})$ est précisément $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}, \mathcal{H})$

Corollaire 3.11. — *Pour $i = 1, 2$, soient $\psi_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{m_i})$, des fonctions dont le support est contenu dans la couronne $\{\frac{1}{2} \le |\xi^i| \le 2\}$ et qui valent 1 au voisinage de la sphère $\{|\xi^i| = 1\}$. Supposons que $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_i^2(2^{-j}\xi^i) = 1$ pour tout $\xi^i \neq 0$. Alors pour $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{m_1+m_2})$, on a la caractérisation suivante :*

$$\begin{aligned} &f \in \mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}) \\ &\quad\Longleftrightarrow \Big\{ \sum_{j_1, j_2 \in \mathbb{Z}} \big|\psi_1(2^{-j_1} D_1)\, \psi_2(2^{-j_2} D_2) f\big|^2 \Big\}^{1/2} \in L^1(\mathbb{R}^{m_1+m_2}) \end{aligned}$$

et il existe C telle que pour tout $f \in \mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2})$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} \|f\|_{\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2})} &\le \Big\| \Big\{ \sum_{j_1, j_2 \in \mathbb{Z}} \big|\psi_1(2^{-j_1} D_1) \psi_2(2^{-j_2} D_2) f\big|^2 \Big\}^{1/2} \Big\|_{L^1} \\ &\le C \|f\|_{\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2})}. \end{aligned}$$

Preuve. — C'est mot pour mot la preuve utilisée dans le cas isotrope. En particulier l'analogue du lemme de Peetre (*) est encore valide. □

Il ne nous reste plus qu'à énoncer le théorème d'interpolation complexe dont nous nous servirons dans la suite :

Proposition 3.12. — *Si $\theta \in \,]0, 1[$ et si $p^{-1} = 1 - \frac{1}{2}\theta$, on a :*

$$\Big[\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_1}, \mathcal{H}); L^2(\mathbb{R}^{m_1+m_2}, \mathcal{H})\Big]_{[\theta]} = L^p(\mathbb{R}^{m_1+m_2}; \mathcal{H}).$$

Preuve. — Il s'agit du théorème de Lin [26]. Pour être parfaitement précis, il faut signaler que la preuve de ce résultat n'est faite que dans le cas $\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. Néanmoins, la transposition à notre cadre multidimensionnel et hilbertien se fait automatiquement à partir du moment où l'on réalise que le point clé est l'utilisation d'une fonction

$$g(f) = \Big\{ \iint_{(\mathbb{R}_+^*)^2} \big|(\psi_{1,t_1} \otimes \psi_{2,t_2}) * f\big|^2 \frac{\mathrm{d}t_1}{t_1}\frac{\mathrm{d}t_2}{t_2} \Big\}^{1/2}$$

dont les propriétés ne dépendent ni des dimensions $m_1 = m_2 = 1$ ni du cadre réel (au lieu d'hilbertien) choisi. $\square$

4. La situation stationnaire

Revenons à notre préoccupation initiale : les lemmes de moyenne. Soit $\psi \in C_0^\infty$ une fonction à support dans la couronne $\{\xi\,;\ \frac{1}{2} \le |\xi| \le 2\}$, qui vaut identiquement 1 sur un voisinage de la sphère $\{\xi\,;\ |\xi| = 1\}$ et qui est positive et radiale. Supposons de plus que :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus 0, \quad \sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi^2(2^{-j}\xi) = 1.$$

Soit $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ une fonction à support dans la boule $\{v\,;\ |v| \le V\}$ où $V > 0$ est fixé. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ une fonction radiale à support dans la boule $\{x\,;\ |x| \le 1\}$ et qui vaut identiquement 1 sur le voisinage $\{x\,;\ |x| < \frac{1}{2}\}$ de 0. Considérons $f \in L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $1 < p \le 2$, et supposons que f et g satisfont l'équation $(v.\nabla_x)f = g$ au sens des distributions. Soit $F(x) = \int f(x,v)\theta(v)\,\mathrm{d}v$.

THÉORÈME. — *Si $p^{-1} = 1 - \frac{1}{2}\sigma$, où $\sigma \in\,]0,1[$, alors $F \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, où $s = \frac{1}{2}\sigma$ et $\|F\|_{W^{s,p}} \le C(\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p})$, la constante C ne dépendant que de θ et p.*

Preuve. — Commençons par réécrire F (à la mesure de la sphère unité près) :

$$F(x) = \int_0^V \int_{S^{n-1}} f(x,\rho\omega)\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega.$$

En passant à la transformée de Fourier, il vient

$$\widehat{F}(\xi) = \int_0^V \int_{S^{n-1}} \hat{f}(\xi,\rho\omega)\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega,$$

où $\hat{f}(\xi,\rho\omega)$ désigne la transformée de Fourier partielle en x. En utilisant la partition de l'unité à la Littlewood Paley, on écrit :

$$\widehat{F}(\xi)=\int_0^V\int_{S^{n-1}}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\hat{f}(\xi,\rho\omega)\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}\psi^2(2^{-j}\xi)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega.$$

On peut alors utiliser l'information $(v\cdot\nabla_x)f=g$ dans la zone où l'opérateur $(v\cdot\nabla_x)$ est microlocalement elliptique ; pour cela on écrit :

$$\begin{aligned}\widehat{F}(\xi)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_0^V\int_{S^{n-1}}&\hat{f}(\xi,\rho\omega)\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}\\&\Big\{\varphi\Big(2^j\frac{\rho(\xi\cdot\omega)}{|\xi|}\Big)+(1-\varphi)\Big(2^j\frac{\rho(\xi\cdot\omega)}{|\xi|}\Big)\Big\}\psi^2(2^{-j}\xi)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega.\end{aligned}$$

Posons alors $\chi(s)=s^{-1}(1-\varphi(s))$, de sorte que $\chi\equiv 0$ au voisinage de 0 et $\chi\sim s^{-1}$ au voisinage de l'infini :

$$\begin{aligned}\widehat{F}(\xi)=&\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_0^V\int_{S^{n-1}}\varphi\Big(2^j\frac{\rho(\xi\cdot\omega)}{|\xi|}\Big)\psi(2^{-j}\xi)\ \psi(2^{-j}\xi)\\&\qquad\qquad\qquad\hat{f}(\xi,\rho\omega)\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega\\&+\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_0^V\int_{S^{n-1}}\chi\Big(2^j\frac{\rho(\xi.\omega)}{|\xi|}\Big)\frac{2^j}{|\xi|}\psi(2^{-j}\xi)\psi(2^{-j}\xi)\\&\qquad\qquad\qquad\hat{g}(\xi,\rho\omega)\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega.\end{aligned}$$

On reconnaît, dans chacun des termes de ces deux sommes, des multiplicateurs de Fourier de symboles $\varphi(\lambda(\xi\cdot\omega))\psi(\mu\xi)$ et $\chi(\lambda(\xi\cdot\omega))\widetilde{\psi}(\mu\xi)$, où $\lambda\mu>0$, et bien entendu, nous désirons appliquer ici les résultats si longuement rappelés au paragraphe 2. Malheureusement, disposer d'un espace de Hardy pour la structure produit qui dépend — même de manière très régulière — du paramètre $\omega\in S^{n-1}$ est assez peu recommandable et l'interpolation de tels espaces avec les espaces L^p usuels semble pour le moins délicate. Pour contourner cette difficulté, nous introduisons un changement de variables au niveau L^p.

Pour $\omega\in S^{n-1}$, introduisons les coordonnées polaires avec axe azimuthal suivant la direction de ω. A un tel jeu de cordonnées est associée — de manière canonique — une isométrie positive R_ω qui transforme le demi-axe $\mathbb{R}_+\omega$ en le demi-axe engendré par le n-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. De plus, R_ω dépend continûment de $\omega\in S^{n-1}$ (et même C^∞). Remarquons que dans le cas usuel $\mathbb{R}^3$, on ne fait rien d'autre que de reprendre la très classique construction des angles d'Euler. On peut alors définir l'opérateur :

$$\begin{aligned}\mathcal{R} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^* \times S^{n-1}) &\to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^* \times S^{n-1})\\ u(x, \rho\omega) &\mapsto u(R_\omega^{-1} x, \rho\omega).\end{aligned}$$

Il est tout à fait évident que $\mathcal{R}$ s'étend en une isométrie sur tous les $L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^* \times S^{n-1})$ pour $1 \le p \le \infty$.

Posons maintenant $f_* = \mathcal{R}f$ et $g_* = \mathcal{R}f$, et réécrivons $\widehat{F}$ en fonction de f_* et g_* :

$$\begin{aligned}\widehat{F}(\xi) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_0^V \int_{S^{n-1}} \varphi\Big(2^j \frac{\rho}{|\xi|}\xi_n\Big) \psi(2^{-j}\xi)\psi(2^{-j}\xi)& \\ \hat{f}_*(\xi, \rho\omega)\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega& \\ + \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_0^V \int_{S^{n-1}} \chi\Big(2^j \frac{\rho}{|\xi|}\xi_n\Big) \frac{2^j}{|\xi|} \psi(2^{-j}\xi)\psi(2^{-j}\xi)& \\ \hat{g}_*(\xi, \rho\omega)\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega&.\end{aligned}$$

On a donc ramené la situation initiale au cas plus simple où les multiplicateurs de Fourier considérés respectent la structure produit de $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. L'utilisation des résultats du paragraphe 3 se fait via le lemme suivant.

LEMME 4.1. — *Pour $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, les opérateurs*

$$f_* \mapsto \mathcal{F}^{-1}\Big\{\sum_{j\in\mathbb{Z}} \varphi\Big(2^j \frac{\rho}{|\xi|}\xi_n\Big)\psi(2^{-j}\xi)\psi(2^{-j}\xi)\hat{f}_*(\xi)\Big\},$$

$$g_* \mapsto \mathcal{F}^{-1}\Big\{\sum_{j\in\mathbb{Z}} \chi\Big(2^j \frac{\rho}{|\xi|}\xi_n\Big)\frac{2^j}{|\xi|}\psi(2^{-j}\xi)\psi(2^{-j}\xi)\hat{g}_*(\xi)\Big\}$$

sont bornés, uniformément en ρ, de $\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R})$ dans $\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^n)$.

Remarquons tout d'abord que le symbole

$$\widehat{K}(\xi) = \big(\widehat{K}_j(\xi)\big)_{j\in\mathbb{Z}} = \big(\psi(2^{-j}\xi)\big)_{j\in\mathbb{Z}}$$

vérifie, grâce à la condition de support sur ψ,

$$\big\|\partial_\xi^\alpha \widehat{K}\big\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R};\ell^2(\mathbb{Z}))} \le C_\alpha |\xi|^{-\alpha} .$$

Il induit donc, grâce à la proposition, un opérateur continu :

$$\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}) \to \mathfrak{H}^1\big(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}; \ell^2(\mathbb{Z})\big).$$

Considérons alors les multiplicateurs :

$$M_1(\xi', \xi^n) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Diag}\big(M_1^j(\xi', \xi^n)\big)_{j\in\mathbb{Z}} = \operatorname{Diag}\Big\{\varphi\Big(2^j \frac{\rho}{|\xi|}\xi_n\Big)\psi(2^{-j}\xi)\Big\}_{j\in\mathbb{Z}},$$

$$M_2(\xi', \xi^n) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Diag}\big(M_2^j(\xi', \xi^n)\big)_{j\in\mathbb{Z}} = \operatorname{Diag}\Big\{\chi\Big(2^j \frac{\rho}{|\xi|}\xi_n\Big)\psi(2^{-j}\xi)\frac{2^j}{|\xi|}\Big\}_{j\in\mathbb{Z}}.$$

Les multiplicateurs M_1 et M_2 sont alors compatibles avec la structure produit. En effet, il suffit de prouver, par changement d'échelle, que si λ, μ sont dans $\mathbb{R}_+^*$ alors $\varphi(\lambda\xi_n/|\xi|)\psi(\mu\xi)$ et $\chi(\lambda\xi_n/|\xi|)\psi(\mu\xi)/(\mu|\xi|)$ satisfont les estimées de la proposition, uniformément en λ et μ.

Les conditions de support rendent la vérification triviale dans le cas de $\varphi(\lambda\xi_n/|\xi|)\psi(\mu\xi)$. Le comportement asymptotique de χ et la condition de support sur ψ rendent la vérification à peine moins directe dans le cas de $\chi(\lambda\xi_n/|\xi|)\psi(\mu\xi)/(\mu|\xi|)$. Il en résulte que

$$f_* \mapsto \big(M_1^j(D', D_n)\psi(2^{-j}D)f_*\big)_{j\in\mathbb{Z}},$$

$$g_* \mapsto \big(M_2^j(D', D^n)\psi(2^j D)g_*\big)_{j\in\mathbb{Z}}$$

sont des opérateurs bornés de $\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R})$ dans $\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R};\ell^2(\mathbb{Z}))$. D'autre part, l'injection $\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R};\ell^2(\mathbb{Z}))\hookrightarrow\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^n;\ell^2(\mathbb{Z}))$ est évidente et donc il existe C telle que pour tous $f_*, g_* \in \mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R})$, on ait :

$$\sum_{k=0}^n \Big|\Big\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}\big|M_j^1(D', D_n)R_k\psi(2^{-j}D)f_*\big|^2\Big\}^{1/2}\Big|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le C|f_*|_{\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R})},$$

$$\sum_{k=0}^n \Big|\Big\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}\big|M_j^2(D', D_w)R_k\psi(2^{-j}D)g_*\big|^2\Big\}^{1/2}\Big|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le C|g_*|_{\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{m-1}\times\mathbb{R})}.$$

Avant de pouvoir conclure la preuve du THÉORÈME 1, nous avons besoin d'éclaircir le cas de la situation L^2 qui est classique maintenant.

