

# BULLETIN DE LA S. M. F.

AVIVA SZPIRGLAS

**Singularités de bord : dualité, formules de Picard  
Lefschetz relatives et diagrammes de Dynkin**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 118, n° 4 (1990), p. 451-486

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1990\\_\\_118\\_4\\_451\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1990__118_4_451_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SINGULARITÉS DE BORD : DUALITÉ, FORMULES  
DE PICARD LEFSCHETZ RELATIVES  
ET DIAGRAMMES DE DYNKIN**

PAR

AVIVA SZPIRGLAS (\*)

---

RÉSUMÉ. — On étudie les singularités de bord en tant qu'extension de la singularité ordinaire associée et de la singularité ordinaire de la section hyperplane, ce qui permet de définir les dualités entre les deux groupes d'homologie associés à la singularité de bord considérée. Ceci permet aussi, pour les opérateurs de monodromie relative, de montrer des formules de Picard Lefschetz relatives. On construit également deux diagrammes de Dynkin associés à chaque singularité de bord relativement à des bases distinguées, ces deux diagrammes étant duaux l'un de l'autre. Dans le cas des singularités simples, en utilisant la géométrie du discriminant relatif, les diagrammes de Dynkin obtenus sont les mêmes que ceux des systèmes de racines de même nom.

ABSTRACT. — We study singularities with boundary as extensions of the associated ordinary singularity and of the ordinary singularity of the hyperplane section. Then, we can define the dualities between the two homology groups associated to each singularity with boundary. We proof relative Picard Lefschetz formulas for the operators of relative monodromy and we construct two dual Dynkin diagrams, associated to relative distinguished bases. In the case of simple singularities, the Dynkin diagrams obtained by using the geometry of the relative discriminant are the Dynkin diagrams of the roots system of same name.

**Introduction**

Un germe de singularité de bord  $(f, H)$  est la donnée d'un germe de fonction holomorphe en 0,  $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ , et d'un hyperplan  $H$  de  $\mathbb{C}^{n+1}$  ( $H \supset 0$ ) tels que  $f$  et  $f|_H$  admettent 0 comme point singulier isolé (on dit alors que  $f$  et  $f|_H$  sont des *singularités absolues ou ordinaires*).

Ces singularités de bord ont été étudiées par ARNOLD [1]; il associe à chaque singularité de bord une singularité ordinaire invariante par

---

(\*) Texte reçu le 8 janvier 1990, révisé le 23 octobre 1990.  
Unité de recherche associée au CNRS n° 742, Université Paris Nord, Av. J.B. Clément,  
93430 Villetaneuse, France.

l'action du groupe  $\mathbb{Z}_2$ . Ce qui lui permet d'étudier un sous espace de l'homologie de la fibre de Milnor de cette singularité ordinaire, sous espace isomorphe à  $H_n(F, F \cap H)$ , qui est l'un des objets homologiques qui jouent naturellement le rôle de  $H_n(F)$  pour  $(f, H)$  ( $F$  est la fibre de Milnor de  $f$ ).

De plus, G.G. ILYUTA (dans [5]), associe à chaque singularité de bord un diagramme de Dynkin déduit du diagramme de Dynkin de la singularité ordinaire associée, diagramme qui est naturellement muni d'une involution.

Dans cet article, on se propose de donner une nouvelle approche des résultats d'Arnold, basée sur la dualité existant dans la situation considérée. On dispose en effet de deux "homologies de la fibre de Milnor", à savoir  $H_n(F, F \cap H)$  et  $H_n(F \setminus F \cap H)$ .

Ces homologies sont extensions des homologies  $H_n(F)$  et  $H_{n-1}(F \cap H)$  de deux manières duales (voir PROPOSITION 1.2.1).

Par ailleurs, la théorie du déploiement universel fait apparaître la base du déploiement versel pour  $(f, H)$  (ou plutôt son espace tangent à l'origine) comme extension des bases pour  $f$  et  $f|_H$  de deux manières duales (voir LEMME 2.1.3).

Il existe dans la base de ce déploiement deux discriminants. On exploite la position relative de ceux-ci pour construire des bases distinguées duales pour  $H_n(F, F \cap H)$  et  $H_n(F \setminus F \cap H)$ .

C'est à ces bases distinguées duales qu'on associe deux diagrammes de Dynkin duaux qui — dans le cas de  $B_\mu$ ,  $C_\mu$  et  $F_4$  — correspondent aux diagrammes de Dynkin des systèmes de racines de même nom.

Pour donner un sens à ceci, on explicite les formes d'intersection et de Seifert de la situation et on montre les formules de Picard-Lefschetz correspondantes (qui n'étaient pas établies pour les singularités de bord) (voir § 2).

REMARQUE. — Dans [7], W. EBELING étudie une situation similaire à celle vue ici; on peut en effet considérer la singularité  $(f|_H, 0)$  comme la singularité d'intersection complète  $(f, \ell)$ , où  $\ell$  est la forme linéaire définissant l'hyperplan  $H$ . Mais, alors que dans ce travail, on s'intéresse au comportement *relatif* de la singularité  $(f, 0)$  et de l'intersection complète  $(f, \ell)$ , W. EBELING étudie le comportement de  $(f, \ell)$  dont la fibre de Milnor est plongée dans la fibre de Milnor d'une intersection complète de dimension  $n$  (qui, dans le cas particulier présent, est lisse). Ainsi, c'est l'action des opérateurs de monodromie définis par le discriminant ordinaire de  $(f|_H, 0)$  sur  $H_{n-1}(F)$  qui est donnée par les formules de Picard Lefschetz relatives démontrées dans [7] (et qui se réduisent ici aux formules de Picard Lefschetz ordinaires pour la singularité  $(f|_H, 0)$ ).

### 1. Homologies

Soit  $(f, H)$  un bon représentant d'une singularité de bord ( $f : X_0 \rightarrow \mathbb{D}$ , où  $\mathbb{D}$  est un disque centré en 0 de  $\mathbb{C}$ ). On suppose (ce qui est toujours possible, voir [1]), et quitte à diminuer le rayon de la boule de Milnor de  $f$ , que la fibration de Milnor de  $f$  est telle que, si  $F_s$  est la fibre de Milnor de  $f$  au dessus de  $s \neq 0$ , alors  $F_s \cap H$  est la fibre de Milnor de  $f|_H$  au dessus de  $s$ . De plus, si  $h$  est la monodromie de  $f$  ( $h : F_s \rightarrow F_s$ ), alors  $h|_{F_s \cap H}$  est la monodromie de  $f|_H$ .

Les deux groupes d'homologie, qui jouent le rôle de  $H_n(F)$  pour la singularité ordinaire  $f$ , sont, pour  $(f, H)$ ,

$$H_n(F \setminus F \cap H; \mathbb{Z}) \text{ et } H_n(F, F \cap H; \mathbb{Z}).$$

On démontre d'abord dans le premier paragraphe de cette section que les deux groupes d'homologie  $H_n(F, F \cap H)$  et  $H_n(F \setminus F \cap H)$  sont des extensions de  $H_n(F)$  et  $H_{n-1}(F \cap H)$ .

Puis, on généralise dans le deuxième paragraphe les notions de formes d'intersection et de Seifert : on définit deux formes d'intersection sur  $H_n(F, F \cap H) \times H_n(F \setminus F \cap H)$  ainsi que deux formes de Seifert, qui se trouvent être extensions de ces mêmes notions connues sur  $H_n(F)$  et  $H_{n-1}(F \cap H)$ .

Pour cela, deux énoncés sont importants :

- le LEMME 1.1.1, qui établit un isomorphisme entre les  $\mathbb{Z}$ -duaux de  $H_n(F, F \cap H)$  et  $H_n(F \setminus F \cap H)$ ;
- la PROPOSITION 1.3.2, qui permet de définir les deux formes de Seifert via les morphismes variation.

Le dernier paragraphe généralise les formules qui relient dans le cas absolu formes d'intersection, formes de Seifert, morphismes variation et monodromie. On obtient dans ce cadre le THÉORÈME 1.3.10.

#### 1.1 Dualité.

On démontre tout d'abord le lemme suivant :

LEMME 1.1.1. — *Le  $\mathbb{Z}$  dual de  $H_n(F \setminus F \cap H; \mathbb{Z}) (\simeq H_n(F \setminus T^0(F \cap H)))$ , qui est le groupe  $H_n(F \setminus T^0(F \cap H), \partial(F \setminus T^0(F \cap H)))$  vérifie :*

$$H_n(F \setminus T^0(F \cap H), \partial(F \setminus T^0(F \cap H))) \simeq H_n(F, (F \cap H) \cup \partial F)$$

qui est le  $\mathbb{Z}$  dual de  $H_n(F, F \cap H)$  (via la dualité de Lefschetz).

( $T^0(F \cap H)$  désigne ici un voisinage tubulaire de  $F \cap H$  dans  $F$ ).

*Démonstration.* — Par excision :

$$\begin{aligned} H_n(F \setminus T^0(F \cap H), \partial(F \setminus T^0(F \cap H))) \\ \simeq H_n(F, \partial(F \setminus T^0(F \cap H)) \cup T^0(F \cap H)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et : } H_n(F, \partial(F \setminus T^0(F \cap H)) \cup T^0(F \cap H)) \\ \simeq H_n(F, T^0(F \cap H) \cup \partial F) \\ \simeq H_n(F, (F \cap H) \cup \partial F). \end{aligned}$$

Par la suite, on identifie le groupe d'homologie

$$H_n(F \setminus T^0(F \cap H), \partial(F \setminus T^0(F \cap H)))$$

à  $H_n(F, (F \cap H) \cup \partial F)$ , via l'isomorphisme du LEMME 1.1.1.

## 1.2 Liens avec les singularités $(f, 0)$ et $(f|_{H, 0})$ .

PROPOSITION 1.2.1. — *On a les deux paires de suites exactes duales suivantes :*

$$(a_1) \quad 0 \leftarrow H_n(F, \partial F) \xleftarrow{\alpha'_1} H_n(F, (F \cap H) \cup \partial F) \\ \xleftarrow{\alpha'_2} H_{n-1}(F \cap H, \partial F \cap H) \leftarrow 0,$$

$$(b_1) \quad 0 \rightarrow H_n(F) \xrightarrow{\alpha_1} H_n(F, F \cap H) \xrightarrow{\alpha_2} H_{n-1}(F \cap H) \rightarrow 0,$$

$$(a_2) \quad 0 \rightarrow H_n(F, \partial F) \xrightarrow{\beta'_1} H_n(F, (F \cap H) \cup \partial F) \\ \xrightarrow{\beta'_2} H_{n-1}(F \cap H, \partial F \cap H) \rightarrow 0,$$

$$(b_2) \quad 0 \leftarrow H_n(F) \xleftarrow{\beta_1} H_n(F \setminus F \cap H) \xleftarrow{\beta_2} H_{n-1}(F \cap H) \leftarrow 0,$$

où le morphisme  $\beta_2$  est défini ainsi : soit  $x \in H_{n-1}(F \cap H)$ , soit  $\tilde{x}$  un cycle de  $F \cap H$  représentant  $x$ , soit  $T^0(\tilde{x})$  un voisinage tubulaire de  $\tilde{x}$  dans  $F$ ; alors  $\beta_2(x)$  est la classe de  $\partial T^0(\tilde{x})$  dans  $H_n(F \setminus F \cap H)$ .

*Démonstration :*

1) La deuxième suite est la suite exacte longue d'homologie pour la paire  $(F, F \cap H)$ ; la première s'en déduit par dualité (via la dualité de Lefschetz).

2) On a la suite exacte suivante, déduite de la suite exacte longue

$$0 \rightarrow H_n(F, \partial F) \rightarrow H_n(F, (F \cap H) \cup \partial F) \rightarrow H_{n-1}((F \cap H) \cup \partial F) \rightarrow 0.$$

Or,  $H_{n-1}(F \cap H, \partial(F \cap H)) \simeq H_{n-1}(F \cap H, T^0 \partial(F \cap H))$ . Par excision, on voit que le groupe  $H_{n-1}(F \cap H, T^0 \partial(F \cap H))$  est isomorphe à

$$H_{n-1} \left[ (F \cap H) \cup \partial(F \setminus T^0(F \cap H)), (T^0 \partial(F \cap H)) \cup \partial(F \setminus T^0(F \cap H)) \right].$$

Si on pose :

$$N = H_{n-1} \left[ (F \cap H) \cup \partial(F \setminus T^0(F \cap H)), (T^0 \partial(F \cap H)) \cup \partial(F \setminus T^0(F \cap H)) \right]$$

alors

$$N \simeq H_{n-1} \left[ T^0(F \cap H) \cup \partial(F \setminus T^0(F \cap H)), (T^0 \partial(F \cap H)) \cup \partial(F \setminus T^0(F \cap H)) \right].$$

Par une nouvelle excision :  $N \simeq H_{n-1}(\partial(F \setminus T^0(F \cap H)))$ . Or, le morphisme  $\beta'_2$  est le composé de l'isomorphisme du LEMME 1.1.1, du morphisme

$$\partial : H_n(F \setminus F \cap H, \partial T^0(F \setminus F \cap H)) \rightarrow H_{n-1}(\partial(F \setminus T^0(F \cap H)))$$

et de l'isomorphisme précédent.

Ce qui montre que la première suite est exacte. L'exactitude de la seconde s'en déduit par dualité.

*Complément sur les morphismes  $\beta'_2, \alpha'_2$  de la PROPOSITION 1.2.1 :*

(i)  $\beta'_2$  s'obtient en composant :

- le morphisme  $\partial : H_n(F, (F \cap H) \cup \partial F) \rightarrow H_{n-1}((F \cap H) \cup \partial F)$  (qui est surjectif car  $H_{n-1}(F) = 0$ ),
- l'isomorphisme  $H_{n-1}((F \cap H) \cup \partial F) \simeq H_{n-1}(T^0(F \cap H) \cup T^0(\partial F))$ ,
- le morphisme canonique de  $H_{n-1}(T^0(F \cap H) \cup T^0(\partial F))$  dans  $H_{n-1}(T^0(F \cap H) \cup T^0(\partial F), T^0(\partial F))$ ,
- l'isomorphisme  $H_{n-1}(T^0(F \cap H) \cup T^0(\partial F), T^0(\partial F)) \simeq H_{n-1}(F \cap H, \partial F \cap H)$  ;

(ii)  $\alpha'_2$  est défini au niveau des cycles comme  $\beta_2$  et par composition avec l'isomorphisme du LEMME 1.1.1.

### 1.3 Les formes d'intersection.

On définit, sur le produit  $H_n(F, F \cap H) \times H_n(F \setminus F \cap H)$ , dans le deuxième paragraphe de cette section, deux formes d'intersection, ainsi que deux formes de Seifert. Pour cela, on définit, dans la première partie

de cette section, les morphismes canoniques et variation qui permettent, via l'isomorphisme du LEMME 1.1.1, l'appariement d'un élément de  $H_n(F, F \cap H)$  et d'un élément de  $H_n(F \setminus F \cap H)$ .

On généralise les résultats connus dans le cas absolu (voir par exemple [1]) au cas de la singularité de bord  $(f, H)$ , après avoir défini formes d'intersection et formes de Seifert.