LEMME 4.2. — *Les opérateurs*

$$f_* \mapsto \mathcal{F}^{-1}\Big\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_0^V\int_{S^{n-1}}\varphi\Big(2^j\frac{\rho}{|\xi|}\xi_n\Big)\psi^2(2^{-j}\xi)\hat{f}_*(\xi,\rho\omega)\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega\Big\},$$

$$g_* \mapsto \mathcal{F}^{-1}\Big\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_0^V\int_{S^{n-1}}\chi\Big(2^j\frac{\rho}{|\xi|}\xi_n\Big)\frac{2^j}{|\xi|}\psi^2(2^{-j}\xi)\hat{g}_*(\xi,\rho\omega)\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega\Big\}$$

sont des opérateurs continus de $L^2(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+^*\times S^{n-1}, \rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}x)$ dans $H^{1/2}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. — Il s'agit de reprendre sous une forme légèrement différente l'analyse de P. GÉRARD [20] ou de DI PERNA-LIONS [8] : on calcule alors la norme L^2 de chacun des blocs :

$$h_j(\xi) = \int_0^V\int_{S^{n-1}} \chi\Big(2^j \frac{\rho}{|\xi|}\xi_n\Big)\frac{2^j}{|\xi|}\psi(2^{-j}\xi)\hat{g}_*(\xi,\rho\omega)\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega,$$

$$\ell_j(\xi) = \int_0^V\int_{S^{n-1}} \varphi\Big(2^j \frac{\rho}{|\xi|}\xi_n\Big)\psi(2^{-j}\xi)\hat{f}_*(\xi,\rho\omega)\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega.$$

Il suffit de se limiter au cas où $j \geq 0$, les autres termes étant automatiquement bornés L^2. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et un changement de variable on obtient aisément que $\|h_j\|_{L^2}$ et $\|\ell_j\|_{L^2}$ sont majorés par $\mathrm{C^{te}}\,2^{-j/2}$, ce qui permet de conclure, grâce à la caractérisation des espaces de Sobolev en théorie de Littlewood-Paley. □

Fin de la preuve du théorème 1. — Posons maintenant $g_{*j} = \psi(2^{-j}D)g_*$ et $f_{*j} = \psi(2^{-j}D)f_*$. En intégrant l'estimation fournie par le lemme, on voit que

$$f_* \mapsto \int_0^V\int_{S^{n-1}} \big(M_1^j(D',D_n)\psi(2^{-j}D)f_{*j}(x,\rho\omega)\big)_{j\in\mathbb{Z}}\,\rho^{n-1}\theta(\rho\omega)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega,$$

$$g_* \mapsto \int_0^V\int_{S^{n-1}} \big(M_2^j(D',D_n)\psi(2^{-j}D)g_{*j}(x,\rho\omega)\big)_{j\in\mathbb{Z}}\,\rho^{n-1}\theta(\rho\omega)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega$$

sont deux opérateurs bornés de $L^1(\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega;\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}))$ dans $\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^n;\ell^2(\mathbb{Z}))$. En particulier on obtient l'estimation :

$$\begin{aligned}
&\bigg\|\Big\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}\Big|\int_0^V\int_{S^{n-1}} M_1^j(D',D_n)\psi^2(2^{-j}D)f_*(x,\rho\omega)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \theta(\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho d\omega\Big|^2\Big\}^{1/2}\bigg\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\\
&\leq C\big\|\psi(2^{-j}D)f_*(x,\rho\omega)\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}\big\|_{L^1(\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega;\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R};\ell^2(\mathbb{Z})))}\\
&\leq C\int_0^V\int_{S^{n-1}}|\theta(\rho\omega)|\rho^{n-1}\sum_{k_1,k_2}\bigg\|\Big\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}\big|R^1_{k_1}R^2_{k_2}\psi(2^{-j}D)f_*\big|^2\Big\}^{1/2}\bigg\|_{L^1}\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega.
\end{aligned}$$

Utilisons pour conclure un argument d'interpolation complexe (cf. BERGH-LÖFSTRÖM [1]) : si $\mathrm{d}\mu$ est une mesure de Borel positive on a :

$$\begin{aligned}
&\Big[L^1\big(\mathrm{d}\mu;\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R})\big),L^2\big(\mathrm{d}\mu;L^2(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R})\big)\Big]_{[\theta]}\\
&\qquad\qquad = L^{1/(1-\theta/2)}\Big(\mathrm{d}\mu;\big[\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}),L^2(\mathbb{R}^n)\big]_{[\theta]}\Big)
\end{aligned}$$

et donc, en utilisant le théorème d'interpolation de Lin (THÉORÈME 3.12) :

$$[\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}), L^2]_{[\theta]} = L^{1/(1-\theta/2)}$$

on obtient, si $p^{-1} = 1 - \frac{1}{2}\theta$:

$$\Big[L^1\big(\mathrm{d}\mu; \mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R})\big), L^2\big(\mathrm{d}\mu; L^2(\mathbb{R}^n)\big)\Big]_{[\theta]} = L^p(\mathrm{d}\mu\otimes\mathrm{d}x).$$

Par ailleurs (cf. TRIEBEL [30]) :

$$H^{1/2} = W^{1/2,2} = F^{1/2}_{2,2} \hookrightarrow \dot F^{1/2}_{2,2}, \quad [\dot F^0_{1,2}, \dot F^{1/2}_{2,2}]_{[\theta]} = \dot F^{\theta/2}_{1/(1-\theta/2),2}.$$

D'autre part, il est immédiat de constater que l'opérateur de moyennisation agit continûment de $L^p(\mathbb{R}^*_+\times S^{n-1}\times\mathbb{R}^n)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $1\le p\le\infty$. Comme

$$W^{\frac12\theta,1/(1-\frac12\theta)} = F^{\frac12\theta}_{1/(1-\frac12\theta)} = \dot F^{\frac12\theta}_{1/(1-\frac12\theta),2}\cap L^{1/(1-\frac12\theta)}, \quad \theta\in\,]0,1[,$$

on obtient que $F\in W^{s,p}$ et $\|F\|_{W^{s,p}} \le C\{\|f_*\|_{L^p} + \|g_*\|_{L^p}\}$.

Il suffit de rappeler que $\mathcal{R}f = f_*$ et $\mathcal{R}g = g_*$ où $\mathcal{R}$ est une isométrie sur les $L^p, 1\le p\le\infty$, pour achever la preuve du THÉORÈME 1. $\square$

Preuve du théorème 2. — On adapte assez aisément le schéma de preuve du THÉORÈME 1 pour démontrer le THÉORÈME 2. Ce faisant, deux points changent : d'une part, on s'intéresse à un gain de régularité, de sorte que les basses fréquences, qui ne contribuent pas à ce gain, vont être traitées différemment des hautes fréquences; d'autre part, pour nous adapter à un gain de régularité différent, nous changeons le facteur d'échelle dans la fonction φ. Ces deux manipulations font apparaître la décomposition suivante :

$$\begin{aligned}\widehat F(\xi) &= \sum_{j<0}\int \hat f(\xi,v)\theta(v)\psi^2(2^{-j}\xi)\,\mathrm{d}v\\ &+\sum_{j\ge0}\int \varphi\Big(2^{\frac{j}{1+m}}\frac{v\cdot\xi}{|\xi|}\Big)\psi^2(2^{-j}\xi)\hat f(\xi,v)\theta(v)\,\mathrm{d}v\\ &+\sum_{j\ge0}\int \chi\Big(2^{\frac{j}{1+m}}\frac{v\cdot\xi}{|\xi|}\Big)\psi^2(2^{-j}\xi)\\ &\qquad\qquad \frac{2^{\frac{j}{1+m}}}{|\xi|}\big[(1-\Delta_v)^{m/2}\hat g(\xi,v)\big]\theta(v)\,\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

Traitons, pour commencer, le cas où m est un entier pair ; le cas général en résultera par interpolation complexe. $(1-\Delta_v)^{m/2}$ apparaît alors comme un opérateur différentiel et on peut intégrer par parties dans les termes faisant intervenir g :

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\geq 0}\int \theta(v)\chi\Big(2^{\frac{j}{1+m}}\frac{v\cdot\xi}{|\xi|}\Big)\frac{2^{\frac{j}{1+m}}}{|\xi|}\psi^2(2^{-j}\xi)(1-\Delta_v)^{m/2}\hat{g}(\xi,v)\,\mathrm{d}v\\
&=\sum_{j\geq 0}\sum_{|\alpha+\beta|\leq m} d(m,\alpha)\int \partial_v^\alpha\theta(v)\partial_v^\beta\Big\{\chi\Big(2^{\frac{j}{1+m}}\frac{v\cdot\xi}{|\xi|}\Big)\Big\}\frac{2^{\frac{j}{1+m}}}{|\xi|}\\
&\qquad\qquad\psi^2(2^{-j}\xi)\hat{g}(\xi,v)\,\mathrm{d}v\\
&=\sum_{j\geq 0}\sum_{|\alpha+\beta|\leq m} d(m,\alpha)\int \partial_v^\alpha\theta(v)\chi_\beta\Big(2^{\frac{j}{1+m}}\frac{v\cdot\xi}{|\xi|}\Big)\frac{\xi^\beta 2^{\frac{j(1+|\beta|)}{1+m}}}{|\xi|^{|\beta|+1}}\\
&\qquad\qquad\psi^2(2^{-j}\xi)\hat{g}(\xi,u)\,\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

où les $d(m,\alpha)$ sont des constantes et les χ_β sont des fonctions C^∞, nulles au voisinage de 0 et telles que $|\chi_\beta(s)|\leq C_\beta(1+|s|)^{-|\beta|-1}$.

Passons alors en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned}
\widehat{F}(\xi)&=\sum_{j<0}\int \hat{f}(\xi,v)\theta(v)\psi^2(2^{-j}\xi)\,\mathrm{d}v\\
&+\sum_{j\geq 0}\int_0^V\!\!\int_{S^{n-1}}\varphi\Big(2^{\frac{j}{1+m}}\rho\frac{\omega\cdot\xi}{|\xi|}\Big)\psi(2^{-j}\xi)\psi(2^{-j}\xi)\\
&\qquad\qquad\hat{f}(\xi,\rho\omega)\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega\\
&+\sum_{\substack{j\geq 0\\|\alpha+\beta|\leq m}}\int_0^V\!\!\int_{S^{n-1}} d(m,\alpha)\partial_v^\alpha\theta(\rho\omega)\chi_\beta\Big(2^{\frac{j}{1+m}}\rho\frac{\omega\cdot\xi}{|\xi|}\Big)\\
&\qquad\qquad\frac{\xi^\beta\, 2^{\frac{j(1+|\beta|)}{1+m}}}{|\xi|^{1+|\beta|}}\psi(2^{-j}\xi)\psi(2^{-j}\xi)\hat{g}(\xi,\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega.
\end{aligned}$$

Comme précédemment, introduisons $f_*=\mathcal{R}f$ et $g_*=\mathcal{R}g$: une telle opération modifie les termes faisant intervenir $\hat{g}(\xi,\rho\omega)$ car les polynômes ξ^β doivent eux-aussi être transformés. Il n'est pas difficile de voir que le multiplicateur $\xi^\beta/|\xi|^\beta$ se transforme en un multiplicateur $m_{\beta,\omega}(\xi)$, pour chaque $\omega\in S^{n-1}$, tel que $m_{\beta,\omega}(\xi)$ satisfait les estimations isotropes usuelles (où les constantes $C_{\gamma,\beta}$ ne dépendent pas de $\omega\in S^{n-1}$) :

$$\forall\gamma\in\mathbb{N}^{m_1+m_2},\quad \big|D_\xi^\gamma m_{\beta,\omega}(\xi)\big|\leq C_{\gamma\cdot\beta}|\xi|^{-|\gamma|}.$$

Il en résulte que $m_{\beta,\omega}(D)$ est un opérateur d'intégrale singulière borné indépendamment de ω ; il en va donc de même pour ses dilatés $m_{\beta\omega}(\lambda D)$ où $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned}\widehat{F}(\xi) &= \sum_{j<0} \int \hat{f}(\xi, v)\theta(v)\psi^2(2^{-j}\xi)\,\mathrm{d}v \\ &\quad + \sum_{j\geq 0} \int_0^V \int_{S^{n-1}} \varphi\Big(2^{\frac{j}{1+m}}\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)\psi(2^{-j}\xi)\psi(2^{-j}\xi) \\ &\qquad\qquad \hat{f}_*(\xi, \rho\omega)\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega \\ &\quad + \sum_{|\alpha+\beta|\leq m} d(m,\alpha) \sum_{j\geq 0} \int_0^V \int_{S^{n-1}} \chi_\beta\Big(2^{\frac{j}{1+m}}\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big) m_{\beta,\omega}(\xi) \\ &\qquad\qquad \frac{2^{j\frac{1+|\beta|}{1+m}}}{|\xi|}\psi(2^{-j}\xi)\psi(2^{-j}\xi)\hat{g}_*(\xi,\rho\omega)\partial_v^\alpha\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega.\end{aligned}$$

Comme dans le cas du THÉORÈME 1, on est ramené à l'étude de multiplicateurs pour la structure produit, ce qui se fait via deux lemmes, analogues aux LEMMES 4.1 et 4.2 précédents.

LEMME 4.3. — *Pour $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\omega \in S^{n-1}$ fixés, les opérateurs*

$$f_* \mapsto \mathcal{F}^{-1}\Big\{\sum_{j\geq 0} \varphi\Big(2^{\frac{j}{1+m}}\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)\psi(2^{-j}\xi)\psi(2^{-j}\xi)\hat{f}_*(\xi)\Big\},$$

$$g_* \mapsto \mathcal{F}^{-1}\Big\{\sum_{j\geq 0} \chi_\beta\Big(2^{\frac{j}{1+m}}\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big) m_{\beta,\omega}(\xi)\frac{2^{j\frac{1+|\beta|}{1+m}}}{|\xi|}\psi(2^{-j}\xi)\psi(2^{-j}\xi)\hat{g}_*(\xi)\Big\}$$

sont bornés, uniformément en ρ et ω, de $\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R})$ dans $\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. — Grâce à la condition de support sur ψ, le symbole

$$\widehat{K}(\xi) = \big(\widehat{K}_j(\xi)\big)_{j\in\mathbb{N}} = \big(\psi(2^{-j}\xi)\big)_{j\in\mathbb{N}}$$

vérifie l'estimation $\big\|\partial_\xi^\alpha \widehat{K}(\xi)\big\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R};\ell^2(\mathbb{N}))} \leq C_\alpha|\xi|^{-\alpha}$. Il induit alors un opérateur continu $\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}) \to \mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R};\ell^2(\mathbb{N}))$ Considérons les multiplicateurs :

$$M^1(\xi',\xi_n) = \mathrm{Diag}\big(M_j'(\xi',\xi_n)\big)_{j\in\mathbb{N}} = \mathrm{Diag}\Big\{\varphi\Big(2^{\frac{j}{1+m}}\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)\psi(2^{-j}\xi)\Big\}_{j\in\mathbb{N}},$$

$$\begin{aligned}M_\omega^2(\xi',\xi_n) &= \mathrm{Diag}\big(M_{j\omega}^2(\xi',\xi_n)\big)_{j\in\mathbb{N}} \\ &= \mathrm{Diag}\Big\{\chi_\beta\Big(2^{\frac{j}{1+m}}\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)m_{\beta,\omega}(\xi)\frac{2^{j\frac{1+|\beta|}{1+m}}}{|\xi|}\psi(2^{-j}\xi)\Big\}_{j\in\mathbb{N}}.\end{aligned}$$

Ces multiplicateurs sont compatibles avec la structure produit. En effet, le multiplicateur M_1 est analysé comme au lemme ; d'autre part, puisque l'on s'est restreint à $j \geq 0$, le multiplicateur M_2 revient à étudier

$$\chi_\beta\Big(2^{\frac{j}{1+m}}\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)m_{\beta\cdot\omega}(\xi)\psi(2^{-j}\xi),$$

car $2^{j(1+|\beta|)/(1+m)}/|\xi| \leq 1$. Comme précédemment, ce multiplicateur s'écrit $\chi_\beta(\lambda\xi_n/|\xi|)\psi_{\beta,\omega}(\mu\xi)$ où $\psi_{\beta,\omega}$ vérifie des estimations du même type que ψ, et $\lambda, \mu > 0$. On obtient donc :

$$f_* \mapsto \big(M_j^1(D', D_n)\psi(2^{-j}D)f_*\big)_{j\in\mathbb{N}},$$

$$g_* \mapsto \big(M_{j,\omega}^2(D', D_n)\psi(2^{-j}D)g_*\big)_{j\in\mathbb{N}}$$

qui sont des opérateurs linéaires continus de

$$\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}) \quad \text{dans} \quad \mathfrak{H}^1\big(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R};\ell^2(\mathbb{N})\big).$$

D'autre part, l'injection $\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R};\ell^2(\mathbb{N})) \hookrightarrow \mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^n;\ell^2(\mathbb{N}))$ est évidente. Il existe donc C telle que pour tous $f_*, g_* \in \mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R})$

$$\sum_{k=0}^n \Big|\Big\{\sum_{j\in\mathbb{N}}\big|M_j^1(D', D_*)R_k\psi(2^{-j}D)f_*\big|^2\Big\}^{12}\Big|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f_*\|_{\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R})},$$

$$\sum_{k=0}^n \Big|\Big\{\sum_{j\in\mathbb{N}}\big|M_{j,\omega}^2(D', D_*)R_k\psi(2^{-j}D)g_*\big|^2\Big\}^{1/2}\Big|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C\|g_*\|_{\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R})}.$$

Avant de pouvoir conclure la preuve du THÉORÈME 2, il reste à examiner la situation L^2.

LEMME 4.4. — *Les opérateurs*

$$f_* \mapsto \mathcal{F}^{-1}\Big\{\sum_{j\in\mathbb{N}}\int_0^V\int_{S^{n-1}}\varphi\Big(2^{\frac{j}{1+m}}\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)\psi^2(2^{-j}\xi)\hat{f}_*(\xi,\rho\omega)\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega\Big\},$$

$$g_* \mapsto \mathcal{F}^{-1}\Big\{\sum_{j\in\mathbb{N}}\int_0^V\int_{S^{n-1}}\chi_\beta\Big(2^{\frac{j}{1+m}}\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)\frac{2^{j\frac{1+|\beta|}{1+m}}}{|\xi|}m_{\beta,\omega}(\xi)\psi^2(2^{-j}\xi)$$
$$\hat{g}_*(\xi,\rho\omega)\partial_v^\alpha\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}d\rho d\omega\Big\}$$

sont des opérateurs continus de $L^2(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+^*\times S^{n-1};\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}x)$ *dans* $H^{\frac{1}{2(1+m)}}(\mathbb{R}^n)$.

Calculons la norme L^2 de chacun des blocs dyadiques :

$$h_{j\cdot\beta}(\xi) = \int_0^V\int_{S^{n-1}} \chi_\beta\Big(2^{\frac{j}{1+m}}\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)\frac{2^{j\frac{1+|\beta|}{1+m}}}{|\xi|} m_{\beta,\omega}(\xi)\psi(2^{-j}\xi)$$
$$\hat{g}_*(\xi,\rho\omega)\partial_v^\alpha\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega,$$
$$\ell_j(\xi) = \int_0^V\int_{S^{n-1}} \varphi\Big(2^{\frac{j}{1+m}}\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)\psi(2^{-j}\xi)\hat{f}_*(\xi,\rho\omega)\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient, comme dans [8] :

$$\big\|h_{j\beta}(\xi)\big\|_{L^2} \le C2^{-j/2(1+m)}\big\|\psi(2^{-j}\xi)\hat{g}_*(\xi,\rho\omega)\big\|_{L^2},$$
$$\big\|\ell_j(\xi)\big\|_{L^2} \le C2^{-j/2(1+m)}\big\|\psi(2^{-j}\xi)\hat{f}_*(\xi,\rho\omega)\big\|_{L^2}$$

et donc, la caractérisation dyadique usuelle pour les espaces de Sobolev implique que ces deux opérateurs sont continus de L^2 dans $H^{\frac{1}{2(1+m)}}$.

Fin de la preuve du théorème 2. — Posons $g_{*j} = \psi(2^{-j}D)g_*$ et $f_{*j} = \psi(2^{-j}D)f_*$ En intégrant l'estimation fournie par le lemme, on voit que

$$f_* \mapsto \int_0^V\int_{S^{n-1}} \big(M_j^1(D',D_n)\psi(2^{-j}D)f_{*j}(x,\rho\omega)\big)_{j\in\mathbb{N}}\rho^{n-1}\theta(\rho\omega)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega,$$
$$g_* \mapsto \int_0^V\int_{S^{n-1}} \big(M_{j,\omega}^2(D',D_n)\psi(2^{-j}D)g_{*j}(x,\rho\omega)\big)_{j\in\mathbb{N}}\rho^{n-1}\partial_v^\alpha\theta(\rho\omega)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega$$

sont deux opérateurs bornés de $L^1(\rho^{n-1}d\rho d\omega\ ;\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}))$ dans $\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^n;\ell^2(\mathbb{N}))$. En particulier, on obtient l'estimation :

$$\Big\|\Big\{\sum_{j\in\mathbb{N}}\Big|\int_0^V\int_{S^{n-1}} M_j^1(D',D_n)\psi^2(2^{-j}D)$$
$$f_*(x,\rho\omega)\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega\Big|^2\Big\}^{1/2}\Big\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$
$$\le C\big\|\psi(2^{-j}D)f_*(x,\rho\omega)\theta(\rho\omega)\big\|_{L^1(\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega;\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R};\ell^2(\mathbb{N})))}$$
$$\le C\int_0^V\int_{S^{n-1}}\big|\theta(\rho\omega)\big|\rho^{n-1}\sum_{k_1,k_2}\Big\|\Big\{\sum_{j\in\mathbb{N}}\big|R_{k_1}^1R_{k_2}^2\psi(2^{-j}D)f_*\big|^2\Big\}^{1/2}\Big\|_{L^1}\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega.$$

Ici encore, $R_{k_1}^1R_{k_2}^2\psi(2^{-j}D)$ est un multiplicateur pour la structure produit, donc :

$$\le C\int_0^V\int_{S^{n-1}}\big|\theta(\rho\omega)\big|\rho^{n-1}\big\|f_*(\cdot,\rho\omega)\big\|_{\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R})}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega$$
$$\le C\|f_*\|_{L^1(\mathbb{R}^n;\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}))}$$

Pour g_* on obtient de la même manière : pour tout β,

$$\Big\|\Big\{\sum_{j\in\mathbb{N}}\Big|\int_0^V\int_{S^{n-1}} M_{j,\omega}^2(D',D_n)\psi^2(2^{-j}\xi) \\ g_*(x,\rho\omega)\partial_v^\alpha\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega\Big|^2\Big\}^{1/2}\Big\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\ \leq C\|g_*\|_{L^1(\mathbb{R}^n;\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}))}.$$

La caractérisation, en théorie de Littlewood-Paley, de l'espace $\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^n)$, énoncée au LEMME 3.4 montre alors que $(f_*,g_*)\mapsto F$ est continu de $(L^1(\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega;\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R})))^2$ dans $\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^n)$. On conclut alors comme au THÉORÈME 1, par interpolation complexe (cf. TRIEBEL [30]) :

$$\Big[L^1\big(\mathrm{d}\mu;\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R})\big),L^2\big(\mathrm{d}\mu;L^2(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R})\big)\Big]_{[\theta]} \\ = L^{1/(1-\frac12\theta)}\Big(\mathrm{d}\mu,\big[\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R});L^2(\mathbb{R}^n)\big]_{[\theta]}\Big) \\ = L^{1/(1-\frac12\theta)}\Big(\mathrm{d}\mu,L^{1/(1-\frac12\theta)}(\mathbb{R}^n)\Big) = L^{1/(1-\frac12\theta)}(\mathrm{d}\mu\otimes\mathrm{d}x),$$

$$H^{1/2(1+m)} = W^{1/2(1+m),2} = F_{2,2}^{1/2(1+m)} \hookrightarrow \dot F_{2,2}^{1/2(1+m)},$$

$$\big[\dot F_{1,2}^0,\ \dot F_{2,2}^{1/2(1+m)}\big]_{[\theta]} = \dot F^{\theta/(1+m)2}_{1/(1-\frac12\theta),2}.$$

D'autre part, l'opérateur de moyennisation agit continûment sur tous les L^p avec $1\leq p\leq\infty$. Donc $F_+\in W^{s,p}=W^{\theta/2(1+m),p}=\dot F_{p,2}^{\theta/2(1+m)}\cap L^p$ où

$$F_+ = \sum_{j\in\mathbb{N}}\psi(2^{-j}D)F.$$

Comme d'autre part F_- est à spectre dans la boule unité, F_- est dans $\mathcal{S}$, donc dans $W^{s,p}$. On obtient donc :

$$F\in W^{s,p},\quad \|F\|_{W^{s,p}}\leq C\big\{\|f_*\|_{L^p}+\|g_*\|_{L^p}\big\}.$$

En utilisant à nouveau l'isométrie $\mathcal{R}$ sur les L^p, on retrouve le résultat annoncé si $m\in 2\mathbb{N}$. Le cas général s'en déduit par interpolation complexe en considérant la famille analytique d'opérateurs, définie dans la bande complexe $\operatorname{Re} z \in [m, m+1]$: $(f,g) \mapsto F_z$ où :

$$
\begin{aligned}
\widehat{F}_z(\xi) = &\sum_{j<0} \int \hat{f}(\xi,v)\,\theta(v)\,\psi^2(2^{-j}\xi)\,\mathrm{d}v \\
&+ \sum_{j\geq 0} \int \varphi\Big(2^{\frac{j}{1+m}}\frac{v\cdot\xi}{|\xi|}\Big)^{m+1-z} \varphi\Big(2^{\frac{j}{2+m}}\frac{v\cdot\xi}{|\xi|}\Big)^{z-m} \\
&\qquad\qquad \psi^2(2^{-j}\xi)\,\hat{f}(\xi,v)\,\theta(v)\,\mathrm{d}v \\
&+ \sum_{\substack{j\geq 0\\ |\alpha+\beta|\leq m}} d(m,\alpha) \int \chi_\beta\Big(2^{\frac{j}{1+m}}\frac{v\cdot\xi}{|\xi|}\Big)^{m+1-z} \chi_\beta\Big(2^{\frac{j}{2+m}}\frac{v\cdot\xi}{|\xi|}\Big)^{z-m} \\
&\qquad\qquad \frac{\xi^\beta\, 2^{\frac{j(z-m)}{1+m}+\frac{j(m+1-z)}{2+m}}}{|\xi|^{|\beta|+1}} \psi^2(2^{-j}\xi)\,\hat{g}(\xi,v)\ \partial_v^\alpha\theta(v)\,\mathrm{d}v \\
&+ \sum_{\substack{j\geq 0\\ |\beta|=m+1}} (z-m)d(m,\beta) \int \chi_\beta\Big(2^{\frac{j}{2+m}}\frac{v\cdot\xi}{|\xi|}\Big)^{z-m} \\
&\qquad\qquad \frac{2^{j\frac{z-m}{m+2}}}{|\xi|}\,\frac{\xi^\beta}{|\xi|^\beta}\psi^2(2^{-j}\xi)\,\hat{g}(\xi,v)\,\theta(v)\,\mathrm{d}v.
\end{aligned}
$$

Preuve du Théorème 3. — Modifions la décomposition utilisée dans la démonstration du THÉORÈME 2, en introduisant un facteur d'échelle mieux adapté à notre situation. Commençons aussi avec un entier m pair.

$$
\begin{aligned}
F(\xi) = &\sum_{j<0} \int \hat{f}(\xi,v)\theta(v)\psi^2(2^{-j}\xi)\,\mathrm{d}v \\
&+ \sum_{j\geq 0} \int \varphi\Big(2^{j\frac{1-\tau}{1+m}}\frac{v\cdot\xi}{|\xi|}\Big)\psi^2(2^{-j}\xi)\theta(v)\hat{f}(\xi,v)\,\mathrm{d}v \\
&+ \sum_{j\geq 0} \int \chi\Big(2^{j\frac{1-\tau}{1+m}}\frac{v\cdot\xi}{|\xi|}\Big)\psi^2(2^{-j}\xi)\,\frac{2^{j\frac{1-\tau}{1+m}}}{|\xi|} \\
&\qquad\qquad \mathcal{F}\big((1-\Delta_v)^{m/2}(1-\Delta_x)^{1/2}g\big)(\xi,v)\theta(v)\,\mathrm{d}v \\
= &\sum_{j<0} \int \theta(v)\psi^2(2^{-j}\xi)\hat{f}(\xi,v)\,\mathrm{d}v \\
&+ \sum_{j\in\mathbb{N}} \int \varphi\Big(2^{j\frac{1-\tau}{1+m}}\frac{v\cdot\xi}{|\xi|}\Big)\psi^2(2^{-j}\xi)\theta(v)\hat{f}(\xi,v)\,\mathrm{d}v
\end{aligned}
$$

$$+\sum_{j\in\mathbb{N}}\int \chi\Big(2^{j\frac{1-\tau}{1+m}}\frac{v\cdot\xi}{|\xi|}\Big)\psi^2(2^{-j}\xi)\,\frac{2^{j\frac{1-\tau}{1+m}}}{|\xi|}$$
$$(1+|\xi|^2)^{\tau/2}\big[(1-\Delta_v)^{m/2}\hat g(\xi,v)\big]\theta(v)\,\mathrm{d}v.$$