### 1.3.1 Les morphismes canoniques et variations.

REMARQUE. — Étant donné le choix de la fibration, la monodromie est l'identité sur  $\partial F$  et laisse  $F \cap H$  globalement invariant, donc, si  $a' \in H_n(F, (F \cap H) \cup \partial F)$  et si  $\tilde{a}'$  désigne un représentant de  $a'$ ,  $h(\tilde{a}') - \tilde{a}'$  est une  $n$ -chaîne de  $F$  à bord dans  $F \cap H$  et définit donc un élément de  $H_n(F, F \cap H)$ .

De même, si  $b'$  est un élément de  $H_n(F \setminus T^0(F \cap H), \partial F \setminus T^0(F \cap H))$  et  $\tilde{b}'$  un représentant de  $b'$ ,  $h(\tilde{b}') - \tilde{b}'$  définit un élément de  $H_n(F \setminus T^0(F \cap H))$ , c'est-à-dire de  $H_n(F \setminus F \cap H)$ .

DÉFINITION 1.3.1. — *Les morphismes canoniques et variations :*

- $c_1$  est le morphisme canonique de

$$H_n(F, F \cap H) \text{ dans } H_n(F, (F \cap H) \cup \partial F).$$

- $c_2$  est le morphisme de  $H_n(F \setminus F \cap H)$  dans  $H_n(F, (F \cap H) \cup \partial F)$  composé du morphisme canonique de

$$H_n(F \setminus F \cap H) \text{ dans } H_n(F \setminus F \cap H, \partial T^0(F \setminus F \cap H))$$

et de l'isomorphisme décrit dans le LEMME 1.1.1.

- $v_1$  est le morphisme de  $H_n(F, \partial F \cup (F \cap H))$  dans  $H_n(F, F \cap H)$  égal au morphisme défini au niveau des chaînes à bord par  $h - \text{Id}$  où  $h$  est la monodromie géométrique de la singularité  $f$ .

- $v_2$  est le morphisme de  $H_n(F, (F \cap H) \cup \partial F)$  dans  $H_n(F \setminus F \cap H)$  composé de l'isomorphisme décrit dans le LEMME 1.1.1, et du morphisme défini au niveau des chaînes à bord par  $h - \text{Id}$  où  $h$  est la monodromie géométrique de la singularité  $f$ .

PROPOSITION 1.3.2. —  $v_1$  et  $v_2$  sont des isomorphismes.

Démonstration. — On fait la démonstration pour  $v_1$ . La démonstration pour  $v_2$  est similaire, en remarquant que les isomorphismes considérés dans le LEMME 1.1.1, et dans sa démonstration, commutent avec la monodromie induite sur chacun des groupes d'homologie par la monodromie géométrique de la singularité  $f$ .

On a le diagramme commutatif suivant, où les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & H_n(F) & \longrightarrow & H_n(F, F \cap H) & \longrightarrow & H_{n-1}(F \cap H) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow v & & \downarrow v_1 & & \downarrow v \\
 0 & \longrightarrow & H_n(F, \partial F) & \longrightarrow & H_n(F, \partial F \cup (F \cap H)) & \longrightarrow & H_{n-1}(F \cap H, \partial F \cap H) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

$v_1$  est donc extension des deux morphismes variation définis pour la singularité  $f$  et pour la singularité  $f|_H$ , ceci via l'isomorphisme du LEMME 1.1.1. Ces deux morphismes sont des isomorphismes, d'où le résultat.  $\square$

### 1.3.2 Les formes d'intersection et de Seifert.

DÉFINITION 1.3.3. — *Les formes d'intersection et de Seifert relatives sont les suivantes :*

•  $I_1$  (resp.  $S_1$ ) est l'appariement de  $H_n(F, F \cap H)$  et  $H_n(F \setminus F \cap H)$  défini de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 & \forall (a, b) \in H_n(F, F \cap H) \times H_n(F \setminus F \cap H), \\
 & I_1(a, b) = \langle c_1(a), b \rangle, \quad S_1(a, b) = \langle v_1^{-1}(a), b \rangle.
 \end{aligned}$$

•  $I_2$  (resp.  $S_2$ ) est l'appariement de  $H_n(F \setminus F \cap H)$  et  $H_n(F, F \cap H)$  défini de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 & \forall (b, a) \in H_n(F \setminus F \cap H) \times H_n(F, F \cap H), \\
 & I_2(b, a) = \langle c_2(b), a \rangle, \quad S_2(b, a) = \langle v_2^{-1}(b), a \rangle.
 \end{aligned}$$

REMARQUE. — Soit  $\alpha$  une  $n$  chaîne de  $F$  à bord dans  $F \cap H$ ; soit  $\beta$  un  $n$  cycle de  $F \setminus F \cap H$ . On suppose que  $\alpha$  et  $\beta$  se coupent transversalement en un point  $p$ . Alors, on définit l'indice d'intersection de  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $F$  en  $p$ , soit  $i_{p,F}(\alpha, \beta)$  de la manière suivante (voir le cas absolu par exemple dans [6]) :

DÉFINITION 1.3.4.

Soient  $v_1, \dots, v_n$  et  $w_1, \dots, w_n$  des bases respectives de  $T_p\alpha$  et  $T_p\beta$ .

$$i_{p,F}(\alpha, \beta) = \begin{cases} +1 & \text{si } v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n \text{ est une} \\ & \text{base orientée de } T_p(F); \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, l'indice d'intersection de  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $F$ , soit  $i_F(\alpha, \beta)$  est défini ainsi :



DÉFINITION 1.3.5.

$$i_F(\alpha, \beta) = \sum_{p \in \alpha \cap \beta} i_{p,F}(\alpha, \beta).$$

On a le lemme suivant :

LEMME 1.3.6. — *L'indice d'intersection  $i_F(\alpha, \beta)$  des  $n$ -chaînes  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $F$  ne dépend que de la classe de  $\alpha$  dans  $H_n(F, F \cap H)$  et de la classe de  $\beta$  dans  $H_n(F \setminus F \cap H)$ .*

*Démonstration.* — Soit  $\gamma$  une  $n$ -chaîne de  $F$  à bord dans  $F \cap H$  qui est nulle dans  $H_n(F, F \cap H)$ . Soit  $\delta$  un  $n$ -cycle de  $F \setminus F \cap H$  qui est nul dans  $H_n(F \setminus F \cap H)$ .

1)  $i_F(\gamma, \beta) = 0$ . En effet,  $\gamma = \gamma_1 + \partial\gamma_2$ , où  $\gamma_1$  est une  $n$ -chaîne de  $F \cap H$  et  $\gamma_2$  est une  $(n+1)$ -chaîne de  $F$ . On a :  $i_F(\gamma, \beta) = i_F(\gamma_1, \beta) + i_F(\partial\gamma_2, \beta)$ . Or,  $i_F(\gamma_1, \beta)$  est nul car  $\gamma_1$  et  $\beta$  ne se rencontrent pas.  $i_F(\partial\gamma_2, \beta)$  est nul car l'indice d'intersection dans  $F$  d'un bord et d'un cycle est nul.

2)  $i_F(\alpha, \delta) = 0$ . En effet,  $\delta = \partial\delta_1$  où  $\delta_1$  est une  $(n+1)$ -chaîne de  $F \setminus F \cap H$ . Cette chaîne  $\delta_1$  ne rencontre pas le bord de  $\alpha$  d'où le résultat.

1) et 2) donnent la preuve du lemme.  $\square$

Par la suite, on désigne, pour  $a \in H_n(F, F \cap H)$  et  $b \in H_n(F \setminus F \cap H)$ , par  $i_F(a, b)$  l'indice d'intersection dans  $F$  d'un représentant quelconque de  $a$  avec un représentant quelconque de  $b$ .

On a alors le lemme suivant :

LEMME 1.3.7. —  $I_1(a, b) = i_F(a, b)$ ;  $I_2(b, a) = i_F(b, a)$ .

D'où la proposition suivante :

PROPOSITION 1.3.8. —  $I_1(a, b) = (-1)^n I_2(b, a)$ .

*Extension des propriétés des formes d'intersection et de Seifert définies sur  $H_n(F)$  et  $H_{n-1}(F \cap H)$ .*

(Dans ce paragraphe, on désigne par  $M$  soit l'un, soit l'autre des deux groupes isomorphes d'homologie relative  $H_n(F, \partial F \cup (F \cap H))$  et  $H_n(F \setminus T^0(F \cap H), \partial(F \setminus T^0(F \cap H)))$ , le contexte décidant clairement duquel des deux il s'agit.)

PROPOSITION 1.3.9. —  $\forall a' \in M, \forall b' \in M$

$$(*) \quad I_1(v_1(a'), v_2(b')) + \langle a', v_2(b') \rangle + (-1)^n \langle b', v_1(a') \rangle = 0,$$

$$(**) \quad I_2(v_2(b'), v_1(a')) + (-1)^n \langle a', v_2(b') \rangle + \langle b', v_1(a') \rangle = 0.$$

*Démonstration.* — On désigne par  $\tilde{a}'$  (resp.  $\tilde{b}'$ ) des représentants de  $a'$  (resp.  $b'$ ). On a :  $I_1(v_1(a'), v_2(b')) = i_F(h(\tilde{a}') - \tilde{a}', h(\tilde{b}') - \tilde{b}')$ . Or,  $i_F(h(\tilde{a}'), h(\tilde{b}')) = i_F(\tilde{a}', \tilde{b}')$ . Donc,

$$I_1(v_1(a'), v_2(b')) = 2i_F(\tilde{a}', \tilde{b}') - i_F(\tilde{a}', h(\tilde{b}')) - i_F(h(\tilde{a}'), \tilde{b}').$$

D'autre part,

$$\langle a', v_2(b') \rangle = i_F(\tilde{a}', h(\tilde{b}') - \tilde{b}')$$

et  $\langle b', v_1(a') \rangle = i_F(\tilde{b}', h(\tilde{a}') - \tilde{a}') = (-1)^n i_F(h(\tilde{a}') - \tilde{a}', \tilde{b}')$ .

D'où (\*). La partie (\*\*) s'en déduit immédiatement puisque :

$$I_1(v_1(a'), v_2(b')) = (-1)^n I_2(v_2(b'), v_1(a')). \quad \square$$

THÉORÈME 1.3.10. — Soit  $\varphi_2$  (resp.  $\varphi_1$ ), le morphisme de  $H_n(F, F \cap H)$  dans  $M$  (resp. de  $H_n(F \setminus F \cap H)$  dans  $M$ ) défini de la manière suivante :

$$\forall a \in H_n(F, F \cap H), \forall b \in H_n(F \setminus F \cap H), \langle \varphi_2(a), b \rangle = \langle v_2^{-1}(b), a \rangle,$$

$$\forall a \in H_n(F, F \cap H), \forall b \in H_n(F \setminus F \cap H), \langle \varphi_1(b), a \rangle = \langle v_1^{-1}(a), b \rangle.$$

Soit  $h_1$  (resp.  $h_2$ ) la monodromie définie sur  $H_n(F, F \cap H)$  (resp. sur  $H_n(F \setminus F \cap H)$ ). On a :

(i)  $h_1 = (-1)^{n+1} v_1 \circ \varphi_2, \quad h_2 = (-1)^{n+1} v_2 \circ \varphi_1;$

(ii)  $I_1(a, b) + S_1(a, b) + (-1)^n S_2(b, a) = 0;$

(iii)  $I_2(b, a) + (-1)^n S_1(a, b) + S_2(b, a) = 0.$

*Démonstration.* — Les deux dernières formules sont les conséquences de la PROPOSITION 1.3.9. On remarque par ailleurs que  $h_1 = id + v_1 \circ c_1$ . Or :  $\langle c_1(a), b \rangle = -\langle v_1^{-1}(a), b \rangle - (-1)^n \langle v_1^{-1}(b), a \rangle$  (cf. PROPOSITION 1.3.9). Donc,  $c_1 = -v_1^{-1} - (-1)^n \varphi_2$ . D'où  $h_1 = -(-1)^n v_1 \circ \varphi_2 = (-1)^{n+1} v_1 \circ \varphi_2$ . On a la même preuve pour  $h_2$ .  $\square$

*Interprétation géométrique des formes de Seifert relatives.*

Dans le cas absolu, on a l'interprétation géométrique de la forme de Seifert, via les coefficients d'enlacement des cycles de la sphère  $S^{2n+1}$ . Ici, on étend cette interprétation géométrique aux deux formes de Seifert relatives.

Dans la suite, on fait les hypothèses suivantes. Soit  $\rho$  stictement positif et suffisamment petit pour que :

- si  $K = f^{-1}(0) \cap S_\rho^{2n+1};$

• si  $T$  est un voisinage tubulaire ouvert assez petit de  $K$  dans  $S_\rho^{2n+1}$  alors  $\Phi : S_\rho^{2n+1} \setminus T \rightarrow S^1$ , définie par  $\phi(x) = f(x)/|f(x)|$  est la fibration de Milnor de  $f$  et  $\Phi|_H : S_\rho^{2n+1} \setminus T \cap H \rightarrow S^1$  est la fibration de Milnor de  $f|_H$ .

*Interprétation géométrique de la forme de Seifert absolue.*

On désigne par  $\ell_{S^{2n+1}}(\cdot, \cdot)$  le coefficient d'enlacement des  $n$  cycles de  $S^{2n+1}$ . Soit, pour tout  $(a, b)$  élément de  $H_n(F) \times H_n(F)$ ,  $b^*$  l'image de  $b$  par la monodromie induite sur  $H_n(F)$  par un demi-tour dans la base de la fibration.

On a le résultat suivant (voir [1]) :

THÉORÈME 1.3.11. —  $S(a, b) = \ell_{S^{2n+1}}(a, b^*)$ .

*Interprétation géométrique de  $S_1$ .*

Soit  $a$  un élément de  $H_n(F, F \cap H)$ . Soit  $b$  un élément de  $H_n(F \setminus F \cap H)$ , et  $b^*$  son image par la monodromie induite par un demi-tour dans la base de la fibration. Considéré comme un  $n$ -cycle de  $S^{2n+1} \setminus S^{2n-1}$ , dont le  $n$ -ième groupe d'homologie est nul,  $b^*$  s'écrit :  $b^* = \partial\beta$  où  $\beta$  est une  $(n+1)$ -chaîne de  $S^{2n+1} \setminus S^{2n-1}$ .

LEMME 1.3.12.

$i_{S^{2n+1}}(a, \beta)$  est indépendant du choix de  $\beta$  vérifiant  $b^* = \partial\beta$ .

*Démonstration.* — Si  $\partial\beta = 0$ ,  $i_{S^{2n+1}}(a, \beta) = 0$  car le bord de  $a$ , qui est dans  $F \cap H$  donc dans  $S^{2n-1}$  ne rencontre pas  $\beta$

THÉORÈME 1.3.13 (voir THÉORÈME 1.3.11)

$$S_1(a, b) = (-1)^n i_{S^{2n+1}}(a, \beta).$$

*Démonstration.* — (On reprend la démonstration de [1] faite pour le cas absolu.)  $b$  est un élément de  $H_n(\Phi^{-1}(1) \setminus \Phi|_H^{-1}(1))$ . Soit  $a'$  un élément de  $H_n(\Phi^{-1}(1), \Phi|_H^{-1}(1) \cup \partial\Phi^{-1}(1))$ . Soit  $\bar{a}'$  une  $n$ -chaîne de  $\Phi^{-1}(1)$  à bord dans  $\Phi|_H^{-1}(1) \cup \partial\Phi^{-1}(1)$ , représentant  $a'$ . Soit l'application  $\Gamma : [0, 1] \rightarrow S^{2n+1}$  définie par  $\Gamma(t, c) = c \exp(2i\pi t)$ . Par ce morphisme :

- $\{0\} \times \bar{a}'$  a pour image  $\bar{a}'$  ;
- $\{1\} \times \bar{a}'$  a pour image  $h(\bar{a}')$  ;
- $\{0\} \times \partial\bar{a}'$  a pour image  $\partial\bar{a}'$  ;
- $\{1\} \times \partial\bar{a}'$  a pour image  $h(\partial\bar{a}')$ .