Comme précédemment, introduisons $f_*=\mathcal{R}f$ et $g_*=\mathcal{R}g$ et intégrons par parties les termes faisant intervenir g :

$$\sum_{j\geq 0}\int \theta(v)\chi\Big(2^{j\frac{1-\tau}{1+m}}\frac{v\cdot\xi}{|\xi|}\Big)\frac{2^{j\frac{1-\tau}{1+m}}}{|\xi|}\psi^2(2^{-j}\xi)\big(1+|\xi|^2\big)^{\tau/2}(1-\Delta_v)^{m/2}\hat g(\xi,v)\,\mathrm{d}v$$
$$=\sum_{j\geq 0}\sum_{|\alpha+\beta|\leq m} d(m,\alpha)\int \partial_v^\alpha\theta\,\partial_v^\beta\Big(\chi\Big(2^{j\frac{1-\tau}{1+m}}\frac{v\cdot\xi}{|\xi|}\Big)\Big)\frac{2^{j\frac{1-\tau}{1+m}}}{|\xi|}$$
$$\psi^2(2^{-j}\xi)\big(1+|\xi|^2\big)^{\tau/2}\hat g(\xi,v)\,\mathrm{d}v$$
$$=\sum_{j\geq 0}\sum_{|\alpha+\beta|\leq m} d(m,\alpha)\int \partial_v^\alpha\theta\chi_\beta\Big(2^{j\frac{1-\tau}{1+m}}\frac{v\cdot\xi}{|\xi|}\Big)\frac{\xi^\beta}{|\xi|^{1+|\beta|}}2^{j\frac{(1+|\beta|)(1-\tau)}{1+m}}$$
$$\psi^2(2^{-j}\xi)\big(1+|\xi|^2\big)^{\tau/2}\hat g(\xi,v)\,\mathrm{d}v$$

où les χ_β sont C^∞, nulles au voisinage de 0 et telles que $|\chi_\beta(s)|\leq C_\beta(1+|s|)^{-|\beta|-1}$.

$$\widehat F(\xi)=\sum_{j<0}\int \hat f(\xi,\sigma)\theta(v)\psi^2(2^{-j}\xi)\,\mathrm{d}v$$
$$+\sum_{j\geq 0}\int_0^V\int_{S^{n-1}}\varphi\Big(2^{j\frac{1-\tau}{1+m}}\frac{\rho(\omega\cdot\xi)}{|\xi|}\Big)\psi(2^{-j}\xi)\psi(2^{-j}\xi)$$
$$\hat f(\xi,\rho\omega)\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega$$
$$+\sum_{|\alpha+\beta|\leq m}\sum_{j\geq 0}\int_0^V\int_{S^{n-1}} d(m,\alpha)\partial_v^\alpha\theta(\rho\omega)\,\chi_\beta\Big(2^{j\frac{1-\tau}{1+m}}\frac{\rho(\omega\cdot\xi)}{|\xi|}\Big)\frac{\xi^\beta}{|\xi|^{1+|\beta|}}$$
$$2^{j\frac{(1+|\beta|)(1-\tau)}{1+m}}\psi(2^{-j}\xi)\big(1+|\xi|^2\big)^{\tau/2}$$
$$\psi(2^{-j}\xi)\hat g(\xi\cdot\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega.$$

Comme dans le cas de la preuve du THÉORÈME 2, les polynômes ξ^β sont transformés de sorte que le multiplicateur $\xi^\beta/|\xi|$ devient $m_{\beta,\omega}(\xi)$ avec la même estimation.

$$\begin{aligned}\widehat{F}(\xi) &= \sum_{j<0}\int \hat{f}(\xi,\sigma)\theta(v)\psi^2(2^{-j}\xi)\,\mathrm{d}v\\ &+\sum_{j\geq 0}\int_0^V\int_{S^{n-1}}\varphi\Big(2^{j\frac{1-\tau}{1+m}}\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)\psi(2^{-j}\xi)\psi(2^{-j}\xi)\\ &\qquad\qquad \hat{f}_*(\xi,\rho\omega)\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega\\ &+\sum_{\substack{j\geq 0\\ |\alpha+\beta|\leq m}} d(m,\alpha)\int_0^V\int_{S^{n-1}}\big(1+|\xi|^2\big)^{\tau/2}\chi_\beta\Big(2^{j\frac{1-\tau}{1+m}}\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)m_{\beta,\omega}(\xi)\\ &\qquad\qquad \frac{2^{j\frac{(1+|\beta|)(1-\tau)}{1+m}}}{|\xi|}\psi(2^{-j}\xi)\hat{g}_*(\xi,\rho\omega)\partial_v^\alpha\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega.\end{aligned}$$

On a encore besoin de deux lemmes.

LEMME 4.5. — *Pour $\rho\in\mathbb{R}_+^*$ et $\omega\in S^{n-1}$, $|\alpha+\beta|\leq m$, les opérateurs*

$$f_*\mapsto \mathcal{F}^{-1}\Big\{\sum_{j\geq 0}\varphi\Big(2^{j\frac{1-\tau}{1+m}}\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)\psi(2^{-j}\xi)\psi(2^{-j}\xi)\hat{f}_*(\xi)\Big\},$$

$$\begin{aligned}g_*\mapsto \mathcal{F}^{-1}\Big\{\sum_{j\geq 0}\chi_\beta\Big(2^{j\frac{1-\tau}{1+m}}\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)m_{\beta,\omega}(\xi)\frac{2^{j\frac{(1+|\beta|)(1-\tau)}{1+m}}}{|\xi|}\\ \psi(2^{-j}\xi)\big(1+|\xi|^2\big)^{\tau/2}\psi(2^{-j}\xi)\hat{g}_*(\xi)\Big\}\end{aligned}$$

sont bornés, uniformément en ρ,ω, de $\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R})$ dans $\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. — Comme dans le cas du LEMME 4.3, il suffit de vérifier que les multiplicateurs

$$M_1^1(\xi',\xi^n) = \mathrm{Diag}\Big\{\varphi\Big(2^{j\frac{1-\tau}{1+m}}\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)\psi(2^{-j}\xi)\Big\}_{j\in\mathbb{N}},$$

$$\begin{aligned}M_\omega^2(\xi',\xi^n) = \mathrm{Diag}\Big\{\chi_\beta\Big(2^{j\frac{1-\tau}{1+m}}\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)m_{\beta,\omega}(\xi)\frac{2^{j\frac{(1+|\beta|)(1-\tau)}{1+m}}}{|\xi|}\\ \psi(2^{-j}\xi)\big(1+|\xi|^2\big)^{\tau/2}\Big\}_{j\in\mathbb{N}}\end{aligned}$$

sont compatibles avec la structure produit. Le cas de M^1 est déjà traité dans le LEMME 4.3. Examinons donc M_ω^2 : comme j est positif, et $|\beta|\leq m$.

$$\Big|\partial_\xi^\alpha\Big\{\frac{2^{j(1-\tau)(1+|\beta|)/(1+m)}}{|\xi|}\big(1+|\xi|^2\big)^{\tau/2}\Big\}\Big|\leq C|\xi|^{-\alpha}\quad\text{si}\quad \xi\in\operatorname{supp}\psi(2^{-j}),$$

de sorte qu'il suffit d'obtenir l'estimation pour :

$$\chi_\beta\Big(2^{j\frac{(1-\tau)}{1+m}}\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)m_{\beta,\omega}(\xi)\psi(2^{-j}\xi).$$

Par homogénéité du terme $m_{\beta,\omega}$, cela revient à estimer

$$\chi_\beta\Big(2^{j\frac{(1-\tau)}{1+m}}\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)m_{\beta,\omega}(2^{-j}\xi)\psi(2^{-j}\xi)$$

et toutes les dérivées, et de voir qu'on respecte la structure produit pour ce multiplicateur ; soit encore : $\chi_\beta(\lambda\xi_n/|\xi|)\widetilde{\psi}(\mu\xi)$ où $\lambda\cdot\mu>0$ et $\widetilde{\psi}$ vérifie les mêmes estimations que ψ.

On a déjà vu qu'un tel symbole donne lieu à un multiplicateur sur $\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R})$. Donc

$$f_*\mapsto\big(M_j^1(D',D_n)\psi(2^{-j}D)f_*\big)_{j\in\mathbb{N}},$$

$$g_*\mapsto\big(M_{j,\omega}^2(D',D_n)\psi(2^{-j}D)g_*\big)_{j\in\mathbb{N}}$$

sont des opérateurs linéaires continus de

$$\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R})\ \text{ dans }\ \mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R};\ell^2(\mathbb{N})).$$

En utilisant l'injection $\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R};\ell^2(\mathbb{N}))\hookrightarrow\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R};\ell^2(\mathbb{N}))$ une fois de plus, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n}\Big|\Big\{\sum_{j\in\mathbb{N}}\big|M_j^1(D',D_n)R_k\psi(2^{-j}D)f_*\big|^2\Big\}^{1/2}\Big|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\le C\|f_*\|_{\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R})},$$

$$\sum_{k=0}^{n}\Big|\Big\{\sum_{j\in\mathbb{N}}\big|M_{j,\omega}^2(D',D_n)R_k\psi(2^{-j}D)f_*\big|^2\Big\}^{1/2}\Big|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\le C\|g_*\|_{\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R})}.$$

Passons maintenant à l'analogue L^2 de ce lemme.

LEMME 4.6. — *Les opérateurs*

$$f_*\mapsto\mathcal{F}^{-1}\Big\{\sum_{j\in\mathbb{N}}\int_0^V\int_{S^{n-1}}\varphi\Big(2^{j\frac{1-\tau}{1+m}}\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)\psi^2(2^{-j}\xi)\\ \hat{f}_*(\xi,\rho\omega)\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega\Big\},$$

$$g_*\mapsto\mathcal{F}^{-1}\Big\{\sum_{j\in\mathbb{N}}\int_0^V\int_{S^{n-1}}\chi_\beta\Big(2^{j\frac{1-\tau}{1+m}}\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)\frac{2^{j(1-\tau)(1+|\beta|)/(1+m)}}{|\xi|}m_{\beta,\omega}(\xi)\\ \big(1+|\xi|^2\big)^{\tau/2}\psi^2(2^{-j}\xi)\hat{g}_*(\xi,\rho\omega)\partial^\alpha\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega\Big\}$$

sont des opérateurs continus de $L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^* \times S^{n-1}; \rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}x)$ *dans* $H^{\frac{1-\tau}{2(1+m)}}(\mathbb{R}^n)$.

La preuve reprend essentiellement l'idée de démonstration des LEMMES 4.2 et 4.4. Pour cela, il suffit de calculer la norme L^2 de chacun des blocs dyadiques suivants :

$$h_j(\xi) = \int_0^V\!\!\int_{S^{n-1}} \varphi\Big(2^{j\frac{1-\tau}{1+m}}\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)\psi(2^{-j}\xi)\hat{f}_*(\xi,\rho\omega)\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega,$$

$$\ell_{j,\omega,\beta}(\xi) = \int_0^V\!\!\int_{S^{n-1}} \chi_\beta\Big(2^{j\frac{1-\tau}{1+m}}\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)\frac{2^{j(1-\tau)(1+|\beta|)/(1+m)}}{|\xi|}m_{\beta,\omega}(\xi)$$
$$\psi(2^{-j}\xi)\hat{g}_*(\xi,\rho\omega)\partial_v^\alpha\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il est facile d'obtenir les majorations :

$$\|h_j\|_{L^2} \le C\,2^{-j\frac{1-\tau}{2(1+m)}}\big\|\psi(2^{-j}\xi)\hat{f}_*(\xi,\rho\omega)\big\|_{L^2},$$
$$\|\ell_{j,\omega,\beta}\|_{L^2} \le C\,2^{-j\frac{1-\tau}{2(1+m)}}\big\|\psi(2^{-j}\xi)\hat{g}_*(\xi,\rho\omega)\big\|_{L^2}.$$

Comme d'autre part les spectres de h_j et $\ell_{j,\omega,\beta}$ sont dans la couronne $|\xi| \sim 2^j$, la caractérisation usuelle s'applique et nos deux opérateurs sont bien continus à valeurs dans $H^{(1-\tau)/2(1+m)}$.

Fin de la preuve du théorème 3. — Comme dans les preuves précédentes, posons $g_{*j} = \psi(2^{-j}D)g_*$ et $f_{*j} = \psi(2^{-j}D)f_*$. Le lemme implique que

$$f_* \mapsto \int_0^V\!\!\int_{S^{n-1}} \big(M_j^1(D',D_n)\psi(2^{-j}D)f_{*j}(x,\rho,\omega)\big)_{j\in\mathbb{N}}\rho^{n-1}\theta(\rho\omega)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega,$$

$$g_* \mapsto \int_0^V\!\!\int_{S^{n-1}} \big(M_{j,\omega}^2(D',D_n)\psi(2^{-j}D)g_{*j}(x,\rho\omega)\big)_{j\in\mathbb{N}}\rho^{n-1}\partial_v^\alpha\theta(\rho\omega)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega$$

sont deux opérateurs bornés de $L^1(\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega; \mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}))$ dans $\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^n;\ell^2(\mathbb{N}))$ et donc :

$$\Big\|\Big\{\sum_{j\in\mathbb{N}}\Big|\int_0^V\!\!\int_{S^{n-1}} M_j^1(D',D_n)\psi^2(2^{-j}D) f_*(x,\rho\omega)\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}d\rho d\omega\Big|^2\Big\}^{1/2}\Big\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$
$$\le C\int_0^V\!\!\int_{S^{n-1}} \big|\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}\big|\,\big\|f_*(\cdot,\rho\omega)\big\|_{\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R})}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega$$
$$= C\|f_*\|_{L^1(\mathbb{R}^n;\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}))},$$

$$\Big\|\Big\{\sum_{j\in\mathbb{N}}\Big|\int_0^V\int_{S^{n-1}} M_{j,\beta}^2(D',D_n)\psi^2(2^{-j}D) g_*(x,\rho\omega)\partial_v^\alpha\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}d\rho d\omega\Big|^2\Big\}^{1/2}\Big\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$
$$\leq C\int_0^V\int_{S^{n-1}}\big|\partial_v^\alpha\theta(\rho\omega)\big|\,\big\|g_*(\cdot,\rho\omega)\big\|_{\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R})}\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega$$
$$= C\|g_*\|_{L^1(\mathbb{R}^n;\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}))}.$$

La caractérisation dyadique du COROLLAIRE 3.4 prouve ainsi que l'opérateur $(f_*,g_*)\mapsto F$ est continu de $(L^1(\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}))^2$ dans $\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^n)$. Concluons par interpolation complexe comme précédemment :

$$F\in W^{s,p},\quad s=\frac{1-\tau}{(1+m)p'}.$$

Appliquant $\mathcal{R}$ à f_* et g_* on obtient :

$$\|F\|_{W^{s,p}}\leq C\big\{\|f\|_{L^p}+\|g\|_{L^p}\big\}.$$

Le cas où m n'est pas un entier pair s'obtient comme précédemment en constuisant une famille analytique d'opérateurs dans la bande complexe $\operatorname{Re} z\in[m,m+1]$.

Preuve du théorème 4. — L'idée principale est de permettre, une fois n'est pas coutume, d'interpoler par la méthode réelle (cf. BERGH-LÖFSTRÖM [1]), pour comprendre dans un premier temps le scaling du problème. Pour cela, on reprend la décomposition dyadique précédente.

Afin d'éviter de noyer le lecteur sous les détails techniques commençons par le cas plus simple où $m=\tau=0$. Pour $\gamma>0$, on écrit la décomposition de F suivante :

$$\begin{aligned}\widehat{F}(\xi)&=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int\varphi\Big(2^j\gamma\frac{v\cdot\xi}{|\xi|}\Big)\psi^2(2^{-j}\xi)\hat{f}(\xi,v)\theta(v)\,\mathrm{d}v\\&\quad+\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int(1-\varphi)\Big(2^j\gamma\frac{v\cdot\xi}{|\xi|}\Big)\frac{1}{i(v\cdot\xi)}\psi^2(2^{-j}\xi)\hat{g}(\xi,v)\theta(v)\,\mathrm{d}v\\&=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int\varphi\Big(2^j\gamma\frac{v\cdot\xi}{|\xi|}\Big)\psi^2(2^{-j}\xi)\hat{f}(\xi,v)\theta(v)\,\mathrm{d}v\\&\quad+\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int\chi\Big(2^j\gamma\frac{v\cdot\xi}{|\xi|}\Big)\frac{2^j\gamma}{|\xi|}\psi^2(2^{-j}\xi)\hat{g}(\xi,v)\theta(v)\,\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

La présence du facteur γ impose une légère modification des LEMMES 4.1 et 4.2.

LEMME 4.7.

$$f \mapsto \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int \varphi\Big(2^j\gamma\frac{v\cdot\xi}{|\xi|}\Big)\psi^2(2^{-j}\xi)\hat f(\xi,v)\theta(v)\,\mathrm{d}v,$$

$$g \mapsto \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int \chi\Big(2^j\gamma\frac{v\cdot\xi}{|\xi|}\Big)\psi^2(2^{-j}\xi)\frac{2^j}{|\xi|}\hat g(\xi,v)\theta(v)\,\mathrm{d}v$$

sont des opérateurs continus de $L^2(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ dans $H^{1/2}(\mathbb{R}^n)$ de norme majorée par $\gamma^{-1/2}$.

Preuve. — Il suffit d'écrire chacun des blocs dyadiques et de les estimer en norme L^2. En utilisant un changement de variable évident et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient :

$$\begin{aligned}
&\Big|\int \varphi\Big(2^j\gamma\frac{v\cdot\xi}{|\xi|}\Big)\psi^2(2^{-j}\xi)\hat f(\xi,v)\theta(v)\,\mathrm{d}v\Big|_{L^2}\\
&= \Big|\int \varphi\Big(2^j\frac{w\cdot\xi}{|\xi|}\Big)\psi^2(2^{-j}\xi)\hat f\Big(\xi,\frac{w}{\gamma}\Big)\theta\Big(\frac{w}{\gamma}\Big)\frac{\mathrm{d}w}{\gamma^n}\Big|_{L^2}\\
&\le C\gamma^{-n}\Big\{\iint \Big|\varphi\Big(2^j\frac{w\cdot\xi}{|\xi|}\Big)\theta\Big(\frac{w}{\gamma}\Big)\Big|^2\mathrm{d}w\int\Big|\hat f\Big(\xi,\frac{w}{\gamma}\Big)\psi(2^{-j}\xi)\Big|^2\mathrm{d}w\,\mathrm{d}\xi\Big\}^{1/2}\\
&\le C\gamma^{-n}\Big\{\iint\Big|\hat f\Big(\xi,\frac{w}{\gamma}\Big)\psi(2^{-j}\xi)\Big|^2\mathrm{d}w\,2^{-j}\gamma^{n-1}\,\mathrm{d}\xi\Big\}^{1/2}\\
&\le C\gamma^{-1/2}2^{-j/2}\big\|\psi(2^{-j}D)\hat f\big\|_{L^2}
\end{aligned}$$

où on a utilisé le support compact de θ et le fait que $\varphi\in L^2(\mathbb{R})$. Le même raisonnement s'applique au cas où φ est remplacé par $\chi\in L^2(\mathbb{R})$, car dans ce cas $2^j/|\xi|$ vaut essentiellement 1 sur le support de $\psi(2^{-j}\xi)$. □

LEMME 4.8.

$$f_* \mapsto \mathcal{F}^{-1}\Big\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int \varphi\Big(2^j\rho\gamma\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)\psi^2(2^{-j}\xi)\hat f_*(\xi,\rho\omega)\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega\Big\},$$

$$g_* \mapsto \mathcal{F}^{-1}\Big\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int \chi\Big(2^j\gamma\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)\frac{2^j}{|\xi|}\psi^2(2^{-j}\xi)\hat g_*(\xi,\rho\omega)\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega\Big\}$$

sont des opérateurs bornés de $L^1(\mathbb{R}_+^*\times S^{n-1};\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}))$ dans $\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^n)$ avec une norme bornée uniformément en γ.

Preuve. — Raisonnons par exemple sur le terme faisant intervenir f_* :

$$\begin{aligned}
F_1 &= \mathcal{F}^{-1}\Big\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int \varphi\Big(2^j\gamma\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)\psi(2^{-j}\xi)\hat f_*(\xi,\rho\omega)\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega\Big\}\\
&= \mathcal{F}^{-1}\Big\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int \varphi\Big(2^j\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)\psi(2^{-j}\xi)\hat f\Big(\xi,\frac{\rho\omega}{\gamma}\Big)\theta\Big(\frac{\rho\omega}{\gamma}\Big)\frac{\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho}{\gamma^n}\,\mathrm{d}\omega\Big\}.
\end{aligned}$$

Il suffit alors d'appliquer la preuve du LEMME 4.1 pour voir que

$$\begin{aligned}\|F_1\|_{\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^n)} &\le C\int\Big\|f_*\Big(x,\frac{\rho\omega}{\gamma}\Big)\Big\|_{\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R})}\Big|\theta\Big(\frac{\rho\omega}{\gamma}\Big)\Big|\,\frac{\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho}{\gamma^n}\,\mathrm{d}\omega\\ &\le C\|f_*\|_{L^1(\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}))}.\end{aligned}$$

Le terme faisant intervenir g_* n'est pas plus difficile à traiter en suivant les lignes du LEMME 4.1.

Suite de la preuve du théorème 4. — En appliquant le même argument d'interpolation complexe que dans la fin de la preuve du THÉORÈME 1, on voit que si $f \in L^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ alors

$$\mathcal{F}^{-1}\Big\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int \varphi\Big(2^j\gamma\frac{\xi\cdot v}{|\xi|}\Big)\psi^2(2^{-j}\xi)\hat{f}(\xi,v)\theta(v)\,\mathrm{d}v\Big\} = F_1$$

est dans $W^{s,p}$ avec $s = 1 - p^{-1}$ et

$$\|F_1\|_{W^{s,p}} \le C\gamma^{-\frac{\theta}{2}}\|f\|_{L^p} = C\gamma^{-1/p}\|f\|_{L^p} \quad \text{où} \quad \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1.$$

De même, si $g \in L^q(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$,

$$F_2 = \mathcal{F}^{-1}\Big\{\sum_{j\in\mathbb{Z}}\chi\Big(2^j\gamma\frac{\xi\cdot v}{|\xi|}\Big)\frac{2^j\gamma}{|\xi|}\psi^2(2^{-j}\xi)\hat{g}(\xi,v)\theta(v)\,\mathrm{d}v\Big\}$$

est dans $W^{t,q}$ avec $t = 1 - q^{-1}$ et $\|F_2\|_{W^{t,q}} \le C\gamma^{1/q}\|g\|_{L^q}$.

Il en résulte que $F = F_1 + F_2$ est dans l'interpolé réel (θ, ∞)

$$[W^{s,p}, W^{t,q}]_{[0,\infty]} = B^{\sigma}_{\infty,\infty} \quad \text{avec} \quad \begin{cases}\sigma = (1-\theta)s + \theta t,\\ \theta = \dfrac{1}{p'(1/p' + 1/q)} = q/(p'+q)\end{cases},$$

$$\|F\|_{B^{\sigma}_{\infty,\infty}} \le C\big(\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^q}\big), \quad \sigma = \frac{q}{q+p'}.$$

Revenons à la situation initiale et traitons le cas où m est un entier pair. Dans la situation la plus générale, pour des raisons d'invariance par changement d'échelle, la décomposition la plus adéquate est donnée par :

$$\widehat{F}(\xi) = \sum_{\gamma 2^j < 1}\int \psi^2(2^{-j}\xi)\hat{f}(\xi,v)\theta(v)\,\mathrm{d}v$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sum_{\gamma 2^j \geq 1} \int \varphi\Big((2^j\gamma)^{\frac{1-\tau}{1+m}} \frac{v\cdot\xi}{|\xi|}\Big)\psi^2(2^{-j}\xi)\hat f(\xi,v)\theta(v)\,\mathrm{d}v \\
&+ \sum_{\gamma 2^j \geq 1} \int (1-\varphi)\Big((2^j\gamma)^{\frac{1-\tau}{1+m}} \frac{v\cdot\xi}{|\xi|}\Big)\psi^2(2^{-j}\xi)\frac{1}{i(v\cdot\xi)} \\
&\qquad\qquad (1+|\xi|^2)^{\tau/2}(1-\Delta_v)^{m/2}\hat g(\xi,v)\theta(v)\,\mathrm{d}v \\
= &\sum_{\gamma 2^j < 1} \int \psi^2(2^{-j}\xi)\hat f(\xi,v)\theta(v)dv \\
&+ \sum_{\gamma 2^j \geq 1} \int_0^v\!\!\int_{S^{n-1}} \varphi\Big((2^j\gamma)^{\frac{1-\tau}{1+m}} \rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)\psi^2(2^{-j}\xi) \\
&\qquad\qquad \hat f_*(\xi,\rho v)\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega \\
&+ \sum_{\gamma 2^j \geq 1} \int_0^v\!\!\int_{S^{n-1}} \chi\Big((2^j\gamma)^{\frac{1-\tau}{1+m}} \frac{\xi\cdot v}{|\xi|}\Big)\frac{(2^j\gamma)^{\frac{1-\tau}{1+m}}}{|\xi|}\psi^2(2^{-j}\xi) \\
&\qquad\qquad (1+|\xi|^2)^{\tau/2}(1-\Delta_v)^{m/2}\hat g(\xi,v)\theta(v)\,\mathrm{d}v.
\end{aligned}
$$

Le dernier terme se réécrit encore, en intégrant par parties :

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{|\alpha+\beta|\leq m \\ \gamma 2^j \geq 1}} \int_0^v\!\!\int_{S^{n-1}} d(m,\alpha,\beta)\,\chi_\beta\Big((2^j\gamma)^{\frac{1-\tau}{1+m}}\frac{\xi\cdot v}{|\xi|}\Big) \\
&\qquad\qquad \frac{(2^j\gamma)^{(1-\tau)(1+|\beta|)/(1+m)}}{|\xi|^{1+|\beta|}}\,\xi^\beta(1+|\xi|^2)^{\tau/2} \\
&\qquad\qquad \psi^2(2^{-j}\xi)\hat g(\xi,v)\partial_v^\alpha\theta(v)\,\mathrm{d}v
\end{aligned}
$$

et en explicitant en fonction de $g_* = \mathcal{R}g$:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{|\alpha+\beta|\leq m} d(m,\alpha,\beta)\sum_{\gamma 2^j \geq 1} \int_0^v\!\!\int_{S^{n-1}} \chi_\beta\Big((2^j\gamma)^{\frac{1-\tau}{1+m}}\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big) \\
&\qquad\qquad \frac{(2^j\gamma)^{\frac{(1-\tau)(1+|\beta|)}{1+m}}}{|\xi|} m_{\beta,\omega}(\xi)(1+|\xi|^2)^{\tau/2} \\
&\qquad\qquad \psi^2(2^{-j}\xi)\ \partial_v^\alpha\theta(\rho\omega)\hat g_*(\xi,\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega.
\end{aligned}
$$

Le terme $\sum_{\gamma 2^j<1}\int\psi^2(2^{-j}\xi)\hat f(\xi,v)\theta(v)\,\mathrm{d}v$ est à spectre compact et est C^∞ : on peut facilement majorer sa norme $H^{(1-\tau)/2(1+m)}$ par $\mathrm{C}^{\mathrm{te}}\gamma^{-(1-\tau)/2(1+m)}$. $\square$

LEMME 4.9. — *Les opérateurs*

$$f_* \mapsto \mathcal{F}^{-1}\Big\{\int_0^V\!\!\int_{S^{n-1}} \sum_{\gamma 2^j \geq 1} \varphi\Big((2^j\gamma)^{\frac{1-\tau}{1+m}}\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)\psi^2(2^{-j}\xi)$$
$$\hat{f}_*(\xi,\rho\omega)\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega\Big\},$$

$$g_* \mapsto \mathcal{F}^{-1}\Big\{\sum_{|\alpha+\beta|\leq m} d(m,\alpha,\beta)\sum_{\gamma 2^j\geq 1}\int_0^V\!\!\int_{S^{n-1}}\chi_\beta\Big((2^j\gamma)^{\frac{1-\tau}{1+m}}\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)$$
$$\frac{(2^j\gamma)^{\frac{(1-\tau)(1+|\beta|)}{1+m}}}{|\xi|}m_{\beta,\omega}(\xi)\big(1+|\xi|^2\big)^{\tau/2}$$
$$\partial_v^\alpha\theta(\rho\omega)\psi^2(2^{-j}\xi)\hat{g}_*(\xi,\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega\Big\}$$

sont continus de $L^2(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ *dans* $H^{\frac{(1-\tau)}{2(1+m)}}$ *de normes majorées respectivement par* $\gamma^{\frac{-(1-\tau)}{2(1+m)}}$ *et* $\gamma^{\frac{(1-\tau)(1+2m)}{2(m+1)}}$.