Il définit donc dans la sphère  $S^{2n+1}$ , en contractant  $\partial T$  et  $\partial T \cap H$  le long des rayons, une  $(n+1)$ -chaîne  $A$  dont le bord vérifie :  $\partial A = v_1^{-1}(a') - A_H$ , où  $A_H$  est une  $n$ -chaîne de  $S^{2n-1}$  dont le bord est  $v(\partial a')$ . ( $v_1$  étant extension des deux morphismes variation absolus, on a :  $\partial(v_1(a')) = v(\partial a')$ .)

On a donc :

$$i_{S^{2n+1}}(A, b^*) = i_{S^{2n+1}}(a^*, b^*) \text{ et } i_{S^{2n+1}}(A, b^*) = i_{\Phi^{-1}(1)}(a', b)$$

d'une part. Par ailleurs,  $i_{S^{2n+1}}(A, b^*) = \ell_{S^{2n+1}}(\partial A, b^*)$ . Or,

$$\begin{aligned} \ell_{S^{2n+1}}(\partial A, b^*) &= (-1)^n i_{S^{2n+1}}(\partial A, \beta) \\ &= i_{S^{2n+1}}(v_1(a') - A_H, \beta) \\ &= i_{S^{2n+1}}(v_1(a'), \beta), \end{aligned}$$

car  $\beta$  ne rencontrant pas  $S^{2n-1}$ ,  $i_{S^{2n+1}}(A_H, \beta) = 0$ . (On remarque que  $i_{S^{2n+1}}(v_1(a'), \beta)$  est bien défini car  $\partial v_1(a') = v(\partial a')$  est dans  $S^{2n-1}$ .) Si  $a' = v_1^{-1}(a)$ ,

$$i_{S^{2n+1}}(v_1(a'), \beta) = i_{S^{2n+1}}(a, \beta).$$

On a donc :

$$i_{S^{2n+1}}(A, b^*) = i_{\Phi^{-1}(1)}(a', b) = i_F(v_1^{-1}(a), b)$$

et  $i_{S^{2n+1}}(A, b^*) = (-1)^n i_{S^{2n+1}}(a, \beta)$ .  $\square$

*Lien avec les coefficients d'enlacement dans  $S^{2n+1}$  et  $S^{2n-1}$ .*

1) Si  $\partial a = 0$ , donc si  $a$  et  $b$  définissent des éléments de  $H_n(F)$ , on a :  $S_F(a, b) = \ell_{S^{2n+1}}(a, b) = (-1)^n i_{S^{2n+1}}(a, \partial \beta)$  (et on retrouve :  $S_1(a, b) = S_F(a, b)$ ).

2) Si  $b$  définit 0 dans  $H_n(F)$  donc si  $b$  est le bord d'un voisinage tubulaire  $Tb_0$  dans  $F$ , c'est-à-dire dans  $\Phi^{-1}(1)$  d'un  $(n-1)$  cycle  $b_0$  de  $F \cap H$  (c'est-à-dire de  $\Phi|_H^{-1}(1)$ ), alors :

$$i_{S^{2n+1}}(v_1(a') - A_H, \beta) = i_{S^{2n+1}}(v_1(a') - A_H, Tb_0^*).$$

Or,  $i_{S^{2n+1}}(v_1(a'), Tb_0^*) = 0$  pour  $Tb_0$  suffisamment petit, car  $v_1(a')$  est à bord dans  $F \cap H$  qui ne rencontre pas  $b_0^*$  (à cause du demi tour). Par ailleurs,

$$i_{S^{2n+1}}(A_H, Tb_0^*) = i_{S^{2n+1}}(A_H, b_0^*) = \ell_{S^{2n-1}}(v(\partial a'), b_0^*).$$

Si  $a' = v_1^{-1}(a)$ , on a donc :

$$i_{S^{2n+1}}(a, \beta) = -(-1)^n S_{F \cap H}(a, b) = -(-1)^n \ell_{S^{2n-1}}(\partial a, b_0)$$

$$i_{S^{2n+1}}(a, \beta) = (-1)^{n-1} \ell_{S^{2n-1}}(\partial a, b_0)$$

(et on retrouve :  $S_1(a, b) = (-1)^{n-1} S_{F \cap H}(\partial a, b)$ ).

*Interprétation géométrique de  $S_2$ .*

Soit  $a$  un élément de  $H_n(F, F \cap H)$ . Considéré comme une  $n$ -chaîne de  $S^{2n+1}$  à bord dans  $S^{2n-1}$ ,  $a^*$ , l'image de  $a$  par la monodromie induite par un demi tour dans la base de la fibration, s'écrit :  $a^* = \alpha_0 + \partial \alpha_1$ , où  $\alpha_0$  est une  $n$ -chaîne de  $S^{2n-1}$  et  $\alpha_1$  est une  $(n+1)$ -chaîne de  $S^{2n+1}$ . Soit  $b$  un élément de  $H_n(F \setminus F \cap H)$ .

LEMME 1.3.14. —  $i_{S^{2n+1}}(b, \alpha_1)$  est indépendant du choix de  $\alpha_1$  tel que

$$a^* = \alpha_0 + \partial\alpha_1.$$

*Démonstration.* — Soient  $\alpha'_1$  et  $\alpha'_0$  comme plus haut, vérifiant

$$a^* = \alpha'_0 + \partial\alpha'_1.$$

$\partial(\alpha'_1 - \alpha_1) = \alpha_0 - \alpha'_0$ . Donc,  $\alpha'_1 - \alpha_1$  est une  $(n+1)$ -chaîne de  $S^{2n+1}$  à bord dans  $S^{2n-1}$  et on peut donc écrire :  $\alpha'_1 - \alpha_1 = \gamma_0 + \partial\gamma_1$  où  $\gamma_0$  est une  $(n+1)$ -chaîne de  $S^{2n-1}$  et  $\gamma_1$  est une  $(n+2)$ -chaîne de  $S^{2n+1}$ . Donc,

$$i_{S^{2n+1}}(b, \alpha'_1 - \alpha_1) = i_{S^{2n+1}}(b, \gamma_0) + i_{S^{2n+1}}(b, \partial\gamma_1) = 0$$

car  $b$  ne rencontre pas  $F \cap H$ , c'est-à-dire  $S^{2n-1}$ .

THÉORÈME 1.3.15. —  $S_2(b, a) = (-1)^n i_{S^{2n+1}}(b, \alpha_1)$ .

*Démonstration.* — Elle est du même type que celle du THÉORÈME 1.3.13.

*Lien avec les coefficients d'enlacement dans  $S^{2n+1}$  et  $S^{2n-1}$ .*

1) Si  $\partial a = 0$ ,  $i_{S^{2n+1}}(b, \alpha_1) = l_{S^{2n+1}}(b, a) = (-1)^n l_{S^{2n+1}}(a, b)$  (et on retrouve :  $S_2(b, a) = (-1)^n S_F(a, b)$ ).

2) Si  $b$  définit 0 dans  $H_n(F)$ , c'est-à-dire si  $b = \partial T b_0$  où  $b_0$  appartient à  $H_{n-1}(F \cap H)$ , on a :

$$i_{S^{2n+1}}(b, \alpha_1) = \ell_{S^{2n+1}}(b, \partial\alpha_1) = (-1)^n i_{S^{2n+1}}(T b_0, \partial\alpha_1).$$

Or,  $\partial\alpha_1 = a^* - \alpha_0$ ;  $a^*$  ne rencontre pas  $T b_0$  et  $T b_0$  coupe  $\alpha_0$  dans  $\Phi_{|H}^{-1}(1)$ . Donc,  $i_{S^{2n+1}}(b, \alpha_1) = (-1)^{n-1} i_{S^{2n-1}}(b_0, \alpha_0)$ . Or,  $\partial\alpha_0 = \partial a^*$ , d'où :

$$i_{S^{2n+1}}(b, \alpha_1) = (-1)^{n-1} l_{S^{2n-1}}(b_0, \partial a^*)$$

(et on retrouve :  $S_2(b, a) = (-1)^{n-1} S_{F \cap H}(b_0, \partial a) = S_{F \cap H}(\partial a, b_0)$ ).

## 2. Déploiements

On rappelle la définition de la  $\mathcal{R}_H$ -équivalence ainsi que la construction de l'espace tangent à l'espace des déploiements infinitésimaux non  $\mathcal{R}_H$ -triviaux de  $f$ , où  $(f, H)$  est une singularité de bord.

Cet espace tangent est extension des espaces tangents aux déploiements infinitésimaux non  $\mathcal{R}$ -triviaux de  $f$  et  $f|_H$ , ceci de deux manières duales. Ce qui amène à construire deux déploiements  $\mathcal{R}_H$ -miniversels particuliers, tous deux versels pour  $f$ , et dont les "restrictions" à  $H$  sont  $\mathcal{R}$ -verselles

pour  $f|_H$ ; cependant l'un rend mieux compte de la  $\mathcal{R}$ -versalité vis à vis de  $f$ , l'autre vis à vis de  $f|_H$ .

Pour les déformations  $\mathcal{R}_H$ -miniverselles, on définit le "discriminant relatif" et le "lieu critique relatif", ainsi que leurs liens avec discriminants et lieux critiques de la déformation, et de la restriction à  $H$  de la déformation.

La construction de ces déploiements permet également la construction de "bases distinguées" non seulement pour le groupe d'homologie relative  $H_n(F, F \cap H)$  (cf. [1]), mais aussi pour  $H_n(F \setminus F \cap H)$ .

Ce qui permet d'étudier l'action des opérateurs de monodromie sur ces groupes et de montrer des formules de Picard Lefschetz (THÉORÈME 2.3.7).

Dans la suite, on prendra  $H = \{x_0 = 0\}$ ,  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  étant les coordonnées dans  $\mathbb{C}^{n+1}$ . De plus  $f : X_0 \rightarrow \mathbb{D}$  est un bon représentant du germe  $f$ .

## 2.1 Déploiements $\mathcal{R}_H$ miniversels (cf. [1]).

DEFINITION 2.1.1. — Soient  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  deux déploiements de  $f$  de base  $S$ ;  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  sont  $\mathcal{R}_H$ -équivalents si et seulement s'il existe un  $S$ -isomorphisme  $\Psi$  de  $X_0 \times S$  vérifiant :

- 1)  $\Psi|_{X_0 \times \{s\}}(H) = H$  pour tout  $s \in S$  ;
- 2)  $\Phi_1 = \Phi_2 \circ \Psi$ .

On a la proposition suivante :

PROPOSITION 2.1.2. — L'espace tangent des déploiements infinitésimaux non  $\mathcal{R}_H$  triviaux de  $f$  est :  $\mathcal{O}_{X_0,0}/(x_0 \partial f / \partial x_0, \dots, \partial f / \partial x_n)$ .

Démonstration. — Elle se fait comme les démonstrations du même type concernant la détermination des bases de déploiements. Voir par exemple [8].

Dans la suite de ce paragraphe, on adopte les notations suivantes :

$$\mathcal{I}_0 = \left( \frac{\partial f}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right); \quad \mathcal{I}_1 = \left( x_0, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right);$$

$$\mathcal{I} = \left( x_0 \frac{\partial f}{\partial x_0}, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

LEMME 2.1.3. — On a les deux suites exactes suivantes :

$$1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_{X_0}/\mathcal{I}_1 \rightarrow \mathcal{O}_{X_0}/\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{O}_{X_0}/\mathcal{I}_0 \rightarrow 0,$$

où le morphisme  $\mathcal{O}_{X_0}/\mathcal{I}_1 \rightarrow \mathcal{O}_{X_0}/\mathcal{I}$  est la multiplication par  $\partial f/\partial x_0$  et le morphisme  $\mathcal{O}_{X_0}/\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{O}_{X_0}/\mathcal{I}_0$  est la projection naturelle  $p_1$ .

$$2) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_{X_0}/\mathcal{I}_0 \rightarrow \mathcal{O}_{X_0}/\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{O}_{X_0}/\mathcal{I}_1 \rightarrow 0,$$

où le morphisme  $\mathcal{O}_{X_0}/\mathcal{I}_0 \rightarrow \mathcal{O}_{X_0}/\mathcal{I}$  est la multiplication par  $x_0$  et le morphisme  $\mathcal{O}_{X_0}/\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{O}_{X_0}/\mathcal{I}_1$  est la projection naturelle  $p_2$ .

*Démonstration :*

1) Un élément du noyau de  $p_1$  est dans l'intersection des idéaux  $\mathcal{I}_0$  d'une part, et  $\mathcal{I}$  d'autre part. Or  $g\partial f/\partial x_0$  est dans l'idéal  $\mathcal{I}$  si et seulement si il existe  $k$  tel que  $(g-kx_0)\partial f/\partial x_0$  est dans l'idéal  $(\partial f/\partial x_1, \dots, \partial f/\partial x_n)$ ;  $f$  étant à singularité isolée,  $\mathcal{I}_0$  définit une intersection complète, donc  $(g-kx_0)\partial f/\partial x_0$  est dans l'idéal  $(\partial f/\partial x_1, \dots, \partial f/\partial x_n)$  si et seulement si :

$$g - kx_0 = \sum_{i \geq 1} \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

et

$$g \frac{\partial f}{\partial x_0} = \frac{\partial f}{\partial x_0} \left( kx_0 + \sum_{i \geq 1} \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right),$$

ce qui établit la première partie du lemme.

2)  $\mathcal{I}_0$  définit une intersection complète, donc, le noyau de  $p_2$  est  $x_0\mathcal{O}_{X_0}/\mathcal{I}_0$ .  $\square$

COROLLAIRE 2.1.4.

1) On note  $\mu_0, \mu_1$ , et  $\mu$  les dimensions respectives de  $\mathcal{O}_{X_0}/\mathcal{I}_0$ ,  $\mathcal{O}_{X_0}/\mathcal{I}_1$  et  $\mathcal{O}_{X_0}/\mathcal{I}$ ; alors :

$$\mu_0 + \mu_1 = \mu.$$

2) Soit  $\Phi_f(\star H) : X_0 \times T \rightarrow S = D \times T$  le déploiement de  $f$  défini par :  $\Phi_f(\star H)(x, \tau) = (F_j(\star H)(x, \tau), \tau)$  avec

$$F_j(\star H)(x, \tau) = f(x) + \sum_{i=0}^{\mu-1} \tau_i \xi_i$$

où  $\{\xi_i\}_i$  forment une base de  $\mathcal{O}_{X_0}/\mathcal{I}$  (avec  $\xi_0 = 1$ ) :

(a)  $\Phi_f(\star H)$  est un bon représentant de déploiement  $\mathcal{R}_H$ -miniversel de  $f$  et un bon représentant de déploiement  $\mathcal{R}$ -versel de  $f$ .

(b) Soit  $\Phi_f(\star H)|_H : X_0 \times T \rightarrow D \times T = S$  le morphisme défini par :

$$\Phi_f(\star H)|_H(x_0, x_1, \dots, x_n) = \Phi_f(\star H)(0, x_1, \dots, x_n).$$

$\Phi_f(\star H)|_H$  est un bon représentant de déploiement  $\mathcal{R}$ -versel de  $f|_H$ .