Preuve. — Comme à chaque estimation L^2, il suffit de majorer les blocs dyadiques : simplement ici on fait un peu plus attention aux facteurs d'échelle en γ. Pour cela on remarque par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\Big\{\int\Big|\int_0^V\!\!\int_{S^{n-1}}\varphi\Big((2^j\gamma)^{\frac{1-\tau}{1+m}}\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)\psi^2(2^{-j}\xi)$$
$$\hat{f}_*(\xi,\rho\omega)\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega\Big|^2\mathrm{d}\xi\Big\}^{1/2}$$
$$\leq C\Big\{\iint_0^V\!\!\int_{S^{n-1}}\Big|\varphi\Big((2^j\gamma)^{\frac{1-\tau}{1+m}}\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)\Big|^2\theta^2(\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega$$
$$\int_0^V\!\!\int_{S^{n-1}}\psi^2(2^{-j}\xi)\big|\hat{f}_*(\xi,\rho\omega)\big|^2\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\xi\Big\}^{1/2}$$

et que pour tout ξ

$$\int_0^v\!\!\int_{S^{n-1}}\Big|\varphi\Big((2^j\gamma)^{\frac{1-\tau}{1+m}}\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)\Big|^2\theta^2(\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\omega\leq 2^{-j\frac{1-\tau}{1+m}}\gamma^{-j\frac{1-\tau}{1+m}}.$$

Le cas des estimations sur g_* est légèrement plus délicat : pour commencer, remarquons que puisque $|\xi|\sim 2^j$ sur le support de $\psi(2^{-j}\xi)$, le terme

$$(2^j\gamma)^{\frac{(1-\tau)(1+|\beta|)}{1+m}}\langle\xi\rangle^\tau/|\xi| \text{ équivaut à } \gamma^{\frac{(1-\tau)(1+|\beta|)}{1+m}}2^{j(1-\tau)\frac{|\beta|-m}{1+m}}$$

et pour tout ξ,

$$\int_0^V\int_{S^{n-1}} \big|\psi(2^{-j}\xi)\big|^2 \Big|\chi_\beta\Big((2^j\gamma)^{\frac{1-\tau}{1+m}}\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)\Big|^2 \\ \big|\partial_v^\alpha\theta(\rho v)\big|^2\big|m_{\beta,\omega}(\xi)\big|^2\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega \\ \leq C\gamma^{-\frac{1-\tau}{1+m}}2^{-j\frac{1-\tau}{1+m}}$$

donc

$$\Big\{\int\Big|\int_0^V\int_{S^{n-1}} \chi_\beta\Big((2^j\gamma)^{\frac{1-\tau}{1+m}}\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)\psi^2(2^{-j}\xi)\frac{(2^j\gamma)^{\frac{(1-\tau)(1+|\beta|)}{1+m}}}{|\xi|}\langle\xi\rangle^\tau \\ m_{\beta,\omega}(\xi)\partial_v^\alpha\theta(\rho\omega)\hat g_*(\xi,\rho\omega)\rho^{m-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega\Big|^2\mathrm{d}\xi\Big\}^{1/2} \\ \leq C\,2^{-j\frac{1-\tau}{2(1+m)}}\gamma^{\frac{(1-\tau)(2|\beta|+1)}{2(1+m)}}2^{j(1-\tau)\frac{|\beta|-m}{1+m}}\|g_*\|_{L^2}$$

or comme ici $\gamma\cdot 2^j\geq 1$, il en résulte $2^{\frac{j(1-\tau)(|\beta|-m)}{1+m}}\leq\gamma^{\frac{(1-\tau)(m-|\beta|)}{m+1}}$, d'où la majoration

$$\leq C\,2^{-j\frac{1-\tau}{2(1+m)}}\gamma^{\frac{(1-\tau)(1+2m)}{2m+2}}\|g_*\|_{L^2}.$$

LEMME 4.10. — *Les opérateurs*

$$f_*\mapsto\mathcal{F}^{-1}\Big\{\int_0^V\int_{S^{n-1}}\sum_{\gamma 2^j\geq 1}\varphi\Big((2^j\gamma)^{\frac{1-\tau}{1+m}}\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)\psi^2(2^{-j}\xi) \\ \hat f_*(\xi,\rho\omega)\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega\Big\}$$

et pour $|\alpha+\beta|\leq m$:

$$g_*\mapsto\mathcal{F}^{-1}\Big\{\int_0^V\int_{S^{n-1}}\chi_\beta\Big((2^j\gamma)^{\frac{1-\tau}{1+m}}\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)\frac{(2^j\gamma)^{\frac{(1-\tau)(1+|\beta|)}{1+m}}}{|\xi|} \\ \big(1+|\xi|^2\big)^{\tau/2}m_{\beta,\omega}(\xi)\partial_v^\alpha\theta(\rho\omega) \\ \psi^2(2^{-j}\xi)\hat g_*(\xi,\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega\Big\}$$

sont continus de $L^1(\mathbb{R}^n;\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}))$ *dans* $\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^n)$, *de normes majorées respectivement par* 1 *et* $\gamma^{1-\tau}$.

Preuve. — Le changement de variable utilisé lors de la preuve du LEMME 4.8 ramène immédiatement notre assertion pour f_* à l'énoncé du LEMME 4.6.

$$\mathcal{F}^{-1}\Big\{\sum_{2^j\gamma\geq 1}\int_0^V\int_{S^{n-1}}\chi_\beta\Big((2^j\gamma)^{\frac{1-\tau}{1+m}}\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)\frac{(2^j\gamma)^{\frac{(1-\tau)(1+|\beta|)}{1+m}}}{|\xi|}(1+|\xi|^2)^{\tau/2}$$
$$m_{\beta,\omega}(\xi)\partial_v^\alpha(\rho\omega)\psi^2(2^{-j}\xi)\hat{g}_*(\xi,\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega\Big\}$$

$$=\gamma^{\frac{(1-\tau)(1+|\beta|)}{1+m}}2^{j\frac{|\beta|-m}{1+m}}$$
$$\mathcal{F}^{-1}\Big\{\int_0^V\int_{S^{n-1}}\chi_\beta\Big((2^j\gamma)^{\frac{1-\tau}{1+m}}\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)\frac{2^{j(1-\tau)}(1+|\xi|^2)^{\tau/2}}{|\xi|}$$
$$m_{\beta,\omega}(\xi)\partial_v^\alpha\theta(\rho\omega)\psi^2(2^{-j}\xi)\hat{g}_*(\xi,\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega\Big\}$$

et le même changement de variable utilisé en plus du LEMME 4.6 donne une majoration comme attendu, dès qu'on constate que

$$\gamma^{\frac{(1-\tau)(1+|\beta|)}{1+m}}2^{j\frac{|\beta|-m}{m}}\leq\gamma^{1-\tau}$$

car $2^j\gamma\geq 1$ dans la somme considérée.

Fin de la preuve du théorème 4. — Le théorème d'interpolation complexe permet alors d'écrire :

$$F=\sum_{2^j\gamma<1}\psi^2(2^{-j}D)f+F_1(f_*)+F_2(g_*)$$

où $F_1\in W^{s,p}$, $s=\dfrac{1-\tau}{(1+m)p'}$, $F_2\in W^{t,q}$, $t=\dfrac{1-\tau}{(1+m)q'}$ et

$$\Big\|\sum_{2^j\gamma<1}\psi^2(2^{-j}D)f\Big\|_{W^{s,p}}\leq C\gamma^{-\frac{1}{p},\frac{1-\tau}{1+m}}\|f\|_{L^p},$$
$$\|F_1\|_{W^{s,p}}\leq C\gamma^{-\frac{1}{p'},\frac{1-\tau}{1+m}}\|f\|_{L^p},$$
$$\|F_2\|_{W^{t,q}}\leq C\gamma^{\frac{1+mq}{(1+m)q}(1-\tau)}\|g\|_{L^p}.$$

Il en résulte que F est dans l'interpolé réel (θ,∞) $[W^{s,p},W^{t,q}]_{(\theta,\infty)}=B^\sigma_{\infty,\infty}$ où après un calcul fastidieux, on a :

$$\sigma=\frac{1-\tau}{p'(p'^{-1}+q^{-1}+m)},\qquad\theta=\frac{1}{p'(p'^{-1}+q^{-1}+m)}\cdot$$

($B^\sigma_{\infty\infty}$ désigne un espace de Besov, cf. [1].)

Ceci nous donne une indication tout à fait précise quant au scaling à employer pour obtenir le résultat dans l'espace de Sobolev correspondant, en utilisant l'interpolation complexe. Posons

$$\delta = \frac{1-\tau}{(p'^{-1}+q^{-1}+m)} + \frac{n(p^{-1}-q^{-1})}{(p'^{-1}+q^{-1}+m)} = \frac{1-\tau+n(p^{-1}-q^{-1})}{p'^{-1}+q^{-1}+m}$$

et écrivons une décomposition de F en théorie de Littlewood-Paley suivant :

$$\begin{aligned}\widehat{F}(\xi) &= \sum_{j<0} \int \psi^2(2^{-j}\xi)\hat{f}(\xi,v)\theta(v)\,\mathrm{d}v \\ &+ \sum_{j\geq 0} \int_0^V\!\!\int_{S^{n-1}} \varphi\Big(2^{j\delta}\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)\psi^2(2^{-j}\xi)\hat{f}_*(\xi,\rho\omega)\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega \\ &+ \sum_{j\geq 0}\sum_{|\alpha+\beta|\leq m} d(m,\alpha)\int_0^V\!\!\int_{S^{n-1}} \chi_\beta\Big(2^{j\delta}\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)\frac{2^{j\delta(1+|\beta|)}}{|\xi|}\langle\xi\rangle^\tau \\ &\qquad m_{\beta,\omega}(\xi)\partial_v^\alpha\theta(\rho\omega)\psi^2(2^{-j}\xi)\hat{g}_*(\xi,\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega.\end{aligned}$$

Suivant la stratégie d'interpolation complexe utilisée jusqu'ici, on a :

LEMME 4.11. — *Les opérateurs*

$$\begin{aligned}& f \mapsto \mathcal{F}^{-1}\Big\{\sum_{j<0}\int \psi^2(2^{-j}\xi)\hat{f}(\xi,v)\theta(v)\,\mathrm{d}v\Big\}, \\ & f_* \mapsto \mathcal{F}^{-1}\Big\{\sum_{j\geq 0}\int_0^V\!\!\int_{S^{n-1}} \varphi\Big(2^{j\delta}\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)\psi^2(2^{-j}\xi)\hat{f}_*(\xi,\rho\omega)\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega\Big\}, \\ & g_* \mapsto \mathcal{F}^{-1}\Big\{\sum_{\substack{j\geq 0\\ |\alpha+\beta|\leq m}} d(w,\alpha)\int_0^V\!\!\int_{S^{n-1}} \chi_\beta\Big(2^{j\delta}\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)\frac{2^{j\delta(1+|\beta|)}}{|\xi|}\langle\xi\rangle^\tau \\ &\qquad m_{\beta,\omega}(\xi)\partial_v^\alpha\theta(\rho\omega)\psi^2(2^{-j}\xi)\hat{g}_*(\xi,\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega\Big\}\end{aligned}$$

sont des opérateurs continus de L^2 dans $H^{\frac12\delta}$ (resp. dans $H^{\frac12\delta}$, resp. dans $H^{1-\tau-(m+\frac12)\delta}$).

Preuve. — Il s'agit une fois de plus d'utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que $\delta \geq 0$, de sorte que

$$2^{j\delta(1+|\beta|)}\langle\xi\rangle^\tau/|\xi| \leq 2^{j\delta(1+m)-(1-\tau)}$$

sur $\operatorname{supp}\psi(2^{-j}\xi)$. La borne L^2 de φ ou χ_β sur $\mathbb{R}$ permet de faire apparaître $2^{-j\delta/2}$ dans la norme L^2 des blocs dyadiques. □

LEMME 4.12. — *Les opérateurs*

$$f_* \mapsto \mathcal{F}^{-1}\Big\{\sum_{j\geq 0}\int_0^V\int_{S^{n-1}} \varphi\Big(2^{j\delta}\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)\psi^2(2^{-j}\xi)\hat{f}_*(\xi,\rho\omega)\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega\Big\},$$

$$g_* \mapsto \mathcal{F}^{-1}\Big\{\sum_{\substack{j\geq 0\\ |\alpha+\beta|\leq w}} d(m,\alpha)\int_0^V\int_{S^{n-1}} \chi_\beta\Big(2^{j\delta}\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)\frac{2^{j\delta(1+|\beta|)}}{|\xi|}\langle\xi\rangle^\tau \\ m_{\beta,\omega}(\xi)\partial_v^\alpha\theta(\rho\omega)\psi^2(2^{-j}\xi)\hat{g}_*(\xi,\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega\Big\}$$

sont bornés de $L^1(\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}))$ *dans* $\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^n)$ *et* $\dot{F}_{21}^{\tilde{s}}$ *respectivement, où* $\tilde{s}=(1-\tau)-(m+1)\delta$.