*Démonstration.* — (On montre la deuxième partie du corollaire.)

(a) Le morphisme  $p_1$  est induit par l'inclusion de l'espace tangent à la  $\mathcal{R}_H$  orbite de  $f$  dans  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1}}$  dans l'espace tangent à la  $\mathcal{R}$ -orbite de  $f$ . Ce morphisme est surjectif; d'autre part, si  $\Phi_f : X_0 \times T' \rightarrow D \times T'$  est le déploiement  $\mathcal{R}$ -miniversel de  $f$ , on sait que  $\Phi_f(\star H)$  se déduit de  $\Phi_f$  par un changement de base  $K' : S \rightarrow S'$ ; celui-ci est une submersion donc  $\Phi_f(\star H)$  est versel.

(b)  $\Phi_f(\star H)|_H$  est un déploiement de  $f|_H$  qui se déduit donc du déploiement  $\mathcal{R}$ -versel de  $f|_H$  par un changement de bases  $K''$ , qui, infinitésimalement est égal à  $p_2$ ; ce changement de base est donc submersif et  $\Phi_f(\star H)|_H$  est  $\mathcal{R}$ -versel pour  $f|_H$ .  $\square$

Par la suite, on considèrera les deux déploiements  $\mathcal{R}_H$ -miniversels suivants :

1)  $\Phi_f^1(\star H)$ , avec

$$F_f^1(\star H)(x, \tau', \tau'') = f(x) + \sum_{i \geq 1} \tau'_i \phi'_i + \frac{\partial f}{\partial x_0} \left( \sum_{i \geq 0} \tau''_i \phi''_i \right),$$

les coordonnées sur  $S$  étant :

$$(t_1, \tau'_1, \dots, \tau'_{\mu_0-1}, \tau''_0, \dots, \tau''_{\mu_1-1})$$

(on fait  $\tau'_0 = 0$ ).

2)  $\Phi_f^2(\star H)$ , avec

$$F_f^2(\star H)(x, \tau', \tau'') = f(x) + x_0 \sum_{i \geq 0} \tau'_i \phi'_i + \left( \sum_{i \geq 1} \tau''_i \phi''_i \right),$$

les coordonnées sur  $S$  étant :

$$(\tau'_0, \dots, \tau'_{\mu_0-1}, t_2, \tau''_1, \dots, \tau''_{\mu_1-1})$$

(on fait  $\tau''_0 = 0$ ).

Le changement de bases  $K$  entre  $\Phi_f^1(\star H)$  et  $\Phi_f^2(\star H)$  fait correspondre  $t_1$  à  $t_2$ .

## 2.2 Déformations $\mathcal{R}_H$ miniverselles, lieu critique relatif, discriminant relatif.

### 2.2.1 Déformation.

Soit  $\mathcal{X}_0 = \{f = 0\}$ ; pour  $k \in \{1, 2\}$ , soient

$$\mathcal{X}_f^k(\star H) = \{F_f^k(\star H) = 0\}$$



et  $\gamma_f^k(\star H)$  le morphisme de  $\mathcal{X}_f^k(\star H)$  sur  $T_k$ , restriction à  $\mathcal{X}_f^k(\star H)$  de la projection de  $X = X_0 \times T_k$  sur  $T_k$  (les coordonnées dans  $T_1$  sont  $(\tau'_1, \dots, \tau'_{\mu_0-1}, \tau''_0, \dots, \tau''_{\mu_1-1})$  et les coordonnées dans  $T_2$  sont  $(\tau'_0, \dots, \tau'_{\mu_0-1}, \tau''_1, \dots, \tau''_{\mu_1-1})$ ).

DÉFINITION 2.2.1. —  $\gamma_f^k(\star H)$  est une déformation  $\mathcal{R}_H$ -miniverselle de  $\mathcal{X}_0$ .

Soit  $C_{\Phi_f^k(\star H)}$  le lieu critique de  $\gamma_f^k(\star H)$ .

PROPOSITION 2.2.2. —  $C_{\Phi_f^k(\star H)}$  est lisse, pour  $k \in \{1, 2\}$ .

Démonstration. — Pour  $k \in \{1, 2\}$ ,  $\Phi_f^k(\star H)$  est un déploiement  $\mathcal{R}$ -versel de  $f$ ; donc  $\gamma_f^k(\star H)$  est le produit d'une déformation  $\mathcal{R}$ -miniverselle de  $\mathcal{X}$  par l'identité sur un espace lisse. Donc, le lieu critique de  $C_{\Phi_f^k(\star H)}$  est lisse.

2.2.2 Lieu critique relatif et discriminant relatif.

Notations : pour  $k \in \{1, 2\}$ , on désigne par  $D_{\Phi_f^k(\star H)}$  le discriminant associé à  $\Phi_f^k(\star H)$ ,  $C_{\Phi_f^k(\star H)}$  le lieu critique associé; on désigne par  $D_{\Phi_f^k(\star H)|H}$  le discriminant associé à  $\Phi_f^k(\star H)|_H$ ,  $C_{\Phi_f^k(\star H)|H}$  le lieu critique associé.

On a :

$$C_{\Phi_f^k(\star H)} = \text{Specan} \left[ \mathcal{O}_X / \left( \frac{\partial F_f^k(\star H)}{\partial x_0}, \frac{\partial F_f^k(\star H)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F_f^k(\star H)}{\partial x_n} \right) \right],$$

$$C_{\Phi_f^k(\star H)|H} = \text{Specan} \left[ \mathcal{O}_X / \left( x_0, \frac{\partial F_f^k(\star H)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F_f^k(\star H)}{\partial x_n} \right) \right].$$

DÉFINITION 2.2.3.

1) Le lieu critique, relatif à  $H$ , de  $\Phi_f^k(\star H)$ , noté  $C_f^k(\star H)$ , est défini par :

$$C_f^k(\star H) = \text{Specan} \left[ \mathcal{O}_X / \left( x_0 \frac{\partial F_f^k(\star H)}{\partial x_0}, \frac{\partial F_f^k(\star H)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F_f^k(\star H)}{\partial x_n} \right) \right].$$

2) Le discriminant, relatif à  $H$ , de  $\Phi_f^k(\star H)$ , noté  $D_f^k(\star H)$  est l'image directe par  $\Phi_f^k(\star H)$  sur  $S$  de  $C_f^k(\star H)$ .

PROPOSITION 2.2.4.

$$\mathcal{I}_{D_f^k(\star H)} \supset \mathcal{I}_{D_{\Phi_f^k(\star H)}} \mathcal{I}_{D_{\Phi_f^k(\star H)|H}}.$$

On a égalité aux points génériques du discriminant relatif.

Démonstration. — Pour prouver cette proposition, on utilise le lemme suivant :

LEMME 2.2.5. — (Si  $M$  est un  $\mathcal{O}_S$ -module cohérent, on désigne par  $\mathcal{F}_i(M)$  le  $i$ -ème idéal de Fitting de  $M$ .) Soit la suite exacte de  $\mathcal{O}_S$ -modules suivante :

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0.$$

On suppose que

$$\mathcal{F}_0(M') \neq 0, \quad \mathcal{F}_0(M'') \neq 0.$$

Alors :

$$\mathcal{F}_0(M') \cdot \mathcal{F}_0(M'') \subset \mathcal{F}_0(M).$$

Pour montrer la proposition, on applique le lemme précédent à l'une des deux suites exactes du LEMME 2.1.3 où  $f$  est remplacée par  $F$  (et qui est vrai aussi).  $\square$

### 2.3 Application : bases distinguées de $H_n(F, F \cap H)$ et de $H_n(F \setminus F \cap H)$ .

Soit  $\Phi_f(\star H) : X \rightarrow S = T \times \Delta$  un bon représentant de l'un ou l'autre des deux déploiements précédents tel que,  $\Delta$  étant le disque centré à l'origine de rayon  $\eta$  dans  $C$ , si  $t$  est un élément générique de  $T$  pour la restriction  $p_0$  à  $D_{\Phi_f(\star H)}$  (resp.  $p_1$  à  $D_{\Phi_f(\star H)|_H}$ ) de la projection  $\pi : T \times \Delta \rightarrow T$ ,  $p_0^{-1}(t)$  (resp.  $p_1^{-1}(t)$ ) est formé d'exactly  $\mu_0$  points (resp.  $\mu_1$  points) notés  $s_1, \dots, s_{\mu_0}$  (resp.  $\sigma_1, \dots, \sigma_{\mu_1}$ ).

D'autre part, on définit  $S_t$  par :  $S_t = \pi^{-1}(t)$ .

On suppose que  $\{s_i, 1 \leq i \leq \mu_0\} \cap \{\sigma_j, 1 \leq j \leq \mu_1\}$  est vide.

Soit  $s_0$  un élément de  $S_t \setminus (p_0^{-1}(t) \cup p_1^{-1}(t))$  et  $\ell_1, \dots, \ell_{\mu_0}$  (resp.  $d_1, \dots, d_{\mu_1}$ ) un système de chemins joignant  $s_0$  à chacun des  $s_1, \dots, s_{\mu_0}$  (resp. à chacun des  $\sigma_1, \dots, \sigma_{\mu_1}$ ) dans  $S_t \setminus (p_0^{-1}(t) \cup p_1^{-1}(t))$  et  $\{\lambda_i\}_{1 \leq i \leq \mu_0}$  (resp.  $\{\delta_j\}_{1 \leq j \leq \mu_1}$ ) une base de cycles évanescents de  $H_n(F_{s_0})$  (resp.  $H_{n-1}(F_{s_0} \cap H)$ ) définie par ce système de chemins.

#### 2.3.1 Base distinguée de $H_n(F_{s_0}, F_{s_0} \cap H)$ [1].

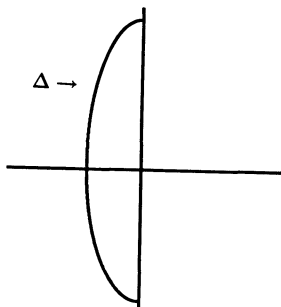
• Demi-cycle évanescent : pour  $1 \leq j \leq \mu_1$ , au dessus d'un point  $s$  d'un voisinage suffisamment petit de  $\sigma_j$ ,  $F_s$  a pour équation au voisinage du point singulier de  $F_{\sigma_j} \cap H$ , dans un système de coordonnées bien choisi,

$$\left\{ x_0 + \sum_{i \geq 1} x_i^2 = \alpha \right\} \quad (= F'_s).$$

On considère la sous-variété à bord de  $F'_s$  de dimension  $n$  donnée par :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(x_k) &= 0, \quad (0 \leq k \leq n); \\ \sum_{k \geq 1} x_k^2 &\leq \alpha, \quad x_1 = \sum_{2 \leq k \leq n} x_k^2 - \alpha \leq 0, \end{aligned}$$

qui définit un cycle à bord (élément de  $H_n(F'_s, F'_s \cap H)$ ) (voir la figure ci-après, pour le cas  $n = 1$ )



DÉFINITION 2.3.1. — Un tel cycle définit (par inclusion de  $F'_s$  dans  $F_s$ ) un demi-cycle évanescents de  $H_n(F_{s_0}, F_{s_0} \cap H)$  (par transformation le long du chemin  $d_j$ ).

• Soient  $\{\Lambda_i\}_{1 \leq i \leq \mu_0}$  les images des  $\{\lambda_i\}_{1 \leq i \leq \mu_0}$  dans  $H_n(F_{s_0}, F_{s_0} \cap H)$  et  $\{\Delta_j\}_{1 \leq j \leq \mu_1}$  l'ensemble des cycles évanescents associés aux chemins  $\{d_j\}_{1 \leq j \leq \mu_1}$ .

PROPOSITION 2.3.2. — La réunion des  $\{\Lambda_i\}_{1 \leq i \leq \mu_0}$  et des  $\{\Delta_j\}_{1 \leq j \leq \mu_1}$  forment une base de  $H_n(F_{s_0}, F_{s_0} \cap H)$ .

DÉFINITION 2.3.3. — Une telle base est appelée base distinguée de

$$H_n(F_{s_0}, F_{s_0} \cap H).$$

2.3.2 Base distinguée de  $H_n(F_{s_0} \setminus F_{s_0} \cap H)$ .

1) Pour  $1 \leq i \leq \mu_0$ , au dessus d'un point  $s$  d'un voisinage suffisamment petit de  $s_i$ ,  $F_s$  a pour équation dans un système de coordonnées bien choisi, au voisinage de son point singulier

$$\left\{ \sum_{i \geq 0} z_i^2 = \alpha \right\} \quad (= F'_s).$$

( $H$  n'a pas pour équation  $\{z_0 = 0\}$  dans ce système de coordonnées, car  $F'_s \cap H$  est lisse). Dans cette situation locale, on a l'isomorphisme  $\beta_1$

$$H_n(F'_s) \leftarrow H_n(F'_s \setminus F'_s \cap H).$$

On peut donc trouver un représentant du cycle évanescent de  $H_n(F'_s)$  qui évite  $F'_s \cap H$ , soit  $\lambda_i$ ; on note encore  $\lambda_i$  son image dans  $H_n(F_{s_0})$  par monodromie le long du chemin  $c_i$ .  $\phi_f(\star H)$  étant un déploiement  $\mathcal{R}_H$ -miniversel de  $f$ , cette monodromie envoie  $F_s \cap H$  sur  $F_{s_0} \cap H$  et réciproquement. Donc,  $\lambda_i$  ne rencontre pas  $F_{s_0} \cap H$ . Soit encore  $\tilde{\Lambda}_i$  l'élément de  $H_n(F_{s_0} \setminus F_{s_0} \cap H)$  qu'il définit.

2) Soit  $\{\tilde{\Lambda}_i\}_{1 \leq i \leq \mu_0}$  les éléments de  $H_n(F_{s_0} \setminus F_{s_0} \cap H)$  construits comme précédemment. Soit  $\{\tilde{\Delta}_j\}_{1 \leq j \leq \mu_1}$  les images des  $\{\delta_j\}_{1 \leq j \leq \mu_1}$  dans  $H_n(F_{s_0} \setminus F_{s_0} \cap H)$ .

PROPOSITION 2.3.4. — *La réunion des  $\{\tilde{\Lambda}_i\}_{1 \leq i \leq \mu_0}$  et des  $\{\tilde{\Delta}_j\}_{1 \leq j \leq \mu_1}$  forment une base de  $H_n(F_{s_0} \setminus F_{s_0} \cap H)$ .*

DÉFINITION 2.3.5. — *Une telle base est appelée base distinguée de*

$$H_n(F_{s_0} \setminus F_{s_0} \cap H).$$

### 2.3.3 Matrices des formes d'intersection et des formes de Seifert.

(On reprend dans cette partie les notations précédentes.)

On désigne par  $\{\Lambda_i^*\}_i, \{\Delta_j^*\}_j$  la base de  $H_n(F, \partial(F \cap H))$  duale de la base  $\{\Lambda_i\}_i, \{\Delta_j\}_j$  de  $H_n(F, F \cap H)$ , et par  $\{\tilde{\Lambda}_i^*\}_i, \{\tilde{\Delta}_j^*\}_j$  la base duale de la base  $\{\tilde{\Lambda}_i\}_i, \{\tilde{\Delta}_j\}_j$  de  $H_n(F \setminus F \cap H)$ .

Soit  $I_1$  la matrice de la forme d'intersection  $I_1$  définie sur

$$H_n(F, F \cap H) \times H_n(F \setminus F \cap H)$$

relativement aux bases  $\{\Lambda_i\}_i, \{\Delta_j\}_j$  de  $H_n(F, F \cap H)$  et  $\{\tilde{\Lambda}_i\}_i, \{\tilde{\Delta}_j\}_j$  de  $H_n(F \setminus F \cap H)$ .

Soit  $I_2$  la matrice de la forme d'intersection  $I_2$  définie sur

$$H_n(F \setminus F \cap H) \times H_n(F, F \cap H)$$

relativement aux bases  $\{\tilde{\Lambda}_i\}_i, \{\tilde{\Delta}_j\}_j$  de  $H_n(F \setminus F \cap H)$  et  $\{\Lambda_i\}_i, \{\Delta_j\}_j$  de  $H_n(F, F \cap H)$ .

On a :

1)  $\forall (i, i'), I_1(\Lambda_i, \tilde{\Lambda}_{i'}) = i_F(\Lambda_i, \tilde{\Lambda}_{i'})$  car  $i_F(\cdot, \cdot)$  ne dépend pas des représentants choisis dans  $H_n(F)$ .

2)  $\forall (i, j), I_1(\Lambda_i, \tilde{\Delta}_j) = 0$ .

Donc :

$$I_1 = \begin{pmatrix} I_f & 0 \\ N_1 & \mathcal{I}_1 \end{pmatrix}.$$

On remarque également que :

- 1)  $\forall (i, i'), I_2(\tilde{\Lambda}_i, \Lambda_{i'}) = i_F(\tilde{\Lambda}_i, \Lambda_{i'})$ ;
- 2)  $\forall (i, j), I_2(\tilde{\Delta}_j, \Lambda_i) = 0$ .

Donc :

$$I_2 = \begin{pmatrix} I_f & N_2 \\ 0 & \mathcal{I}_2 \end{pmatrix}.$$

On considère le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \leftarrow H_n(F, \partial F) & \xleftarrow{\alpha'_1} & H_n(F, \partial F \cup (F \cap H)) & \xleftarrow{\alpha'_2} & H_{n-1}(F \cap H, \partial F \cap H) & \leftarrow & 0 \\ & & \downarrow c_1 & & \downarrow c_2 & & \\ 0 \leftarrow H_n(F) & \xleftarrow{\beta_1} & H_n(F \setminus F \cap H) & \xleftarrow{\beta_2} & H_{n-1}(F \cap H) & \leftarrow & 0 \end{array}$$

On a :  $\beta_2(\delta_j) = \tilde{\Delta}_j$  et  $\alpha'_2(\delta_j^*) = \tilde{\Delta}_j^*$ . Donc,  $I_2(\tilde{\Delta}_i, \Delta_j) = I_{f|_H}(\delta_i, \delta_j)$ . D'autre part,  $\forall a \in H_n(F, F \cap H), \forall b \in H_n(F \setminus F \cap H)$ ,

$$I_1(a, b) = (-1)^n I_2(b, a).$$

REMARQUE. — Si  $M^t$  désigne la transposée d'une matrice carrée  $M$ , alors :

$$I_{f|_H} = (-1)^{n-1} I_{f|_H}^t.$$

D'où la proposition suivante :

PROPOSITION 2.3.6.

$$I_1 = \begin{pmatrix} I_f & 0 \\ N_1 & -I_{f|_H} \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} I_f & (-1)^n N_1^t \\ 0 & I_{f|_H} \end{pmatrix}.$$

### 2.3.4 Formules de Picard Lefschetz relatives.

Le but de ce paragraphe est de déterminer l'action sur  $H_n(F, F \cap H)$  (resp.  $H_n(F \setminus F \cap H)$ ) des opérateurs de monodromie  $h_{\ell_i, 1}$  et  $h_{d_j, 1}$  (resp.  $h_{\ell_i, 2}$  et  $h_{d_j, 2}$ ) associés aux lacets définis par les chemins  $\ell_i$  et  $d_j$ . On se place dans le cas où  $\{s_i, 1 \leq i \leq \mu_0\} \cap \{\sigma_j, 1 \leq j \leq \mu_1\} = \emptyset$ . La fibration de Milnor est choisie comme plus haut. On a le théorème suivant :

THÉORÈME 2.3.7. — Soit  $s_0 \in S \setminus D_f^k(\star H)$  pour  $k \in \{1, 2\}$ .

$$1) \forall x \in H_n(F_{s_0}, F_{s_0} \cap H)$$

$$h_{\ell_i,1}(x) = x + (-1)^{(n+1)(n+2)/2} I_1(x, \tilde{\Lambda}_i) \Lambda_i,$$

$$h_{d_j,1}(x) = x + (-1)^{n(n+1)/2+n} I_1(x, \tilde{\Delta}_j) \Delta_j.$$

$$2) \forall \tilde{x} \in H_n(F_{s_0} \setminus F_{s_0} \cap H)$$

$$h_{\ell_i,2}(\tilde{x}) = \tilde{x} + (-1)^{(n+1)(n+2)/2+n} I_2(\tilde{x}, \tilde{\Lambda}_i) \tilde{\Lambda}_i,$$

$$h_{d_j,2}(\tilde{x}) = \tilde{x} + (-1)^{n(n+1)/2} I_2(\tilde{x}, \tilde{\Delta}_j) \tilde{\Delta}_j.$$

*Démonstration.* — (On démontre la première partie, la deuxième se démontrant de la même façon, en remarquant que  $i_F(\tilde{x}, \Lambda_i) = (-1)^n I_2(\tilde{x}, \Lambda_i)$ .)

On remarque tout d'abord que les formules de Picard Lefschetz locales pour  $H_n(F)$  et  $H_{n-1}(F \cap H)$  sont établies. Or, localement, au dessus d'un point  $s_i$  (resp.  $\sigma_j$ ), on a

$$H_n(\tilde{F}_{s_i}) \simeq H_n(\tilde{F}_{s_i}, \tilde{F}_{s_i} \cap H)$$

(resp.  $H_n(\tilde{F}_{\sigma_j}, \tilde{F}_{\sigma_j} \cap H) \simeq H_{n-1}(\tilde{F}_{\sigma_j} \cap H)$ ) où  $\tilde{F}_{s_i}$  (resp.  $\tilde{F}_{\sigma_j} \cap H$ ) désigne la fibre de Milnor locale autour du point singulier quadratique de  $F_{s_i}$  (resp.  $F_{\sigma_j} \cap H$ ).

(Dans la suite de la démonstration, on reprend les notations de 2.3.1; on désigne par  $\text{var}_{\ell_i,1}$  (resp.  $\text{var}_{d_j,1}$ ) les morphismes variation associés aux opérateurs de monodromie  $h_{\ell_i,1}$  (resp.  $h_{d_j,1}$ ).

• Soit  $x$  un élément de  $H_n(F_{s_0}, \partial F_{s_0} \cup (F_{s_0} \cap H))$ ; on désigne encore par  $x$  son image par le transport le long du chemin  $l_i$  joignant  $s_0$  à  $s_i$ . Soit  $\tilde{x}$  un représentant de  $x$ . Par application de la suite de Mayer Vietoris, on voit que cet élément  $\tilde{x}$  se décompose en  $\tilde{x} = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$  où  $\tilde{x}_1$  est une chaîne dans  $F_{s_i} \setminus \tilde{F}_{s_i}$ , qui n'est donc pas touchée par la monodromie  $h_{\ell_i,1}$ , et où  $\tilde{x}_2$  est une chaîne de  $\tilde{F}_{s_i}$  à bord dans  $\partial \tilde{F}_{s_i}$  car  $F_{s_i} \cap H$  ne rencontre pas  $\tilde{F}_{s_i}$ . La chaîne  $\tilde{x}_2$  définit donc un élément  $x_2$  de  $H_n(\tilde{F}_{s_i}, \partial \tilde{F}_{s_i})$ , auquel on peut appliquer les formules classiques de Picard Lefschetz, i.e :

$$\text{var}_{\ell_i,1}(x_2) = (-1)^{(n+1)(n+2)/2} i_{\tilde{F}_{s_i}}(\tilde{x}_2, \lambda_i) \lambda_i.$$

On a donc :

$$\text{var}_{\ell_i,1}(x) = (-1)^{(n+1)(n+2)/2} i_{\tilde{F}_{s_i}}(\tilde{x}_2, \lambda_i) \Lambda_i.$$

Or,  $i_{\tilde{F}_i}(\tilde{x}_2, \lambda_i) = i_{F_i}(x_2, \lambda_i) = I_1(x, \tilde{\Lambda}_i)$ , la dernière égalité se déduisant de la PROPOSITION 2.3.6. D'où le résultat annoncé, qui se déduit de :

$$\text{var}_{\ell_i,1}(x) = (-1)^{(n+1)(n+2)/2} I_1(x, \tilde{\Lambda}_i) \Lambda_i.$$

• Soit  $x$  un élément de  $H_n(F_{s_0}, (F_{s_0} \cap H) \cup \partial F_{s_0})$ . On désigne encore par  $x$  son image par transport le long du chemin  $d_j$  joignant  $s_0$  à  $\sigma_j$ . Soit  $\tilde{x}$  un représentant de  $x$ . Cet élément se décompose (cf. suite exacte de Mayer Vietoris) en  $\tilde{x} = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$  où  $\tilde{x}_1$  ne rencontre pas  $\tilde{F}_{\sigma_j}$  et où  $\tilde{x}_2$  définit un élément de  $H_n(\tilde{F}_{\sigma_j}, (\tilde{F}_{\sigma_j} \cap H) \cup \partial \tilde{F}_{\sigma_j})$ . Or  $\tilde{x}_2$  définit un unique élément de  $H_{n-1}(\tilde{F}_{\sigma_j} \cap H, \partial \tilde{F}_{\sigma_j} \cap H)$  soit  $\tilde{x}'_2$  (via l'application réciproque de l'application  $\alpha'_2$  de la PROPOSITION 1.2.1 qui est ici un isomorphisme), on peut donc appliquer la formule de Picard Lefschetz locale ; on a :

$$\text{var}_{d_j,1}(\tilde{x}'_2) = (-1)^{n(n+1)/2} i_{\tilde{F}_{\sigma_j} \cap H}(\tilde{x}'_2, \delta_j) \delta_j.$$

Or,  $H_n(\tilde{F}_{\sigma_j}, \tilde{F}_{\sigma_j} \cap H \cup \partial \tilde{F}_{\sigma_j}) \simeq H_{n-1}(\tilde{F}_{\sigma_j} \cap H, \partial \tilde{F}_{\sigma_j} \cap H)$ . Donc,

$$\text{var}_{d_j,1}(\tilde{x}_2) = (-1)^{n(n+1)/2} i_{\tilde{F}_{\sigma_j} \cap H}(\tilde{x}'_2, \delta_j) \Delta_j.$$

Donc,

$$h_{d_j,1}(x) = x + (-1)^{n(n+1)/2} i_{F_{\sigma_j} \cap H}(\tilde{x}'_2, \delta_j) \Delta_j.$$

Or,  $I_1(\tilde{x}'_2, \tilde{\Delta}_j) = (-1)^n i_{F_{\sigma_j} \cap H}(x_2, \delta_j) = I_1(x, \tilde{\Delta}_j)$ , ceci par application de la proposition 2.3.6. Donc,

$$h_{d_j,1}(x) = x + (-1)^{n(n+1)/2} I_1(x, \tilde{\Delta}_j) \Delta_j. \quad \square$$

### 3. Diagrammes de Dynkin des singularités de bord. Les cas $B_\mu, C_\mu$ et $F_4$

#### 3.1 Diagramme de Dynkin d'une singularité de bord.

3.1.1 REMARQUE. — Dans l'étude des singularités de bord par association d'une singularité ordinaire invariante par l'action de  $\mathbf{Z}_2$  (cf. [1]), on peut associer à  $(f, H)$  relativement à une base distinguée donnée de  $H_n(F, F \cap H)$  un diagramme de Dynkin : on l'obtient, à partir du diagramme de Dynkin de la singularité ordinaire associée, qui est naturellement muni d'une involution induite par l'action de  $\mathbf{Z}_2$  (voir l'article de G.G. Ilyuta [5]).

Ici, on va associer à toute singularité de bord  $(f, H)$  deux diagrammes de Dynkin relativement à des bases distinguées de  $H_n(F, F \cap H)$  et de  $H_n(F \setminus F \cap H)$ , construites sur les mêmes bases distinguées de  $H_n(F)$  et  $H_{n-1}(F \cap H)$ , ceci en utilisant les deux formes d'intersection relatives introduites plus haut.

On considère

$$(\Lambda_i, \Delta_j)_{(1 \leq i \leq \mu_0, 1 \leq j \leq \mu_1)} \text{ et } (\tilde{\Lambda}_i, \tilde{\Delta}_j)_{(1 \leq i \leq \mu_0, 1 \leq j \leq \mu_1)},$$

bases distinguées de  $H_n(F, F \cap H)$  et  $H_n(F \setminus F \cap H)$  construites sur les bases distinguées respectives  $(\delta_j)_{(1 \leq j \leq \mu_1)}$  et  $(\lambda_i)_{(1 \leq i \leq \mu_0)}$  de  $H_{n-1}(F \cap H)$  et  $H_n(F)$ .

Soit  $\varphi$  et  $\tilde{\varphi}$  les deux morphismes définis de la manière suivante : on a les deux suites exactes  $(b_1)$  et  $(b_2)$  de la PROPOSITION 1.2.1. On pose :  $\varphi = \beta_2 \circ \alpha_2$  et  $\tilde{\varphi} = \alpha_1 \circ \beta_1$ . Soit  $\Psi$  le morphisme de

$$H_n(F, F \cap H) \times H_n(F \setminus F \cap H)$$

dans lui même défini par :

$$\begin{aligned} \forall (a, \tilde{b}) \in H_n(F, F \cap H) \times H_n(F \setminus F \cap H), \\ \Psi(a, \tilde{b}) = (\tilde{\varphi}(\tilde{b}) - a, \tilde{b} - \varphi(a)). \end{aligned}$$

Soient :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= \left\{ (a, \tilde{b}) \in H_n(F, F \cap H) \times H_n(F \setminus F \cap H) \mid \Psi(a, \tilde{b}) = (a, \tilde{b}) \right\}, \\ \mathcal{H}_2 &= \left\{ (a, \tilde{b}) \in H_n(F, F \cap H) \times H_n(F \setminus F \cap H) \mid \Psi(a, \tilde{b}) = -(a, \tilde{b}) \right\}. \end{aligned}$$

LEMME 3.1.1. —  $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \{(0, 0)\}$ .