Preuve. — Seule l'estimation faisant intervenir g_* diffère un peu de ce que nous avons vu jusqu'ici : c'est donc elle que l'on détaille. Utilisant la caractérisation de $\dot{F}_{21}^{\tilde{s}}$ en couronnes dyadiques donnée par la définition 3.5 il suffit de prouver que, pour $|\alpha+\beta|\leq m$, on a :

$$\Big\|\Big\{\sum_j \Big|2^{j\tilde{s}}\int_0^V\int_{S^{n-1}} \chi_\beta\Big(2^{i\delta}\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)\frac{2^{j\delta(1+|\beta|)}}{|\xi|}\langle\xi\rangle^\tau m_{\beta,\omega}(\xi)\partial_v^\alpha\theta(\rho\omega) \\ \psi^2(2^{-j}\xi)g_*(\xi,\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega\Big|^2\Big\}^{1/2}\Big\|_{L^1} \\ \leq C\|g_*\|_{L^1(\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}))},.$$

Pour cela, il suffit de considérer le multiplicateur défini par

$$M^2_{\beta,\omega}(\xi)=\mathrm{Diag}\Big\{\chi_\beta\Big(2^j\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)\frac{2^{j\delta(1+|\beta|)+\tilde{s}}}{|\xi|}\langle\xi\rangle^\tau m_{\beta,\omega}(\xi)\psi(2^{-j}\xi)\Big\}_{j\in\mathbb{N}}$$

et de constater que grâce à la condition de support sur ψ, $M^2_{\beta,\omega}$ est un multiplicateur $\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R},\ell^2(\mathbb{N}))\to\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^n,\ell^2(\mathbb{N}))$ ce qui permet d'appliquer la même preuve que dans les lemmes précédents, en intégrant en ρ et ω. □

Fin de la preuve du théorème 4. — On conclut comme d'habitude par interpolation complexe. Comme

$$f_* \mapsto \sum_{j\geq 0}\int_0^V\int_{S^{n-1}} \varphi\Big(2^{j\delta}\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)\psi^2(2^{-j}\xi)\hat{f}_*(\xi,\rho\omega)\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega$$

opère de $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ dans $H^{\delta/2}(\mathbb{R}^n)$ et de $L^1(\mathbb{R}^n;\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}))$ dans $\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^n)$, on voit qu'il opère aussi de L^p dans $W^{\delta/p',p}$. Par injection de Sobolev, il est facile de vérifier que $W^{\delta/p',p} \to W^{s,r}$ pour les valeurs de s, r, δ annoncées. De même

$$g_* \mapsto \sum_{\substack{j\geq 0\\ |\alpha+\beta|\leq m}} d(m,\alpha) \int_0^V\int_{S^{n-1}} \chi_\beta\Big(2^j\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)\frac{2^{j\delta(1+|\beta|)}}{|\xi|}\langle\xi\rangle^\tau$$
$$m_{\beta,\omega}(\xi)\psi^2(2^{-j}\xi)\partial_v^\alpha\theta(\rho\omega)\hat{g}_*(\xi,\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega$$

est borné de $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ dans $H^{1-\tau-(\frac{1}{2}+m)\delta}(\mathbb{R}^n)$ et de $L^1(\mathbb{R}^n; \mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}))$ dans $F^{\tilde{s}}_{2,1}$ où $\tilde{s} = (1-\tau) - (1+m)\delta$, donc il opère de L^q dans $W^{\tilde{s}+\frac{\delta}{q'},q}$, et par l'injection de Sobolev, de L^q dans $W^{s,r}$.

Enfin, le terme à support compact ne joue essentiellement aucun rôle, puisqu'il est borné dans $\mathcal{S}$. Le cas m quelconque se traite par l'interpolation complexe d'opérateurs, en construisant une famille analytique ad hoc. $\square$

Preuve du théorème 5. — Nous allons utiliser ici une « interpolation à deux étages », en faisant intervenir un nouvel espace, $L^2(\mathrm{d}v; \mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}))$ pour lequel nous avons besoin d'un lemme analogue au LEMME 4.8.

LEMME 4.13. — *Les opérateurs*

$$f_* \mapsto \mathcal{F}^{-1}\Big\{\sum_{j\geq 0}\int_0^V\int_{S^{n-1}} \varphi\Big(2^{j\frac{1-\tau}{1+m}}\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)\psi^2(2^{-j}\xi)$$
$$\hat{f}_*(\xi,\rho\omega)\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega\Big\}$$

et, pour $|\alpha+\beta|\leq m$,

$$g_* \mapsto \mathcal{F}^{-1}\Big\{\sum_{j\geq 0}\int_0^V\int_{S^{n-1}} \chi_\beta\Big(2^{j\frac{1-\tau}{1+m}}\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)\frac{2^{j\frac{1-\tau}{1+m}(1+|\beta|)}}{|\xi|}\langle\xi\rangle^\tau$$
$$m_{\beta,\omega}(\xi)\partial_v^\alpha\theta(\rho\omega)\psi^2(2^{-j}\xi)\hat{g}_*(\xi,\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega\Big\}$$

sont continus de $L^2(\mathbb{R}_+^*\times S^{n-1}; \mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}))$ *dans* $\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^n)$

Preuve du lemme. — Elle reprend exactement le schéma de la preuve du THÉORÈME 2, en modifiant simplement la dernière étape en considérant que puisque θ est à support compact, on a par exemple :

$$\Big\|\mathcal{F}^{-1}\Big\{\sum_{j\geq 0}\int_0^V\int_{S^{n-1}} \chi_\beta\Big(2^{j\frac{1-\tau}{1+m}}\rho\frac{\xi_n}{|\xi|}\Big)\frac{2^{j\frac{1-\tau}{1+m}(1+|\beta|)}}{|\xi|}\langle\xi\rangle^\tau$$
$$m_{\beta,\omega}(\xi)\partial_v^\alpha\theta(\rho\omega)\psi^2(2^{-j}\xi)\hat{g}_*(\xi,\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega\Big\}\Big\|_{\mathfrak{H}^1}$$
$$\leq C\int_0^V\int_{S^{n-1}}\big|\partial_v^\alpha\theta(\rho\omega)\big|\rho^{n-1}\big\|g_*(\cdot,\rho\omega)\big\|_{\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R})}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega$$
$$\leq C\|g_*\|_{L^2(\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}))}.$$

Fin de la preuve du théorème 5. — Il suffit de voir que, par interpolation complexe, $[L^2(\mathfrak{H}^1), L^2(L^2)]_{[\theta]} = L^2(L^{1/(1-\theta/2)})$ et de choisir $\theta = q'/p'$, ce qui est permis car $q \leq p$ et donc $\theta \in [0,1]$ et de conclure par $[L^1(\mathfrak{H}^1), L^2(L^{1/(1-\theta/2)})]_{[\theta']} = L^q(L^p)$ où $\theta' = 2/q'$, dès lors la moyenne est dans

$$\Big[\mathfrak{H}^1, \big[\mathfrak{H}^1, H^{\frac{1-\tau}{2(1+m)}}\big]_{[\theta]}\Big]_{[\theta']} \quad \text{i.e. dans} \quad \Big[\dot{F}^0_{2,1}, W^{\frac{1-\tau}{2(1+m)}\frac{q'}{p'}, \frac{1}{1-\theta/2}}\Big]_{2/q'},$$

soit encore $W^{(1-\tau)/(1+m)p',q}$. L'estimation cherchée en découle par un raisonnement désormais routinier. $\square$

5. Situations dépendant du temps

Preuve du théorème 6. — Les démonstrations que nécessite une situation d'évolution sont essentiellement de même nature que celles du paragraphe précédent et nous serons donc beaucoup plus elliptique ici, laissant au lecteur le soin de vérifier par le menu chaque détail. Commençons par le cas m pair. La décomposition de Littlewood-Paley se fait maintenant en (t,x), dont les variables en transformée de Fourier sont $(\sigma,\xi) = \eta \in \mathbb{R}^{n+1}$. Comme dans la preuve du THÉORÈME 4, on écrit :

$$\begin{aligned}
\widehat{F}(\sigma,\xi) &= \sum_{j<0} \int \hat{f}(\eta,v)\theta(v)\psi^2(2^{-j}\eta)\,\mathrm{d}v \\
&\quad + \sum_{j\geq 0} \int \varphi\Big(2^{j\frac{1-\tau}{1+m}}\frac{\sigma + v\cdot\xi}{|\eta|}\Big)\psi^2(2^{-j}\eta)\theta(v)\hat{f}(\eta,v)\,\mathrm{d}v \\
&\quad + \sum_{j\geq 0} \int \chi\Big(2^{j\frac{1-\tau}{1+m}}\frac{\sigma + v\cdot\xi}{|\eta|}\Big)\psi^2(2^{-j}\eta)\frac{2^{j\frac{1-\tau}{1+m}}}{|\eta|} \\
&\qquad\qquad \mathcal{F}\big[(1-\Delta_v)^{m/2}(1-\Delta_{x,t})^{\tau/2}g\big](\eta,v)\theta(v)\,\mathrm{d}v \\
&= \sum_{j<0} \int \hat{f}(\eta,v)\psi^2(2^{-j}\eta)\theta(v)\,\mathrm{d}v \\
&\quad + \sum_{j\geq 0} \int \varphi\Big(2^{j\frac{1-\tau}{1+m}}\frac{\sigma + v\cdot\xi}{|\eta|}\Big)\psi^2(2^{-j}\eta)\theta(v)\hat{f}(\eta,v)\,\mathrm{d}v \\
&\quad + \sum_{\substack{j\geq 0\\ |\alpha+\beta|\leq m}} d(m,\alpha) \int \partial_v^\alpha\theta\chi_\beta\Big(2^{j\frac{1-\tau}{1+m}}\frac{\sigma + v\cdot\xi}{|\eta|}\Big)\psi^2(2^{-j}\eta) \\
&\qquad\qquad \frac{\xi^\beta}{|\eta|^{1+|\beta|}}2^{j\frac{1-\tau}{1+m}(1+|\beta|)}\langle\eta\rangle^\tau\hat{g}(\eta,v)\,\mathrm{d}v.
\end{aligned}$$

Réutilisons l'opérateur $\mathcal{R}$ introduit plus haut et composons-le avec l'opérateur $\mathcal{T}$:

$$f(t,x) \mapsto (\mathcal{T}f)(t,x) = f\big(\tfrac{1}{2}(t+x_n), x', \tfrac{1}{2}(-t+x_n)\big)$$

de sorte que si $g_* = \mathcal{T}\mathcal{R}g$ et $f_* = \mathcal{T}\mathcal{R}f$ et $\langle\rho\rangle = (1+|\rho|^2)^{1/2}$

$$\begin{aligned}\widehat{F}(\sigma,\xi) &= \sum_{j<0}\int \hat{f}(\eta,v)\psi^2(2^{-j}\eta)\theta(v)\,\mathrm{d}v \\ &+ \sum_{j\geq 0}\int_0^V\int_{S^{n-1}} \varphi\Big(2^{j\frac{1-\tau}{1+m}}\langle\rho\rangle\frac{\sigma}{|\eta|}\Big)\psi^2(2^{-j}\eta)\theta(\rho\omega)\hat{f}_*(\eta,\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega \\ &+ \sum_{\substack{j\geq 0\\ |\alpha+\beta|\leq m}} d(m,\alpha)\int_0^V\int_{S^{n-1}} \chi_\beta(2^{j\frac{1-\tau}{1+m}}\langle\rho\rangle\frac{\sigma}{|\eta|})\psi^2(2^{-j}\eta)\frac{m_{\omega,\beta}}{|\eta|} \\ &\qquad 2^{j\frac{1-\tau}{1+m}(1+|\beta|)}\langle\eta\rangle^\tau\hat{g}_*(\eta,\rho\omega)\partial_v^\alpha\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega.\end{aligned}$$

Les multiplicateurs $m_{\omega,\beta}(\eta)$ sont des fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}\setminus 0)$ qui vérifient l'estimée

$$\big|\partial_\eta^\gamma m_{\omega,\beta}(\eta)\big| < C_\gamma|\eta|^{-|\gamma|} \qquad \forall\gamma\in\mathbb{N}^{n+1},$$

uniformément en $\omega\in S^{n-1}$.

Indiquons alors que la preuve repose sur les deux lemmes suivants, dont l'énoncé et la preuve sont strictement identiques à ceux des LEMMES 4.5 et 4.6 de la situation stationnaire.

LEMME 5.1. — *Les opérateurs*

$$\begin{aligned}f_* \mapsto \mathcal{F}^{-1}\Big\{\sum_{j\geq 0}\int_0^V\int_{S^{n-1}} \varphi\Big(2^{j\frac{1-\tau}{1+m}}\langle\rho\rangle\frac{\sigma}{|\eta|}\Big)\psi^2(2^{-j}\eta)\theta(\rho\omega) \\ \hat{f}_*(\eta,\rho\omega)\rho^{n-1}d\rho\,\mathrm{d}\omega\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g_* \mapsto \mathcal{F}^{-1}\Big\{\sum_{j\geq 0}\int_0^V\int_{S^{n-1}} \chi_\beta\Big(2^{j\frac{1-\tau}{1+m}}\langle\rho\rangle\frac{\sigma}{|\eta|}\Big)\psi^2(2^{-j}\eta)\frac{2^{j\frac{1-\tau}{1+m}(1+|\beta|)}}{|\eta|} \\ m_{\omega,\beta}(\eta)\langle\eta\rangle^\tau\partial_v^\alpha\theta(\rho\omega)\hat{g}_*(\eta,\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega\Big\}\end{aligned}$$

sont continus de $L^2(\mathbb{R}^{2n+1})$ *dans* $H^{\frac{1-\tau}{2(1+m)}}(\mathbb{R}^{n+1})$

LEMME 5.2. — *Les opérateurs*

$$f_* \mapsto \mathcal{F}^{-1}\Big\{\sum_{j\geq 0}\int_0^V\!\!\int_{S^{n-1}} \varphi\Big(2^{j\frac{1-\tau}{1+m}}\langle\rho\rangle\frac{\sigma}{|\eta|}\Big)\psi^2(2^{-j}\eta)\theta(\rho\omega) \hat{f}_*(\eta,\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega\Big\},$$

$$g_* \mapsto \mathcal{F}^{-1}\Big\{\sum_{j\geq 0}\int_0^V\!\!\int_{S^{n-1}} \chi_\beta\Big(2^{j\frac{1-\tau}{1+m}}\langle\rho\rangle\frac{\sigma}{|\eta|}\Big)\psi^2(2^{-j}\eta)\frac{m_{\omega,\beta}(\eta)}{|\eta|} 2^{j\frac{1-\tau}{1+m}(1+|\beta|)}\langle\eta\rangle^\tau\partial_v^\alpha\theta(\rho\omega)\hat{g}_*(\eta,\rho\omega)\rho^{n-1}d\rho d\omega\Big\}$$

sont continus de $L^1(\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega;\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n))$ *dans* $\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n+1})$.