Démonstration. —  $(a, \tilde{b}) \in \mathcal{H}_1 \Leftrightarrow \tilde{\varphi}(\tilde{b}) - a = a$  et  $-\varphi(a) + \tilde{b} = \tilde{b} \Leftrightarrow \varphi(a) = 0, \tilde{\varphi}(\tilde{b}) = 2a$ . De même,  $(a, \tilde{b}) \in \mathcal{H}_2 \Leftrightarrow \tilde{\varphi}(\tilde{b}) = 0$  et  $2\tilde{b} = \varphi(a)$ .  $\square$

LEMME 3.1.2

- 1)  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  sont tous deux de dimension  $\mu_0 + \mu_1$ .
- 2) Une base dite distinguée de  $\mathcal{H}_1$  est constituée par

$$\left( (\Lambda_i, 2\tilde{\Lambda}_i)_{1 \leq i \leq \mu_0}, (0, \tilde{\Delta}_j)_{1 \leq j \leq \mu_1} \right).$$

- 3) Une base distinguée de  $\mathcal{H}_2$  est constituée par

$$\left( (\Lambda_i, 0)_{1 \leq i \leq \mu_0}, (2\Delta_j, \tilde{\Delta}_j)_{1 \leq j \leq \mu_1} \right).$$



*Démonstration.* — (On fait la preuve pour  $\mathcal{H}_1$ .)  $\forall (a, \tilde{b}) \in \mathcal{H}_1$ ,

$$\begin{aligned}\varphi(a) = 0 &\Rightarrow a = \sum_{1 \leq i \leq \mu_0} \alpha_i \Lambda_i; \\ \tilde{\varphi}(\tilde{b}) = 2a &\Rightarrow \tilde{b} = 2 \sum_{1 \leq i \leq \mu_0} \alpha_i \tilde{\Lambda}_i + \sum_{1 \leq j \leq \mu_1} \beta_j \tilde{\Delta}_j.\end{aligned}$$

Donc,

$$(a, \tilde{b}) = \sum_{1 \leq i \leq \mu_0} \alpha_i (\Lambda_i, \tilde{\Lambda}_i) + \sum_{1 \leq j \leq \mu_1} \beta_j (0, \tilde{\Delta}_j). \quad \square$$

*Action des opérateurs de monodromie sur  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$ .*

Par application des formules de Picard Lefschetz relatives, si on désigne par  $h_{1,\ell_i}$  (resp.  $h_{2,\ell_i}$ ) l'opérateur de monodromie associé au lacet  $\ell_i$  sur lequel sont construits  $\Lambda_i$  et  $\tilde{\Lambda}_i$ , qui agit sur  $\mathcal{H}_1$  (resp. sur  $\mathcal{H}_2$ ), et  $h_{1,d_j}$  (resp.  $h_{2,d_j}$ ) l'opérateur de monodromie associé au lacet  $d_j$  sur lequel sont construits  $\Delta_j$  et  $\tilde{\Delta}_j$ , qui agit sur  $\mathcal{H}_1$  (resp.  $\mathcal{H}_2$ ), on a le lemme suivant :

LEMME 3.1.3.

$\forall (a, \tilde{b}) \in \mathcal{H}_1$ ,

$$\begin{aligned}h_{1,\ell_i}(a, \tilde{b}) &= (a, \tilde{b}) + (-1)^{(n+1)(n+2)/2} I_1(a, \tilde{\Lambda}_i)(\Lambda_i, 2\tilde{\Lambda}_i) \\ h_{1,d_j}(a, \tilde{b}) &= (a, \tilde{b}) + (-1)^{(n+1)n/2} I_2(\tilde{b}, \Delta_j)(0, \tilde{\Delta}_j).\end{aligned}$$

$\forall (a, \tilde{b}) \in \mathcal{H}_2$ ,

$$\begin{aligned}h_{2,\ell_i}(a, \tilde{b}) &= (a, \tilde{b}) + (-1)^{(n+1)(n+2)/2} I_1(a, \tilde{\Lambda}_i)(\Lambda_i, 0) \\ h_{2,d_j}(a, \tilde{b}) &= (a, \tilde{b}) + (-1)^{(n+1)n/2} I_2(\tilde{b}, \Delta_j)(2\Delta_j, \tilde{\Delta}_j).\end{aligned}$$

*Démonstration.* — On a, pour  $\mathcal{H}_1$  :

$$\begin{aligned}h_{1,\ell_i}(a, \tilde{b}) &= (a, \tilde{b}) + (-1)^{(n+1)(n+2)/2} [I_1(a, \tilde{\Lambda}_i)\Lambda_i, (-1)^n I_2(\tilde{b}, \Lambda_i)\tilde{\Lambda}_i], \\ h_{1,d_j}(a, \tilde{b}) &= (a, \tilde{b}) + (-1)^{(n+1)n/2} [0, I_2(\tilde{b}, \Delta_j)\tilde{\Delta}_j].\end{aligned}$$

Or,  $I_2(\tilde{b}, \Lambda_i) = (-1)^n 2I_1(a, \tilde{\Lambda}_i)$  car  $(a, \tilde{b}) \in \mathcal{H}_1$  et  $I_1(.,.) = (-1)^n I_2(.,.)$ .  $\square$

On adopte les notations suivantes :

$$\begin{aligned}\forall (a, \tilde{b}) \in \mathcal{H}_1 \text{ (resp. } \in \mathcal{H}_2), \forall i, 1 \leq i \leq \mu_0, \ell_i(a, \tilde{b}) &= I_1(a, \tilde{\Lambda}_i), \\ \forall (a, \tilde{b}) \in \mathcal{H}_1 \text{ (resp. } \in \mathcal{H}_2), \forall j, 1 \leq j \leq \mu_1, d_j(a, \tilde{b}) &= I_2(\tilde{b}, \Delta_j).\end{aligned}$$

Avec ces notations, le LEMME 3.1.3 s'écrit :

LEMME 3.1.4. —  $\forall (a, \tilde{b}) \in \mathcal{H}_1$ ,

$$h_{1,\ell_i}(a, \tilde{b}) = (a, \tilde{b}) + (-1)^{(n+1)(n+2)/2} \ell_i(a, \tilde{b})(\Lambda_i, 2\tilde{\Lambda}_i),$$

$$h_{1,d_j}(a, \tilde{b}) = (a, \tilde{b}) + (-1)^{(n+1)n/2} d_j(a, \tilde{b})(0, \tilde{\Delta}_j).$$

$\forall (a, \tilde{b}) \in \mathcal{H}_2$ ,

$$h_{2,\ell_i}(a, \tilde{b}) = (a, \tilde{b}) + (-1)^{(n+1)(n+2)/2} \ell_i(a, \tilde{b})(\Lambda_i, 0),$$

$$h_{2,d_j}(a, \tilde{b}) = (a, \tilde{b}) + (-1)^{(n+1)n/2} d_j(a, \tilde{b})(2\Delta_j, \tilde{\Delta}_j).$$

*Diagrammes de Dynkin de la singularité de bord.*

On construit deux diagrammes de Dynkin, l'un associé en fait à  $\mathcal{H}_1$ , l'autre à  $\mathcal{H}_2$ . Ces deux diagrammes sont les mêmes pour ce qui concerne les arêtes, et diffèrent par l'orientation de certains arcs. On donne ici les détails pour  $\mathcal{H}_1$ , en indiquant ce qui diffère pour  $\mathcal{H}_2$ .

On pose :  $\forall i, 1 \leq i \leq \mu_0, L_i = (\Lambda_i, 2\tilde{\Lambda}_i)$ ;  $\forall j, 1 \leq j \leq \mu_1, D_j = (0, \tilde{\Delta}_j)$ .

REMARQUE. — D'après le LEMME 3.1.4,  $h_{1,\ell_i}$  (resp.  $h_{1,d_j}$ ) est une pseudo-réflexion telle que le noyau de  $h_{1,\ell_i} - \text{id}$  (resp.  $h_{1,d_j} - \text{id}$ ) est engendré par  $L_i$  (resp.  $D_j$ ).

Le diagramme de Dynkin de la singularité de bord  $(f, H)$  associé aux bases distinguées considérées ici de  $H_n(F \setminus F \cap H)$  et  $H_n(F, F \cap H)$  pour  $\mathcal{H}_1$  est construit de la manière suivante :

- les sommets du graphe sont les  $L_i$  et les  $D_j$ ;
- deux sommets  $L_i$  et  $L_j$  sont reliés par autant d'arêtes (c'est à dire d'arcs non orientés) que  $|\ell_i(L_j)|$ ;
- Deux sommets  $D_k$  et  $D_\ell$  sont reliés par autant d'arêtes que  $|d_k(D_\ell)|$ ;
- un sommet  $D_k$  est relié à un sommet  $L_i$  par autant d'arcs orientés de  $D_k$  vers  $L_i$  que  $|d_k(L_i)|$ .

REMARQUE. — Il n'y a pas d'arc orienté de  $L_i$  vers  $D_k$  car  $\ell_i(D_k) = 0$ .

*Ce qui change dans le diagramme de Dynkin pour  $\mathcal{H}_2$ .*

On obtient le même graphe, mais les orientations des arcs entre les sommets  $L_i = (\Lambda_i, 0)$  et  $D_k = (2\Delta_k, \tilde{\Delta}_k)$  sont inversées.

REMARQUE

1) Si on prend le sous graphe du graphe de Dynkin associé à  $\mathcal{H}_1$ , formé des sommets  $L_i$  ( $1 \leq i \leq \mu_0$ ) et des arêtes qui existent entre ces sommets, on trouve le diagramme de Dynkin de la singularité  $f$  dans la base distinguée  $\lambda_i$  ( $1 \leq i \leq \mu_0$ ) de  $H_n(F)$ .

2) Si on prend le sous graphe du graphe de Dynkin associé à  $\mathcal{H}_1$ , formé des sommets  $D_j$  ( $1 \leq j \leq \mu_1$ ) et des arêtes qui existent entre ces sommets, on trouve le diagramme de Dynkin de la singularité  $f|_H$  dans la base distinguée  $\delta_j$  ( $1 \leq j \leq \mu_1$ ) de  $H_{n-1}(F \cap H)$ .

3) Pour  $\mathcal{H}_1$  (resp. pour  $\mathcal{H}_2$ ), les sommets  $L_i$  (resp.  $D_k$ ) correspondent aux sommets longs de la construction d'Ilyuta, les sommets  $D_j$  (resp.  $L_i$ ) correspondent aux sommets courts. Les diagrammes de Dynkin de  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  sont duaux (au sens de Ilyuta) l'un de l'autre, puisqu'il y a échange des sommets courts et des sommets longs.

*Diagramme de Dynkin des singularités de bord  $B_\mu$  et  $C_\mu$ .*

Dans cette section, on choisit des bases distinguées de  $H_n(F \setminus F \cap H)$  et  $H_n(F, F \cap H)$  de telle sorte que le diagramme de Dynkin de la singularité de bord  $B_\mu$  (et  $C_\mu$ ) soit le diagramme de Dynkin du système de racines de même nom.

On rappelle tout d'abord dans une première partie comment sont construites les bases distinguées de la singularité  $f$  (et donc aussi de la singularité  $f|_H$ ).

Puis, on indique, à partir des bases distinguées de

$$H_{n-1}(F \cap H) \text{ et } H_n(F),$$

comment sont construites les bases distinguées de  $H_n(F \setminus F \cap H)$  et  $H_n(F, F \cap H)$ .

Par ailleurs, on sait, d'après [3], qu'on peut construire des bases distinguées pour les singularités de Brieskorn de telle sorte que le diagramme de Dynkin d'une singularité simple soit le diagramme de Dynkin du système de racines de même nom.

Dans le cas de  $B_\mu$ ,  $C_\mu$  et  $F_4$ , on montre comment on peut améliorer le choix des bases distinguées de  $H_n(F \setminus F \cap H)$  et  $H_n(F, F \cap H)$  pour obtenir dans ces cas aussi des diagrammes de Dynkin qui sont ceux des systèmes de racines de même nom. Pour cette construction, on utilise les propriétés de la géométrie du discriminant relatif, c'est à dire des propriétés relatives des deux discriminants de  $(f, 0)$  et  $(f|_H, 0)$ .

*3.1.2 Construction des bases distingués de  $H_n(F)$ ,  $H_{n-1}(F \cap H)$ , ainsi que de  $H_n(F \setminus F \cap H)$ ,  $H_n(F, F \cap H)$  (voir [1] et [3]).*

• *Cas absolu* : soit  $\Phi : X_0 \times T \rightarrow \mathbb{D} \times T = S$  un bon représentant de déploiement  $\mathcal{R}$ -miniversel de la singularité de bord  $(f, H)$  (où  $f : X_0 \rightarrow \mathbb{D}$  est un bon représentant de la singularité  $f$ ).

Pour construire l'ensemble des points  $\{s_i\}_{1 \leq i \leq \mu_0}$  du discriminant de  $\Phi$  à partir desquels est définie une base distinguée de  $H_n(F)$ , on procède de la manière suivante :

- on fixe un élément  $\tau$  de  $T$  ;
- on détermine tous les éléments  $t$  de  $\mathbb{D}$  tels que, si  $s = (t, \tau)$  ( $s \in \mathbb{D} \times T$ ),  $s$  est élément du discriminant de  $\Phi$ . On note  $s_1, s_2, \dots, s_{\mu_0}$  les points  $s_i = (t_i, \tau)$  de  $\mathbb{D} \times T$  ainsi obtenus.

Les éléments de la base distinguée de  $H_n(F)$  qu'on construit alors sont associés à des lacets de base  $s = (t, \tau)$  (qui n'est pas dans le discriminant de  $\Phi$ , noté  $D_\Phi$ ) autour de chacun des points  $s_i$ , dans  $S \setminus D_\Phi$ , ces lacets n'ayant pas de point commun autre que  $s$ .

On suppose maintenant que  $\Phi$  est un déploiement  $\mathcal{R}_H$ -miniversel de  $(f, H)$ .

• *Cas relatif* : pour construire les bases distinguées de  $H_n(F, F \cap H)$  et  $H_n(F \setminus F \cap H)$ , on procède de la même manière que précédemment ; on détermine l'ensemble des points  $\{s_i\}_{1 \leq i \leq \mu_0}$  du discriminant de  $\Phi$  ainsi que l'ensemble  $\{\sigma_j\}_{1 \leq j \leq \mu_1}$  du discriminant de  $\Phi|_H$  tels que  $\{s_i\}_{1 \leq i \leq \mu_0} \cup \{\sigma_j\}_{1 \leq j \leq \mu_1}$  soit l'intersection du discriminant  $\mathcal{R}_H$  relatif de  $\Phi$  avec la droite complexe déterminée par  $\tau$ .

De plus,  $\tau$  est choisi de telle sorte que  $\{s_i\}_{1 \leq i \leq \mu_0} \cap \{\sigma_j\}_{1 \leq j \leq \mu_1} = \emptyset$ .

### 3.2.2 Cas des singularités $B_\mu$ et $C_\mu$ .

Soit l'hypothèse  $\mathcal{K}'$  suivante : *il existe un point  $\tau_0 \in T$  tel que  $\{s_i\}_{1 \leq i \leq \mu_0} \cap \{\sigma_j\}_{1 \leq j \leq \mu_1} \neq \emptyset$ . Cette intersection est réduite à un point  $s_{1,0} = \sigma_{1,0}$ .*

Dans cette hypothèse, au dessus de ce point  $s_{1,0}$ ,  $\Phi(\cdot, s_{1,0})$  admet un seul point singulier isolé qui est quadratique, ainsi que  $\Phi|_H(\cdot, s_{1,0})$ .

Pour  $s$  un élément de  $S$ , soit l'hypothèse  $\mathcal{K}''(s)$  suivante : *au dessus de  $s$ ,  $\Phi(\cdot, s)$  admet un seul point singulier isolé qui est quadratique, ainsi que  $\Phi|_H(\cdot, s)$ , et ces deux points singuliers sont confondus.*

On se place dans l'hypothèse  $\mathcal{K} = \mathcal{K}' \cup \mathcal{K}''(s_{1,0})$ .