On conclut alors la preuve du THÉORÈME 6 en remarquant que $\mathcal{RT}$ est une isométrie sur $L^p(\mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^n)$ pour tout $p\in[1,\infty]$. □

Preuve du théorème 7. — Elle s'inspire évidemment de la preuve du THÉORÈME 4. On introduit un scaling approprié à l'interpolation considéré en écrivant :

$$\begin{aligned}\widehat{F}(\eta) &= \sum_{j<0}\int \psi^2(2^{-j}\eta)\hat{f}(\eta,v)\theta(v)\,\mathrm{d}v\\ &+\sum_{j\geq 0}\int_0^V\!\!\int_{S^{n-1}}\varphi\Big(2^{j\delta}\langle\rho\rangle\frac{\sigma}{|\eta|}\Big)\psi^2(2^{-j}\eta)\hat{f}_*(\eta,\rho\omega)\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega\\ &+\sum_{\substack{j\geq 0\\|\alpha+\beta|\leq m}} d(m,\alpha)\int_0^V\!\!\int_{S^{n-1}}\chi_\beta\Big(2^{j\delta}\langle\rho\rangle\frac{\sigma}{|\eta|}\Big)\psi^2(2^{-j}\eta)\frac{2^{j\delta(1+|\beta|)}}{|\eta|}\\ &\qquad\langle\eta\rangle^\tau m_{\beta,\omega}(\eta)\partial_v^\alpha\theta(\rho\omega)\hat{g}_*(\eta,\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega\end{aligned}$$

avec $\delta = \dfrac{1-\tau+(n+1)(p^{-1}-q^{-1})}{p'^{-1}+m+q^{-1}}$. On a alors :

LEMME 5.3. — *Les opérateurs*

$$f_* \mapsto \mathcal{F}^{-1}\Big\{\sum_{j\geq 0}\int_0^V\!\!\int_{S^{n-1}} \varphi\Big(2^{j\delta}\langle\rho\rangle\frac{\sigma}{|\eta|}\Big)\psi^2(2^{-j}\eta) \hat{f}_*(\eta,\rho\omega)\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega\Big\},$$

$$g_* \mapsto \mathcal{F}^{-1}\Big\{\sum_{j\geq 0}\int_0^V\!\!\int_{S^{n-1}} \chi_\beta\Big(2^{j\delta}\langle\rho\rangle\frac{\sigma}{|\eta|}\Big)\psi^2(2^{-j}\eta)\frac{2^{j\delta(1+|\beta|)}}{|\eta|}\langle\eta\rangle^\tau m_{\beta,\omega}(\eta)\partial_v^\alpha\theta(\rho,\omega)\hat{g}_*(\eta,\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega\Big\}$$

sont continus de $L^2(\mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^n)$ *dans* $H^{\delta/2}$ (*resp. dans* $H^{1-\tau-(m+\frac{1}{2})\delta}$) *et de* $L^1(\mathbb{R}^n;\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n))$ *dans* $\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n+1})$ (*resp. dans* $\dot F^{\tilde s}_{21}(\mathbb{R}^{n+1})$ *où* $\tilde s=(1-\tau)-(1+m)\delta$.

Preuve du lemme. — Il s'agit d'une adaptation immédiate des LEMMES 4.11 et 4.12. □

Fin de la preuve du théorème 7. — Par interpolation complexe, on voit que les parties de F qui font intervenir f et g sont respectivement dans $W^{\delta/p',p}(\mathbb{R}^n)$ et $W^{\tilde s+\delta/q',q}(\mathbb{R}^n)$. Il suffit alors d'utiliser le lemme d'injection de Sobolev, pour qu'avec le choix judicieux de δ, on ait $F\in W^{s,r}$.

Preuve du théorème 8. — On procède tout à fait de la même manière que dans la preuve du THÉORÈME 5, en faisant intervenir $L^2(\mathrm{d}v;\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}))$.

LEMME 5.4. — *Les opérateurs*

$$f_*\mapsto\mathcal{F}^{-1}\Big\{\sum_{j\geq 0}\int_0^V\!\!\int_{S^{n-1}}\varphi\Big(2^{j\frac{1-\tau}{1+m}}\langle\rho\rangle\frac{\sigma}{|\eta|}\Big)\psi^2(2^{-j}\eta)\\ \hat f_*(\eta,\rho\omega)\theta(\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega\Big\},$$

$$g_*\mapsto\mathcal{F}^{-1}\Big\{\sum_{j\geq 0}\int_0^V\!\!\int_{S^{n-1}}\chi_\beta\Big(2^{j\frac{1-\tau}{1+m}}\langle\rho\rangle\frac{\sigma}{|\eta|}\Big)\frac{2^{j\frac{1-\tau}{1+m}(1+|\beta|)}}{|\eta|}\langle\eta\rangle^\tau\\ m_{\beta,\omega}(\eta)\partial_v^\alpha\theta(\rho\omega)\psi^2(2^{-j}\eta)\hat g_*(\eta,\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega\Big\}$$

sont continus de $L^2(\mathbb{R}_+^*\times S^{n+1};\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ *dans* $\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n+1})$.

Comme pour le LEMME 5.13 on écrit, par exemple :

$$\Big\|\mathcal{F}^{-1}\Big\{\sum_{j\geq 0}\int_0^V\!\!\int_{S^{n-1}}\chi_\beta\Big(2^{j\frac{1-\tau}{1+m}}\langle\rho\rangle\frac{\sigma}{|\eta|}\Big)\frac{2^{j\frac{1-\tau}{1+m}(1+|\beta|)}}{|\eta|}\langle\eta\rangle^\tau m_{\beta,\omega}(\eta)\\ \partial_v^\alpha\theta(\rho\omega)\psi^2(2^{-j}\eta)\hat g_*(\eta,\rho\omega)\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega\Big\}\Big\|_{\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n+1})}\\ \leq C\int_0^V\!\!\int_{S^{n-1}}\big|\partial_v^\alpha\theta(\rho\omega)\big|\cdot\big\|g_*(\cdot,\rho\omega)\big\|_{\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)}\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega\leq C\|g_*\|_{L^2}.$$

Fin de la preuve du théorème 8. — Par interpolation complexe :

$$\Big[L^2\big(\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega;\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)\big);L^2\big(\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega;L^2(\mathbb{R}^{n+1})\big)\Big]_{[\theta]}\\ =L^2\big(\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega;L^{\frac{1}{1-\frac{1}{2}\theta}}(\mathbb{R}^{n+1})\big)$$

Il suffit de choisir $\theta = q'/p' \in [0,1]$, car $q \leq p$, et on voit alors que si $\theta' = 2/q'$

$$\Big[L^1\big(\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega; \mathfrak{H}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)\big); L^2\big(\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega; L^{\frac{1}{1-\theta/2}}(\mathbb{R}^{n+1})\big)\Big]_{[\theta']} = L^q\big(\rho^{n-1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\omega; L^p(\mathbb{R}^{n+1})\big)$$

et donc que la moyenne F est dans l'espace :

$$\Big[\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n+1}); \Big[\mathfrak{H}^1(\mathbb{R}^{n+1}); H^{\frac{1-\tau}{2(1+m)}}\Big]_{[\theta]}\Big]_{[\theta']} = \Big[\dot{F}^0_{2,1}; W^{\frac{(1-\tau)q'}{2(1+m)p'}, \frac{1}{1-\theta/2}}\Big]_{[\theta']} = W^{\frac{1-\tau}{(1+m)p'}, q}. \quad \square$$

REMARQUES. — Les résultats prouvés dans cet article font jouer un rôle nul à des espaces de type $L\operatorname{Log} L$ ou encore $L(\operatorname{Log} L)^2$, alors que ceux-ci interviennent de manière tout à fait naturelle lorsque l'on traite de la structure produit, que ce soit au niveau de la fonction maximale rectangle de Hardy-Littlewood, ou au niveau des intégrales singulières [19].

D'autre part l'espace $L\operatorname{Log} L$ intervient en théorie cinétique sous le vocable de fonction d'entropie et au moins un résultat de compacité dans un tel espace serait souhaitable et aurait de nombreuses conséquences sur les questions d'existence pour les systèmes de Vlasov-Poisson-Boltzmann ou Vlasov-Maxwell-Boltzmann par exemple.

Notons enfin que les travaux de P. GÉRARD font apparaître une parenté profonde entre les estimations de moyennes que nous avons présentées et la théorie des opérateurs sous-elliptiques qui s'écrivent comme somme de carrés de champs de vecteurs. Or dans cette théorie, le gain de régularité est identique dans toutes les classes L^p pour $p \neq 2$, ce qui n'est pas le cas dans les résultats que nous présentons ici, et nous fait conjecturer que les gains de régularité L^p sur les moyennes sont identiques au gain L^2.

Nous reviendrons sur cette question dans l'avenir [32].

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERGH (J.) and LÖFSTRÖM (J.). — *Interpolation spaces : an introduction.* — Springer, 1976.

[2] CHANG (S.Y). — *Carleson measure on the bidisc*, Ann. of Math., t. **110**, 1979, p. 613–620.

[3] CHANG (S.Y) and FEFERMAN (R.). — *A continuous version of duality of H^1 and* BMO *on the bidisc*, Ann. of Math., t. **112**, 1980, p. 179–201.

[4] CHANG (S.Y) and FEFERMAN (R.). — *The Calderòn-Zygmund decomposition on product domains*, Amer. J. Math., t. **104**, 1982, p. 455–468.

[5] CHANG (S.Y) and FEFERMAN (R.). — *Some recents developments in Fourier analysis and H^p-theory on product domains I*, Bull. Amer. Math. Soc., t. **12**, 1985, p. 1–43.

[6] CHANG (S.Y) and FEFERMAN (R.). — *Some recents developments in Fourier analysis and H^p-theory on product domains II*, Lecture Notes in Math., t. **1302**, 1988, p. 44–51.

[7] DI PERNA (R.) and LIONS (P.L.). — *On the Cauchy problem for Boltzmann equation : global existence and weak stability*, Ann. of Math., t. **130**, 1989, p. 321–366.

[8] DI PERNA (R.) and LIONS (P.L.). — *Global weak solutions of Vlasov-Maxwell systems*, Comm. Pure Appl. Math., t. **42**, 1989, p. 729–757.

[9] DI PERNA (R.) and LIONS (P.L.). — *On Fokker-Planck-Boltzmann equation*, Comm. Math. Phys., t. **120**, 1988, p. 1–23.

[10] DI PERNA (R.) and LIONS (P.L.). — *Solutions globales d'équations du type Vlasov-Poisson*, CR Acad. Sci. Paris, t. **I,307**, 1988, p. 655–658.

[11] DI PERNA (R.), LIONS (P.L.) and MEYER (Y.). — *L^p regularity of velocity averages*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal., t. **8**, 1991, p. 271–288.

[12] FEFFERMAN (C.) and STEIN (E.M.). — *H^p spaces of several variables*, Acta Math., t. **129**, 1972, p. 137–193.

[13] FEFFERMAN (R.). — *Bounded mean oscillation on the polydisc*, Ann. of Math., t. **110**, 1979, p. 395–406.

[14] FEFFERMAN (R.). — *Singular integrals on product domains*, Bull. Amer. Math. Soc., t. **4**, 1981, p. 195–201.

[15] FEFFERMAN (R.). — *Singular integrals on product H^p spaces*, Rev. Mat. Iberoamericana, t. **1**, 1985, p. 25–31.

[16] FEFFERMAN (R.). — *Fourier analysis in several parameters*, Rev. Mat. Iberoamericana, t. **2**, 1986, p. 89–98.

[17] FEFFERMAN (R.). — *Harmonic analysis on product spaces*, Ann. of Math., t. **126**, 1987, p. 109–130.

[18] FEFFERMAN (R.). — *A^p weights and singular integrals*, Amer. J. Math., t. **110**, 1988, p. 975–987.

[19] FEFFERMAN (R.) and STEIN (E.M.). — *Singular integrals on product domains*, Bull. Amer. Math. Soc., t. **4**, 1981, p. 195–201.

[20] GÉRARD (P.). — Moyennes de solutions d'équations aux dérivées partielles, *Journées EDP St Jean-de-Monts, exposé XI*, École Polytechnique France 1987.
[21] GÉRARD (P.). — Compacité par compensation et régularité 2-microlocale, *Séminaire équations aux dérivées partielles, exposé VI*, École Polytechnique France 1988–89.
[22] GÉRARD (P.). — *Moyennisation et régularité 2-microlocale*, Ann. Sci. École Norm. Sup., t. **23**, 1990, p. 89–121.
[23] GOLSE (F.), LIONS (P.L.), PERTHAME (B.) and SENTIS (R.). — *Regularity of the moments of the solution of a transport equation*, J. Funct. Anal., t. **76**, 1988, p. 110–125.
[24] GOLSE (F.), PERTHAME (B.) et SENTIS (R.). — *Un résultat de compacité pour les équations de transport et applications au calcul de la limite de la valeur propre principale d'un opérateur de transport*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. **301**, 1985, p. 341–344.
[25] GUNDY (R.F.) and STEIN (E.M.). — *H^p theory for the polydisc*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., t. **76**, 1979, p. 1026–1029.
[26] LIN (K.C.). — *Interpolation between Hardy spaces on the bidisc*, Studia Math., t. **84**, 1984, p. 85–97.
[27] PEETRE (J.). — *New thoughts on Besov spaces.* — Mimeographed Notes, Duke University, 1973.
[28] STEIN (E.M.). — *Singular integrals and differentiability properties of functions.* — Princeton Univ. Press, 1971.
[29] TORCHINSKY (A.). — *Real variable methods in harmonic analysis.* — Academic Press, 1986.
[30] TRIEBEL (H.). — *Theory of function spaces.* — Birkhaüser, 1983.
[31] WOLF (E.). — *Note on interpolation spaces*, Lecture Note in Math., t. **908**, 1982, p. 199–205.
[32] BEZARD (M.). — *Precised L^p regularity for averages in transport equations II*, à paraître.