Soit  $m_0$  le point singulier commun à  $\Phi(\cdot, s_{1,0})$  et  $\Phi|_H(\cdot, s_{1,0})$ . Pour  $\tau$  dans un voisinage suffisamment petit de  $\tau_0$ ,  $s_1$  et  $\sigma_1$  sont distincts. De plus, on a :  $\{s_i\}_{1 \leq i \leq \mu_0} \cap \{\sigma_j\}_{1 \leq j \leq \mu_1} = \emptyset$ , et, lorsque  $\tau$  tend vers  $\tau_0$ ,  $s_1$  tend vers  $s_{1,0}$  et  $\sigma_1$  tend vers  $s_{1,0}$ . Soit  $s_0 = (t, \tau_0)$  et  $s = (t, \tau)$  qui ne sont pas dans le discriminant  $\mathcal{R}_H$  relatif de  $\Phi$  (noté  $D_\Phi(\star H)$ ). Soit  $c$  un chemin de  $s_0$  vers  $s$  extérieur à ce discriminant relatif.

La monodromie définie par un lacet  $r$  de base  $s_0$  dans  $S \setminus D_\Phi(\star H)$  autour de  $s_{1,0}$  sur  $H_n(F_{s_0}, F_{s_0} \cap H)$  (resp. sur  $H_n(F_{s_0} \setminus F_{s_0} \cap H)$ ) est égale au produit des monodromies définies par les lacets  $\ell_1$  et  $d_1$  de base  $s$  autour de  $s_1$  et  $\sigma_1$  dans  $S \setminus D_\Phi(\star H)$  qui agissent sur  $H_n(F_s, F_s \cap H)$  (resp. sur  $H_n(F_s \setminus F_s \cap H)$ ), composé avec le transport le long du chemin  $c$ .

Dans le plan défini par  $\tau_0$ , on a la situation de la figure 1, dans le plan défini par  $\tau$ , on a la situation de la figure 2 :

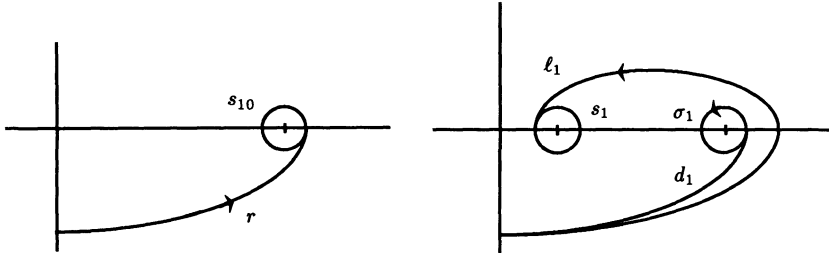


Figure 1.

Figure 2.

Soit  $\lambda_1$  (resp.  $\lambda_{1,0}$ ) l'élément de la base distinguée de  $H_n(F_s)$  (resp.  $H_n(F_{s_0})$ ) défini par le lacet  $\ell_1$  (resp.  $r$ ).

Soit  $\delta_1$  (resp.  $\delta_{1,0}$ ) l'élément de la base distinguée de  $H_{n-1}(F_s \cap H)$  défini par le lacet  $\ell_1$  (resp. de  $H_{n-1}(F_{s_0} \cap H)$  défini par le lacet  $r$ ).

Par transport le long du chemin  $c$ ,  $\lambda_1$  donne  $\lambda_{1,0}$ ,  $\delta_1$  donne  $\delta_{1,0}$  et réciproquement.

Soient  $\Lambda_1$  et  $\Delta_1$  les éléments de la base distinguée de  $H_n(F_s, F_s \cap H)$  construits sur  $\lambda_1$  et  $\delta_1$ .

Soient  $\tilde{\Lambda}_1$  et  $\tilde{\Delta}_1$  les éléments de la base distinguée de  $H_n(F_s \setminus F_s \cap H)$  construits sur  $\lambda_1$  et  $\delta_1$ .

Soit  $B_\epsilon(m_0)$  la boule de centre  $m_0$  dont le rayon  $\epsilon$  est choisi assez petit pour que  $F_{s_{1,0}} \cap B_\epsilon(m_0) = \tilde{F}_{s_{1,0}}$  soit la fibre de Milnor de  $\Phi(\cdot, s_{1,0})$  et  $\tilde{F}_{s_{1,0}} \cap H$  soit la fibre de Milnor de  $\Phi|_H(\cdot, s_{1,0})$ .

On a :

$$\dim H_{n-1}(\tilde{F}_{s_{1,0}} \cap H) = \dim H_n(\tilde{F}_{s_{1,0}}) = 1$$

et on a les deux suites exactes  $(b_1)$  et  $(b_2)$  de la PROPOSITION 1.2.1.

$\{\lambda_{1,0}\}$  et  $\{\delta_{1,0}\}$  sont des bases respectivement de

$$H_n(F_{s_{1,0}}) \text{ et } H_{n-1}(F_{s_{1,0}} \cap H).$$

Soit  $\Lambda_{1,0}$  l'image de  $\lambda_{1,0}$  par le morphisme  $\alpha_1$  et  $\tilde{\Lambda}_{1,0}$  un antécédent de  $\lambda_{1,0}$  par  $\beta_1$ . ( $\tilde{\Lambda}_{1,0}$  est la classe dans  $H_n(\tilde{F}_{s_{1,0}} \setminus \tilde{F}_{s_{1,0}} \cap H)$  d'un représentant de  $\lambda_{1,0}$  qui ne rencontre pas  $H$ ).

Soient également  $\Delta_{1,0}$  et  $\Delta'_{1,0}$  les deux demi-cycles qu'on peut construire sur  $\delta_{1,0}$ , et  $\tilde{\Delta}_{1,0}$  l'image de  $\delta_{1,0}$  par  $\beta_2$ .

*Remarque sur les monodromies :*

Si

- $x$  est un élément de  $H_n(F_s, F_s \cap H)$  et  $\bar{x}$  est le transporté de  $x$  le long de  $c$  ( $\bar{x}$  est donc dans  $H_n(F_{s_{1,0}}, F_{s_{1,0}} \cap H)$ ) et  $h_r$  est la monodromie définie par le lacet  $r$  agissant sur  $H_n(F_{s_{1,0}}, F_{s_{1,0}} \cap H)$ ;

- $\tilde{x}$  est un élément de  $H_n(F_s \setminus F_s \cap H)$  et  $\tilde{\bar{x}}$  est le transporté de  $\tilde{x}$  le long de  $c$  et  $\tilde{h}_r$  est la monodromie définie par le lacet  $r$  agissant sur  $H_n(F_{s_{1,0}} \setminus F_{s_{1,0}} \cap H)$ ,

- $h_{\ell_1}$  et  $h_{d_1}$  (resp.  $\tilde{h}_{\ell_1}$  et  $\tilde{h}_{d_1}$ ) les monodromies définies par les lacets  $\ell_1$  et  $d_1$  agissant sur  $H_n(F_s, F_s \cap H)$  (resp. sur  $H_n(F_s \setminus F_s \cap H)$ );

alors

- $h_r(\bar{x})$  est égal au transporté de  $h_{\ell_1} \circ h_{d_1}(x)$  le long du chemin  $c$  (ou au transporté de  $h_{d_1} \circ h_{\ell_1}(x)$  le long du chemin  $c$ );

- $\tilde{h}_r(\tilde{\bar{x}})$  est égal au transporté de  $\tilde{h}_{\ell_1} \circ \tilde{h}_{d_1}(\tilde{x})$  le long du chemin  $c$  (ou au transporté de  $\tilde{h}_{d_1} \circ \tilde{h}_{\ell_1}(\tilde{x})$  le long du chemin  $c$ ).

(On suppose dans la suite que  $n \equiv 1 \pmod{4}$ .)

PROPOSITION 3.2.1. —  $h_r(\Delta_{1,0}) = -\Delta_{1,0} + \varepsilon' \Lambda_{1,0}$  ( $\varepsilon' = \pm 1$ )

PROPOSITION 3.2.2. —  $I_1(\Delta_1, \tilde{\Lambda}_1) = \varepsilon_1$  ( $\varepsilon_1 = \pm 1$ )

*Démonstration de la proposition 3.2.1.* — On sait, d'après les formules de Picard Lefschetz que  $h_r(\delta_{1,0}) = -\delta_{1,0}$  avec le choix qu'on a fait pour  $n$ . Donc,  $h_r(\Delta_{1,0}) = -\Delta_{1,0} + \alpha \Lambda_{1,0}$  et  $h_r(\Delta'_{1,0}) = -\Delta'_{1,0} + \alpha' \Lambda_{1,0}$ . Or,  $\alpha = -\alpha'$  car  $\Delta_{1,0}$  et  $\Delta'_{1,0}$  se déduisent l'un de l'autre par symétrie par rapport à  $H$ , et par cette symétrie (qui commute avec  $h_r$ ),  $\Lambda_{1,0}$  donne  $-\Lambda_{1,0}$ . Par ailleurs,  $\Delta_{1,0} - \Delta'_{1,0} = \varepsilon' \Lambda_{1,0}$ . Donc, toujours par application des formules de Picard Lefschetz, on en déduit :  $h_r(\Delta_{1,0} - \Delta'_{1,0}) = \varepsilon' \Lambda_{1,0}$ . Or,  $h_r(\Delta_{1,0} - \Delta'_{1,0}) = \Delta'_{1,0} - \Delta_{1,0} + (\alpha - \alpha') \Lambda_{1,0} = \Delta'_{1,0} - \Delta_{1,0} + (2\alpha) \Lambda_{1,0}$ . D'où,  $\alpha = \varepsilon'$ , ce qui montre la PROPOSITION 3.2.1.  $\square$

*Démonstration de la proposition 3.2.2.* — Le transporté de l'image de  $\Delta_{1,0}$  (resp.  $\Lambda_{1,0}$ ) le long de  $c$  est  $\Delta_1$  (resp.  $\Lambda_1$ ). On applique les formules de Picard Lefschetz relatives et la remarque sur les monodromies faite plus haut pour conclure à l'aide de la PROPOSITION 3.2.1. Ainsi,

$$\begin{aligned} h_{d_1}(\Delta_1) &= -\Delta_1, & h_{d_1}(\Lambda_1) &= \Lambda_1, \\ h_{\ell_1}(\Lambda_1) &= \Lambda_1, & h_{\ell_1}(\Delta_1) &= \Delta_1 - I_1(\Delta_1, \tilde{\Lambda}_1) \Lambda_1. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} h_{d_1} \circ h_{\ell_1}(\Delta_1) &= -\Delta_1 - I_1(\Delta_1, \tilde{\Lambda}_1)\Lambda_1, \\ h_{\ell_1} \circ h_{d_1}(\Delta_1) &= -\Delta_1 + I_1(\Delta_1, \tilde{\Lambda}_1)\Lambda_1. \end{aligned}$$

D'où le résultat annoncé par application de la PROPOSITION 3.2.1.  $\square$

PROPOSITION 3.2.3. — *Les singularités de bord  $B_\mu$  et  $C_\mu$  vérifient l'hypothèse  $\mathcal{K}$ .*

*Démonstration :*

• Pour  $B_\mu$ . Soit  $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  l'application définie par :  $f(x, y, z) = x^{\mu+1} + y^2 + z^2$ . L'hyperplan  $H$  a pour équation  $\{x = 0\}$ . Soit, pour déploiement de  $f$ ,  $\Phi$  définie par :

$$\Phi(x, y, z, \tau) = (F(x, y, z, \tau), \tau),$$

avec 
$$F(x, y, z, \tau) = x^{\mu+1} + y^2 + z^2 + \sum_{i=1}^{\mu-1} \tau'_i x^i + \tau''_0 x^\mu.$$

Le discriminant de  $\Phi$  est obtenu par élimination de  $x$  entre les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} x^{\mu+1} + \sum_{i=1}^{\mu-1} \tau'_i x^i + \tau''_0 x^\mu = t, \\ (\mu+1)x^\mu + \sum_{i=0}^{\mu-1} i\tau'_i x^{i-1} + \tau''_0 x^{\mu-1} = 0. \end{cases}$$

Par ailleurs,  $\Phi|_H (= f|_H)$  admet un point singulier quadratique pour  $y = z = 0$ , et ceci au dessus de tout point  $(0, \tau', \tau'')$  de la base  $S$  du déploiement.

Pour déterminer  $\tau = (\tau', \tau'')$  au dessus duquel l'hypothèse  $\mathcal{K}''$  est vérifiée (ce qui prouvera en même temps que l'hypothèse  $\mathcal{K}$  est vérifiée), on cherche  $\tau$  de telle sorte que les deux équations suivantes admettent 0 comme solution commune :

$$\begin{cases} x^{\mu+1} + \sum_{i=1}^{\mu-1} \tau'_i x^i + \tau''_0 x^\mu = 0, \\ (\mu+1)x^\mu + \sum_{i=1}^{\mu-1} i\tau'_i x^{i-1} + \tau''_0 x^{\mu-1} = 0. \end{cases}$$

Ce qui est vrai dès que  $\tau'_1 = 0$ . De plus, génériquement, c'est-à-dire pour  $\tau'_2 \neq 0$ , au dessus de tels points,  $\Phi$  admet un point singulier quadratique, car :  $F(x, y, z, \tau) = \tau'_2 x^2 + y^2 + z^2 +$  termes d'ordre supérieur.

- Pour  $C_\mu$ . Soit  $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  l'application définie par :

$$f(x, y, z) = y^{\mu+1} + xy + z^2.$$

(L'hyperplan  $H$  a encore pour équation  $\{x = 0\}$ .) Soit pour déploiement de  $f$ ,  $\Phi$  définie par :

$$\Phi(x, y, z, \tau) = (F(x, y, z, \tau), \tau)$$

avec

$$F(x, y, z, \tau) = y^{\mu+1} + xy + z^2 + y \sum_{i=0}^{\mu-1} \tau'_i y^i.$$

Le discriminant de  $\Phi|_H$  est obtenu par élimination de  $y$  entre les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} y^{\mu+1} + \sum_{i=0}^{\mu-1} \tau'_i y^{i+1} = t, \\ (\mu+1)y^\mu + \sum_{i=0}^{\mu-1} (i+1)\tau'_i y^i = 0. \end{cases}$$

Par ailleurs, le discriminant de  $\Phi$  a pour équation  $\{t = 0\}$ . Pour vérifier l'hypothèse  $\mathcal{K}$ , il faut déterminer  $\tau$  tel que le système suivant de deux équations admette 0 pour solution :

$$\begin{cases} y^{\mu+1} + \sum_{i=0}^{\mu-1} \tau'_i y^{i+1} = 0, \\ (\mu+1)y^\mu + \sum_{i=0}^{\mu-1} (i+1)\tau'_i y^i = 0. \end{cases}$$

Ce qui est le cas dès que  $\tau'_0 = 0$ . Et alors,  $\Phi|_H$  admet génériquement au dessus de tels points, c'est-à-dire pour  $\tau'_1 \neq 0$ , un point singulier quadratique. En effet, alors :  $F(0, y, z, \tau) = \tau'_1 y^2 + z^2 +$  termes d'ordre supérieur.  $\square$

REMARQUE. — Pour pouvoir appliquer les résultats du paragraphe précédent ici, c'est-à-dire pour avoir  $n \equiv 1 \pmod{4}$ , il faut ajouter dans l'équation de  $f$  deux carrés qui n'interviennent pas dans les calculs ci-dessus.

### 3.2.3 Bases distinguées particulières pour $B_\mu$ et $C_\mu$ .

On suppose toujours  $n \equiv 1 \pmod{4}$ . (Ici, pour  $C_\mu$ ,  $\mu_0 = 1$  et  $\mu_1 = \mu$ , et pour  $B_\mu$ ,  $\mu_0 = \mu$  et  $\mu_1 = 1$ .) On se place dans les conditions d'application de la PROPOSITION 3.2.2 (ce qui est possible d'après la PROPOSITION 3.2.3),



et on fait la construction de [3] des bases distinguées de  $H_{n-1}(F \cap H)$  et  $H_n(F)$  en prenant, si  $h_r = h_{\ell_1} \circ h_{d_1}$ , pour premier vecteur de la base distinguée de  $H_{n-1}(F \cap H)$  l'élément  $\delta_1$  défini plus haut, et pour dernier vecteur de la base distinguée de  $H_n(F)$  l'élément  $\lambda_1$  défini plus haut. (Si  $h_r = h_{d_1} \circ h_{\ell_1}$ , on fait le choix contraire les résultats sont les mêmes ainsi que les démonstrations.)

PROPOSITION 3.2.4

- 1) Pour  $B_\mu, I_1(\Delta_1, \tilde{\Lambda}_i) = 0$  pour  $i \neq 1$ .
- 2) Pour  $C_\mu, I_1(\Delta_j, \tilde{\Lambda}_1) = 0$  pour  $j \neq 1$ .

Démonstration (pour  $C_\mu$ ).. — On a le lemme suivant (voir [3]) :

LEMME 3.2.5. — On a par construction l'égalité dans  $\Pi_1(S \setminus D_\Phi(\star H))$

$$d_j = \gamma^{-1} d_{j+1} \gamma, \quad \forall j \in \{1, \dots, \mu - 1\},$$

où  $\gamma$  est le lacet  $rd_2 \dots d_\mu$  et où par abus de langage, on désigne par  $d_2, \dots, d_\mu$  les lacets de base  $s_0$  autour des points  $\sigma_{2,0}, \dots, \sigma_{\mu,0}$  dans la droite complexe définie par  $\tau_0$ .

Soit  $h = h_r \circ h_{d_2} \dots \circ h_{d_\mu}$ . Modulo le transport le long de  $c$ ,

$$h = h_{\ell_1} \circ h_{d_1} \circ h_{d_2} \dots \circ h_{d_\mu}.$$

Le LEMME 3.2.5 implique :  $h_{d_j} = h^{-1} \circ h_{d_{j1}} \circ h$  (relation (\*)). Or, pour  $k \neq \mu$  et 2,

$$\begin{aligned} h(\Delta_k) &= h_{\ell_1} \circ h_{d_1} \circ h_{d_2} \circ \dots \circ h_{d_{k+1}}(\Delta_k) \\ &= h_{\ell_1} \circ h_{d_1} \circ h_{d_2} \circ \dots \circ h_{d_k}(\Delta_k - \Delta_{k+1}) \\ &= h_{\ell_1} \circ h_{d_1} \circ h_{d_2} \circ \dots \circ h_{d_{k-1}}(-\Delta_k) \\ &= -\Delta_{k+1} - I_1(\Delta_{k+1}, \tilde{\Lambda}_1)(-\Lambda_1). \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} h(\Delta_k) &= -\Delta_{k+1} + I_1(\Delta_{k+1}, \tilde{\Lambda}_1) \\ h_{d_k} \circ h(\Delta_k) &= -\Delta_{k+1} + \Delta_k + I_1(\Delta_{k+1}, \tilde{\Lambda}_1). \end{aligned}$$

Par ailleurs,  $h^{-1}(\Delta_k) = -\Delta_{k-1} + I_1(\Delta_k, \tilde{\Lambda}_1)\Lambda_1$ . Donc,

$$\begin{aligned} h^{-1} \circ h_{d_k} \circ h(\Delta_k) &= \Delta_k - \Delta_{k-1} + I_1(\Delta_k, \tilde{\Lambda}_1)\Lambda_1 \\ h_{d_{k-1}}(\Delta_k) &= \Delta_k - \Delta_{k-1}. \end{aligned}$$

D'où le résultat attendu par application de (\*).  $\square$

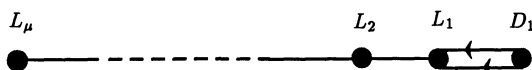
REMARQUE

- 1) Les calculs pour  $k = 2$  et  $k = \mu$  conduisent à la même conclusion.
- 2) La preuve pour  $B_\mu$  se fait par le même type de considérations.

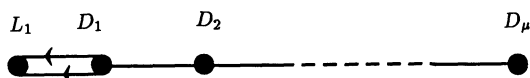
Les résultats précédents permettent d'énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 3.2.6. — *Les diagrammes de Dynkin des singularités de bord  $B_\mu$  et  $C_\mu$  sont les graphes de Dynkin des systèmes de racines de même nom, i.e :*

- 1) Pour  $B_\mu$  et pour  $\mathcal{H}_1$  :



- 2) Pour  $C_\mu$  et pour  $\mathcal{H}_1$  :



REMARQUE. — On retrouve ici que les singularités de bord  $B_\mu$  et  $C_\mu$  sont duales (ce qui permet de retrouver le résultat de [2]) car le diagramme de Dynkin pour  $\mathcal{H}_1$  associé à  $B_\mu$  est le diagramme de Dynkin pour  $\mathcal{H}_2$  associé à  $C_\mu$  lorsqu'on échange les sommets  $D_j$  et  $L_i$  (et vice versa).

**3.3 Diagramme de Dynkin de la singularité de bord  $F_4$ .**

Dans cette section on choisit des bases distinguées de  $H_n(F \setminus F \cap H)$  et  $H_n(F, F \cap H)$  de telle sorte que le diagramme de Dynkin de la singularité de bord  $F_4$  soit le diagramme de Dynkin du système de racines de même nom.

Soit  $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  l'application définie par :  $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^2$ . (Comme pour  $B_\mu$  et  $C_\mu$  on se contente pour les calculs qui suivent d'un seul carré  $z^2$ , alors qu'il en faudrait deux de plus pour que le nombre de variables soit congru à 1 modulo 4.)

REMARQUE. — Ici,  $\mu_0 = \mu_1 = 2$ .

Le déploiement de  $f$  qu'on choisit est le suivant :  $\Phi : X_0 \times T \rightarrow \mathbb{D} \times T$ , vérifiant :

$$\Phi(x, y, z, \tau) = (F(x, y, z, \tau), \tau)$$

avec 
$$F(x, y, z, \tau) = x^2 + y^3 + z^2 + \tau'_1 y + x(\tau''_0 + \tau''_1 y).$$

PROPOSITION 3.3.1. — *Il existe  $\tau_0 \in T$  tel que  $s_{1,0} = \sigma_{1,0}$  et  $s_{2,0} = \sigma_{2,0}$ . De plus, au dessus de ces points, les points singuliers quadratiques de  $\Phi|_H(\cdot, s_{i0})$  et  $\Phi(\cdot, s_{i0})$  sont confondus (ceci pour  $i = 1$  et  $i = 2$ ).*

*Démonstration.* — Le discriminant de  $\Phi$  est donné par l'élimination de  $x$  et  $y$  dans le système :

$$\begin{cases} x^2 + y^3 + \tau_1'y + x(\tau_0'' + \tau_1''y) = t, \\ 2x + \tau_0'' + \tau_1''y = 0, \\ 3y^2 + \tau_1' + \tau_1''x = 0. \end{cases}$$

Le discriminant de  $\Phi|_H$  est  $\{4\tau_1'^3 + 27t^2 = 0\}$ . On cherche donc  $(\tau_0, t_0)$  à l'intersection des deux discriminants, tel que de plus  $(\tau_0, t_0)$  soit solution du système :

$$\begin{cases} y^3 + \tau_1'y = t, \\ 3y^2 + \tau_1' = 0, \\ x^2 + y^3 + \tau_1'y + x(\tau_0'' + \tau_1''y) = t, \\ 2x + \tau_0'' + \tau_1''y = 0, \\ 3y^2 + \tau_1'y + \tau_1''x = 0, \end{cases}$$

avec la condition  $x = 0$ . D'où les solutions cherchées :

$$\tau_0'' = \tau_1'' = 0, \quad 4\tau_1'^3 + 27t^2 = 0,$$

au-dessus desquelles  $\Phi$  et  $\Phi|_H$  admettent une singularité quadratique ceci pour  $\tau_1'$  générique.  $\square$

(On reprend les notations introduites plus haut.)

On choisit  $\tau$  dans un voisinage suffisamment petit de  $\tau_0$  pour que  $s_1$  et  $\sigma_1$  soient distincts,  $s_2$  et  $\sigma_2$  soient distincts, et que, par abus de langage, comme dans la partie précédente, on puisse dire que la monodromie  $h_{r_i}$ , pour  $i \in \{1, 2\}$ , induite sur  $H_n(F, F \cap H)$  par un lacet de base  $s_0$  autour de  $s_{i0}$  dans  $S \setminus D_\Phi(\star H)$  est égale au produit des monodromies définies par les lacets  $\ell_i$  et  $d_i$  de base  $s$  autour de  $s_i$  et  $\sigma_i$  dans  $S \setminus D_\Phi(\star H)$ . (On néglige le transport le long de  $c$ .)

Plus précisément, si  $\tau_1'' = 0$ , le discriminant de  $\Phi$  est donné par l'équation suivante :

$$432t^2 + 216\tau_0''^2t + 64\tau_1'^3 + 27\tau_0''^4 = 0.$$

Celui de  $\Phi|_H$  est donné par :  $4\tau_1'^3 + 27t^2 = 0$ . On a donc, pour  $\tau_1'$  négatif, la disposition suivante (figure 1) des points  $s_1, s_2, \sigma_1, \sigma_2$  dans le plan déterminé par  $\tau$  :

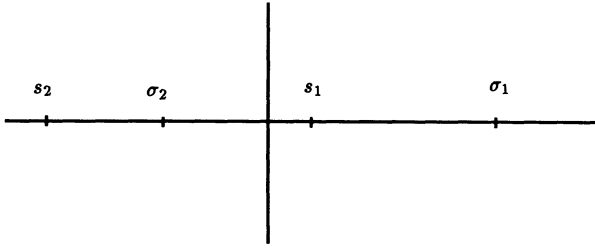


Figure 1.

Et les lacets  $\ell_1, \ell_2, d_1, d_2$  sont choisis comme sur la figure 2 suivante :

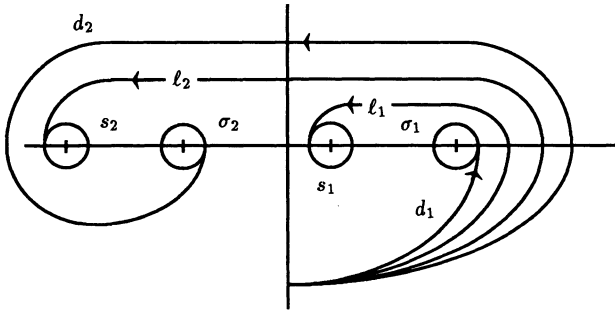


Figure 2.

D'où le lemme suivant :

LEMME 3.3.2. —  $h_{r_1} = h_{d_1} \circ h_{\ell_1}$  et  $h_{r_2} = h_{\ell_2} \circ h_{d_2}$ .

D'après la PROPOSITION 3.2.2,  $I_2(\tilde{\Lambda}_i, \Delta_i) = \varepsilon_i$  pour  $i \in \{1, 2\}$  et  $\varepsilon_i = \pm 1$ . On a, voir le LEMME 3.2.5, le lemme suivant :

LEMME 3.3.3. — Si  $h = h_{r_1} \circ h_{r_2}$ , alors  $h \circ h_{r_1} = h_{r_2} \circ h$ .

Par application de ce lemme, on déduit que :

$$I_2(\tilde{\Lambda}_1, \Delta_2) = I_2(\tilde{\Lambda}_2, \Delta_1) = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

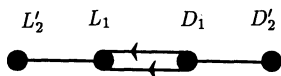
Or, on peut faire le choix de  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  de telle sorte que  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ . D'où on déduit :  $I_2(\tilde{\Lambda}_i, \Delta_j) = \varepsilon$ . Ce qui implique :

$$\begin{cases} I_2(\tilde{\Lambda}_1 - \tilde{\Lambda}_2, \Delta_1) = 0, & I_2(\tilde{\Lambda}_1, \Delta_1) = \varepsilon, \\ I_2(\tilde{\Lambda}_1 - \tilde{\Lambda}_2, \Delta_1 - \Delta_2) = 0, & I_2(\tilde{\Lambda}_1, \Delta_1 - \Delta_2) = 0. \end{cases}$$

Par ailleurs,  $|I_1(\Lambda_1, \tilde{\Lambda}_1 - \tilde{\Lambda}_2)| = 1$ , et  $|I_2(\tilde{\Delta}_1, \Delta_1 - \Delta_2)| = 1$ . On peut montrer que (voir par exemple [4])  $\lambda_1$  et  $\lambda_1 - \lambda_2$  constituent une base distinguée de  $H_n(F)$  et  $\delta_1$  et  $\delta_1 - \delta_2$  constituent une base distinguée de  $H_{n-1}(F \cap H)$ . Donc,  $(\Lambda_1, 2\tilde{\Lambda}_1)$ ,  $L'_2 = (\Lambda_1 - \Lambda_2, 2(\tilde{\Lambda}_1 - \tilde{\Lambda}_2))$ ,  $(0, \tilde{\Delta}_1)$  et  $D'_2 = (0, \tilde{\Delta}_1 - \tilde{\Delta}_2)$  constituent une base distinguée  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{H}_1$ .

D'après les calculs précédents, on en déduit le théorème suivant :

**THÉORÈME 3.3.4.** — *Dans la base  $\mathcal{B}$ , les diagrammes de Dynkin de la singularité de bord  $F_4$  sont celui du système de racines de même nom, i.e (pour  $\mathcal{H}_1$ ) :*



**REMARQUE.** — On retrouve ici que la singularité de bord  $F_4$  est “autoduale” (ce qui permet de retrouver le résultat de [2]) car les deux diagrammes de Dynkin pour  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  sont identiques lorsqu’on échange les sommets  $D_j$  et  $L_i$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] ARNOLD (V.I.), VARCHENKO (A.), GOUSSEIN-ZADÉ (S.). — *Singularités des applications différentiables*. — Éd. Mir, Moscou, 1986.
- [2] SHCHERBAK (I.G.). — Duality of boundary singularities, *Russian Mathematical Surveys*, t. **39**, p. 195–196.
- [3] HEFEZ (A.), LAZZERI (F.). — The Intersection Matrix of Brieskorn Singularities, *Inventiones Math.*, t. **25**, p. 143–157.
- [4] GABRIELOV (A.M.). — Intersection matrices for certain singularities, *Functional analysis*, t. **7–3**, p. 182–193.
- [5] ILYUTA (G.G.). — Monodromy and vanishing cycles of boundary singularities, *Functional analysis*, t. **19**, p. 173–182.
- [6] GRIFFITH (P.), HARRIS (J.). — *Principles of algebraic geometry*. — Wiley & Sons, New York, 1978.
- [7] EBELING (W.). — *The monodromy groups of isolated singularities of complete intersections*. — Lecture Notes in Mathematics, 1293, Springer, 1987.
- [8] TEISSIER (B.). — *The hunting of invariants in the geometry of discriminants*. — Proceedings of the Nordic Summer School, Oslo, Sijthoff & Noordhoff International Publishers, 1976.